Préparation à l'agrégation 2022-2023
TD Analyse à une variable complexe
Préliminaires topologiques, Séries entières

1. Le corps $\mathbb{C}$.

On commence par une
Définition-Proposition. On définit $\mathbb{C}$ comme l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ muni des lois

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d);\,,\quad (a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Alors $\mathbb{C}$ est bien un corps. On peut définir $i=(0,1)$ et constater que $i^2=(-1,0)$. On peut aussi assimiler $\mathbb{R}$ à un sous-corps de $\mathbb{C}$ via l'injection $x\in\mathbb{R}\mapsto(x,0)\in\mathbb{C}$ et observer que

$$\forall(a,b)\in\mathbb{C},\ (a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+i\times(b,0)$$

qui on écrira simplement $a+ib$.

Exercice 1. *Vérifier que $\mathbb{C}$ est un corps.*

On voit donc directement apparaitre le lien étroit entre le corps des complexes et la géométrie planaire, puisque tout nombre complexe $a+ib$ peut être représenté par le point $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Pour $z,z_1\in\mathbb{C}$, on écrirera zz_1 au lieu de $z\times z_1$. On définit également

$$\forall z=a+ib\in\mathbb{C},\ Re(z)=a,\ Im(z)=b,\ |z|=\sqrt{a^2+b^2},\ \bar{z}=a-ib$$

les parties réelles et imaginaires, le module et le conjugué de z. On vérifie facilement que

$$\forall(z,z_1)\in\mathbb{C}^2,\ |z|^2=z\bar{z},\ |zz_1|=|z|\,|z_1|,\ \overline{zz_1}=\bar{z}\,\overline{z_1}.$$

Exercice 2. *(1) Soit z et w deux nombres complexes. Démontrer que*

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= |z|^2+2Re(z\overline{w})+|w|^2\\ |z+w|^2+|z-w|^2 &= 2(|z|^2+|w|^2)\\ |z+w| &\le |z|+|w|\\ ||z|-|w|| &\le |z-w|.\end{aligned}$$

(2) Montrer que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes muni de la distance définie par

$$d(z,w):=|w-z|$$

est un espace métrique, c'est à dire que pour tous $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$,

(a) $d(x,y)\ge 0$

(b) $d(x,y)=0 \iff x=y$

(c) $d(y,x)=d(x,y)$

(d) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$.

Exercice 3. *(1) Déterminer les racines carrées de $1+4\sqrt{5}i$.*

(2) Résoudre les équations $5z^2+(9-7i)z+2-6i=0$ et $z^4+z^2-20=0$.

2. Préliminaires topologiques

On donne quelques éléments de topologie dans le cas de l'espace $\mathbb{C}$. Soit $U \subset \mathbb{C}$.

— Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha > 0$. On définit
$$D(z,\alpha) = \{w \in \mathbb{C} \,|\, d(z,w) < \alpha\}.$$

— On dit que un point $z \in U$ est intérieur à U si il existe $\alpha > 0$ tel que $D(z,\alpha) \subset U$. On notera $\mathring{U}$ l'ensemble des points intérieurs à U. Bien sur, $\mathring{U} \subset U$. On dira que U est ouvert si tous ces points sont intérieurs à U, autrement dit, si $\mathring{U} = U$.

— On appellera voisinage de z un ensemble qui contient $D(z,a) \subset$ pour un certain $\alpha > 0$.

— On dira que $w \in \mathbb{C}$ est adhérent à U si $\forall \alpha > 0$, l'intersection $D(w,\alpha) \cap U$ est non-vide. On notera $\overline{U}$ l'ensemble des points adhérents à U. Bien sur, $U \subset \overline{U}$. On dira que U est fermé si $U = \overline{U}$.

— On définira $\partial U = \overline{U} \setminus \mathring{U}$ la frontière de U.

— On dira que U est compact si de toute suite d'éléments de U, on peut extraire une sous-suite qui converge dans U. Comme $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension finie, un ensemble est compacte si et seulement si il est fermé et borné.

— On dira que U est un point d'accumulation de U si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $z' \in U$ tel que $|z - z'| < \epsilon$ et $z \neq z'$. De façon équivalente, cela signifie qu'il existe une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $U \setminus \{z\}$ qui converge vers z.

— l'ensemble U sera dit convexe si
$$\forall (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2,\ \forall t \in [0,1],\ (1-t)z_1 + tz_2 \in U.$$

— Comme pour les réels, on peut toujours considérer la notion de segment $[z_1,z_2]$ si $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$, mais on doit la définir sans utiliser l'ordre comme on a pu le faire dans $\mathbb{R}$: il s'agit de
$$[z_1,z_2] = \{(1-t)z_1 + tz_2,\ t \in [0,1]\}.$$
La définition précédente devient : U est convexe si pour tout $(z_1,z_2) \in U^2$, $[z_1,z_2] \subset U$.

— Un ensemble $A \subset U$ est dit fermé dans U si pour toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A$ qui converge dans U, la limite de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est contenue dans A.

— $A \subset U$ est dit ouvert dans U si pour tout $z \in A$ il existe $\alpha > 0$ tel que $D(z,\alpha) \cap U \subset A$.

— Un ensemble U sera dit connexe si pour tout $A \subset U$ tel que A est ouvert et fermé dans U, A est vide ou $A = U$.

— Un ensemble est dit connexe par arcs si pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, il existe un chemin continu entre z et z' qui est tracé dans U, c'est-à-dire qu'il existe $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue et telle que $\gamma([0,1]) \subset U$, $\gamma(0) = z$ et $\gamma(1) = z'$.

Exercice 4. *Soit $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$.*

(1) Montrer que $D(z,r)$ est ouvert.

(2) Montrer que l'adhérence de $D(z,r)$ est
$$\{w \in \mathbb{C} |\ |z-w| \leq r\}.$$

Exercice 5. *Soit $U \subset \mathbb{C}$. Montrer que*

(1) Si U est connexe par arcs, alors U est connexe.

(2) Si U est ouvert et connexe, alors U est connexe par arcs. Trouver un exemple d'un ensemble connexe U qui n'est pas connexe par arcs.

Si U est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$, on définit la distance entre z et U par

$$d(z,U) = \inf\{|z-w|,\, w \in U\}.$$

Exercice 6. *Montrer que $d(z,U)=0$ si et seulement si $z \in \overline{U}$.*

Si U_1 et U_2 deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{C}$, on définit

$$d(U_1,U_2) = \inf\{|z_1-z_2|,\ z_1 \in U_1, z_2 \in U_2\}.$$

Exercice 7. *Soit U_1, U_2 des sous-ensembles non-vides de $\mathbb{C}$.*

(1) Montrer qu'il existe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de U_1 et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de U_2 tels que

$$|z_n - w_n| \underset{n\to+\infty}{\to} d(U_1,U_2).$$

(2) On suppose que U_1 est compact et U_2 est fermé, et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Montrer que $d(U_1,U_2) > 0$.

3. Séries entières

On sínteresse aux séries de fonctions de la forme

$$z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$$

où $z \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{C}$. Plus généralement, une série entière centrée en $z_0 \in \mathbb{C}$ est une série de fonctions dont le terme général $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\forall z \in \mathbb{C}$, $f_n(z) = a_n(z-z_0)^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite donnée de nombres complexes.

Modes de convergence

— Soit $X \subset \mathbb{C}$, $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions. On dit que f_n converge **uniformément** vers $f : X \to \mathbb{C}$ sur X si $\|f_n - f\|_X \to 0$

— Soit $X \subset \mathbb{C}$ et $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions. Soit $A \subset X$. On dit que (f_n) **est de Cauchy sur** A si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N\ \|f_n - f_m\|_A < \epsilon.$$

— On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **localement uniformement** sur X vers $f : X \to \mathbb{C}$ si $\forall x \in X$ il existe U_x un voisinage de x dans X tel que $(f_n|_{U_x})$ converge uniformement vers $f|_{U_x}$

— Soit $X \subset \mathbb{C}$, $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions. Alors on dit que $\sum f_n$ converge **localement normalement** sur X si tout point de X a un voisinage U_x dans X tel que la série

$$\sum \|f_n\|_{U_x} \ \text{ converge }.$$

Théorème 3.1 (Critère de Weierstrass pour les séries)**.** *Soit $X \subset \mathbb{C}$ et $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite d'applications. Soit $A \subset X$. S'il existe une suite de nombres réels M_n tels que $\|f_n\|_A \leq M_n$ et $\sum_n M_n$ converge, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur A.*

Exercice 8. *Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy sur A si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur A.*

Exercice 9. *Soit $X \subset \mathbb{C}$ et $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions. Montrer que si $\sum f_n$ converge localement normalement sur X alors $\sum f_n$ converge localement uniformément sur X.*

Lemme 3.2 (Lemme de convergence d'Abel)**.** *Supposons qu'il existe des nombres réels $s > 0$ et $M > 0$ tels que*

$$|a_n|s^n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors la série entière $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge localement normalement dans $D(z_0, s)$.

Théorème 3.3 (Rayon de convergence)**.** *Soit $\sum a_n(z - z_0)^n$ une série entière. Soit*

$$R = \sup\{t \geq 0,\ \sup\{|a_n t^n|\} < +\infty\}.$$

Alors

(1) $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge localement normalement dans $D(z_0, R)$.

(2) $\sum a_n(z - z_0)^n$ diverge en tout point de $\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, R)}$.

Donc l'ensemble de définition d'une série entière inclut $D(z_0, R)$ et est inclus dans $\overline{D(z_0, R)}$. En les points de $\partial D(z_0, R)$, il faut une étude plus approfondie et spécifique à chaque situation pour étudier la convergence.

Exercice 10. *Montrer que la série entière $\sum n^n(z - z_0)^n$ n'est pas convergente, i.e. diverge en tout point autre que z_0.*

Calcul de rayons de convergence.

Théorème 3.4 (Formule de Cauchy-Hadamard)**.** *Le rayon de convergence d'une série*

$$\sum a_n(z - z_0)^n$$

est

$$R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Théorème 3.5 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}$ avec $a_n \neq 0$ pour tout n sauf un nombre fini. Soit R le rayon de convergence de la série $\sum a_n(z - z_0)^n$, alors*

$$\liminf \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq R \leq \limsup \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Exercice 11. *Trouver les démonstrations des deux règles de calcul.*

Exercice 12. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes, et R_a et R_b les rayons des séries entières $\sum a_n(z - z_0)^n$ et $\sum b_n(z - z_0)^n$. Montrer*

— *si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$,*
— *si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$,*
— *si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.*

Exercice 13. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_1 et R_2.*

(1) Montrer que le rayon de convergence de $\sum(a_n + b_n)z^n$ est supérieur à $\min(R_1, R_2)$ avec égalité si $R_2 \neq R_1$.

(2) Montrer que le rayon de convergence de $\sum(a_n b_n)z^n$ est supérieur à $R_1 R_2$.

Exercice 14. *Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{a^n}{1+b^n} z^n$ en selon les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.*

Exercice 15. *On pose $H_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, somme partielle de la série harmonique. Calculer le rayon de la série entière $\sum H_n z^n$, et calculer explicitement $\sum H_n z^n$ quand z est dans le disque de convergence.*

Exercice 16 (Exemples importants)**.** *Trouver les rayons de convergence des séries suivantes.*

(1) *La série géométrique* $\sum z^n$ *;*
(2) *La série* $\sum \frac{z^n}{n^n}$
(3) *La série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$*. On définit*
$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$
(4) *La série* $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$*. On note la somme*
$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$
(5) *La série* $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ *On note la somme*
$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$
On remarque que les fonctions $\exp(z), \cos(z), \sin(z)$ *coincident sur* $\mathbb{R}$ *avec les fonctions réelles* $\exp(x), \cos(x)$ *et* $\sin(x)$*.*
(6) ***Formule d'Euler*** *Vérifier* $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$*.*
(7) *La série logarithme* $\sum \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$ *La somme*
$$\lambda(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$$
coincide avec $\log(1+x)$ *quand* $z = x$*.*

Exercice 17. *Soit* $\sum a_n z^n$ *de rayon de convergence respectif* R*. Montrer que les séries* $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ *et* $\sum \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ *ont pour rayon de convergence* R*.*