Transformée de Fourier

Vincent Duchêne

19 septembre 2024

1 Transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$

Définition 1.1. *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, on note*[1]

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

la transformée de Fourier *de f en $\boldsymbol{\xi}$ ($\boldsymbol{\xi}$ est appelé le* vecteur d'onde*, ou le* nombre d'onde *si $d = 1$).*

Rappelons que $L^1(\mathbb{R}^d)$ est une classe d'équivalence (pour l'égalité presque partout). Dans la définition précédente, on a choisi un représentant et la valeur de la transformée de Fourier ne dépend pas du choix du représentant. Dans la suite, on confond la classe d'équivalence et ses représentants. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et l'inégalité $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. L'application $\mathcal{F} : f \in L^1(\mathbb{R}^d) \mapsto \widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est donc une application linéaire bornée.[2]

Exemple 1.2.

- *Soit $f_\alpha : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{1}{2\alpha}\mathbf{1}_{[-\alpha,\alpha]^d}(\boldsymbol{x})$, $\alpha > 0$. Alors $\widehat{f_\alpha}(\xi) = \prod_{j=1}^d \frac{\sin(\alpha\xi_j)}{\alpha\xi_j}$.*
- *Soit $g_\alpha : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|\boldsymbol{x}|_1}$, $\alpha > 0$. Alors $\widehat{g_\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{j=1}^d \frac{\alpha^2}{\alpha^2+|\xi_j|^2}$.*
- *Soit $h_\alpha : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mapsto e^{-\alpha|\boldsymbol{x}|_2^2/2}$, $\alpha > 0$. Alors $\widehat{h_\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = (\frac{\pi}{\alpha})^{d/2} e^{-|\boldsymbol{\xi}|_2^2/(2\alpha)}$.*

Proposition 1.3.

i. Notant $f_\alpha : \boldsymbol{x} \mapsto f(\alpha\boldsymbol{x})$, $\alpha \neq 0$, $\widehat{f_\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\alpha|^d}\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}/\alpha)$.

ii. Notant $\tau_{\boldsymbol{h}} f : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})$, $\widehat{\tau_{\boldsymbol{h}} f}(\boldsymbol{\xi}) = e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{h}}\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})$.

iii. Notant $\rho_{\boldsymbol{h}} f : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})e^{\mathrm{i}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x}}$, $\widehat{\rho_{\boldsymbol{h}} f}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{f}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{h})$.

iv. Si f est à valeurs réelles, alors $\widehat{f}(-\boldsymbol{\xi}) = \overline{\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})}$.

Proposition 1.4. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ avec*

$$f \star g : \boldsymbol{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

et pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{f \star g}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\,\widehat{g}(\boldsymbol{\xi}).$$

Démonstration. C'est une application directe des théorèmes de Young, Fubini-Tonelli et Fubini. □

1. Il existe plusieurs autres conventions, qui ont leurs avantages et leurs inconvénients. Anticipant sur la suite, on peut par exemple s'arranger pour que la transformée de Fourier définisse à terme une isométrie dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

2. On a une propriété légèrement plus forte : si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f}$ est continue et converge vers 0 à l'infini (c'est le Théorème de Riemann-Lebesgue). La continuité est une conséquence directe du théorème de continuité sous le signe intégral. Pour la décroissance à l'infini, on peut le montrer d'abord pour les fonctions régulières (dans l'espace de Schwartz), puis par densité de l'espace de Schwartz dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

La proposition suivante est essentielle : elle indique que (sous hypothèses) si l'on connaît la transformée de Fourier d'une fonction (et que l'on sait intégrer), alors on peut reconstruire cette fonction. Ceci conjointement avec les propriétés agréables de la transformée de Fourier vis-à-vis de la convolution et la dérivation donnent des applications naturelles aux équations aux dérivées partielles (qui sont historiquement la raison pour laquelle la transformée de Fourier a été introduite).

Proposition 1.5. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors pour presque tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

Démonstration. On voudrait pouvoir écrire $\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, mais ce n'est pas possible. On utilise alors un procédé de régularisation : on considère

$$F_\epsilon = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x} - \epsilon|\boldsymbol{\xi}|_1} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

avec $|(\xi_1,\dots,\xi_d)|_1 := |\xi_1| + \cdots + |\xi_d|$. Par le théorème de convergence dominée, on a $F_\epsilon(\boldsymbol{x}) \to F_0(\boldsymbol{x})$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ lorsque $\epsilon \searrow 0$. Le théorème de Fubini, quelques calculs et la formule pour g_α exhibée dans l'Exemple 1.2 permettent d'écrire $F_\epsilon = f \star \rho_\epsilon$ avec $\rho_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^d}\rho(\frac{\cdot}{\epsilon})$, $\rho \geq 0$, $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Donc $F_\epsilon \to f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, en particulier (à extraction de sous-suite près) presque partout. □

2 Transformée de Fourier de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

La transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ souffre de deux inconvénients majeurs : (i) $L^1(\mathbb{R}^d)$ n'est pas stable par des opérations naturelles, et en particulier la dérivation ; (ii) la transformée de Fourier d'une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ n'est pas nécessairement dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, ce qui limite les applications du théorème précédent. On va régler ces deux problèmes en se restreignant à un espace de fonctions beaucoup plus restrictif, la classe de Schwartz des fonctions régulières à décroissance rapide. [3]

Définition 2.1. *On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que*

$$\forall \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{N}^d,\ \forall N \in \mathbb{N}, \qquad \langle\cdot\rangle^N \partial^\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}^d),$$

où l'on note $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d}$ et $\langle\cdot\rangle = (1+|\cdot|^2)^{1/2}$.

La classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel, stable par produit usuel, par produit de convolution, par dérivation et par multiplication par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont toutes les dérivées sont à croissance lente, *i.e.* pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, il existe $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\langle\cdot\rangle^{-N_\alpha}\partial^\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

On a de plus les inclusions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p \in [1,+\infty]$, et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p \in [1,+\infty[$ (puisque $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ l'est).

Proposition 2.2. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_d) \in \mathbb{R}^d$ et $j \in \{1,\dots,d\}$. Alors $\partial_{x_j} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\boldsymbol{x} \mapsto x_j f(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et on a les identités*

$$\widehat{\partial_{x_j} f}(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{i}\xi_j \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})$$
$$\widehat{x_j f}(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{i}\partial_{\xi_j}\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})$$

Évidemment, ces formules peuvent être itérées. En particulier, si P est un polynôme (multivarié), alors $\widehat{P(D)f}(\boldsymbol{\xi}) = P(i\boldsymbol{\xi})\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})$ et $\widehat{P(x_j)f}(\boldsymbol{\xi}) = P(\mathrm{i}\partial_{\xi_j})\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})$. Ainsi, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors on a $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En particulier, la formule d'inversion (Proposition 1.4) s'applique : la transformée de Fourier réalise une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Les formules indiquent également les propriétés fondamentales suivantes :

i. *la régularité d'une fonction se traduit par la décroissance de sa transformée de Fourier*,
ii. *la décroissance d'une fonction se traduit par la régularité de sa transformée de Fourier.*

3. Il s'agit ici de reculer pour mieux sauter. On va ensuite revenir à un espace de fonctions moins restrictif, $L^2(\mathbb{R}^d)$, par le moyen de la densité. On peut aussi se ramener à un espace de fonction *beaucoup* moins restrictif, les distributions tempérées, par le moyen de la dualité.

3 Transformée de Fourier de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

La transformée de Fourier restreinte dans la classe de Schwartz est très agréable, mais très restrictive. Un raisonnement par densité permet de définir une *extension* de la transformée de Fourier dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$, qui est comme on le verra un espace particulièrement indiqué, en particulier en raison de la proposition suivante.

Proposition 3.1 (Parseval, Plancherel)**.** *Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\overline{\widehat{g}(\boldsymbol{\xi})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})\overline{g(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

En particulier, $\|\widehat{f}\|_2 = (2\pi)^{d/2}\|f\|_2$.

Démonstration. C'est (encore une fois) une application directe du théorème de Fubini. □

Théorème 3.2. *Il existe un unique isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d)$, noté $\mathcal{F}$,*[4] *qui coïncide avec la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. L'unicité provient immédiatement de la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (et de la propriété de continuité).

Pour l'existence, on construit $\mathcal{F}f$ de la façon suivante. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$. La suite f_n est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et donc, par Plancherel, $\widehat{f_n}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, qui est un espace *complet*. La suite converge donc et on note $\mathcal{F}f$ la limite. La notation est valide : la fonction limite ne dépend pas du choix de la suite. En particulier, on a bien $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ est évidemment linéaire, et continue car $\mathcal{F}$ vérifie le théorème de Plancherel (par densité). C'est aussi le cas de la formule d'inversion $\frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}\mathcal{P}\mathcal{F} = \mathrm{Id}$, ce qui montre que $\mathcal{F}$ est surjective, et définit donc bien un isomorphisme. □

Cela est écrit dans la preuve précédente, mais répétons et précisons.

Proposition 3.3. *Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}f)(\boldsymbol{\xi})\overline{(\mathcal{F}g)(\boldsymbol{\xi})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})\overline{g(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

En particulier, $\|\mathcal{F}f\|_2 = (2\pi)^{d/2}\|f\|_2$.

Proposition 3.4. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$f = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{P}\mathcal{F}(\mathcal{F}f) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(\mathcal{P}\mathcal{F}f) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(\mathcal{F}\mathcal{P}f),$$

où l'on note $\mathcal{P}f : \boldsymbol{x} \mapsto f(-\boldsymbol{x})$.

L'application vérifie également les identités de la Proposition 1.3 et, si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f \star g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}(f \star g) = (\mathcal{F}f)\,\widehat{g}$.

Proposition 3.5. *L'isomorphisme $\mathcal{F}$ coïncide avec la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Là encore on utilise $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ pour $p \in \{1, 2\}$. On a par le théorème de Plancherel $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f\|_2 = 0$, donc (à extraction de sous-suite près) convergence presque partout de $\mathcal{F}f_n$ vers $\mathcal{F}f$. Mais on a également $\mathcal{F}f_n = \widehat{f_n}$ et pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, $|\widehat{f_n}(\boldsymbol{\xi}) - \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})| \le \|f_n - f\|_1 \to 0$. On a donc $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ presque partout. □

4. On note souvent encore $\mathcal{F}f = \widehat{f}$. On gardera ici la distinction de notations pour des raisons pédagogiques.

4 Espaces de Sobolev

L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ est un espace merveilleux, si ce n'est qu'il ne forme pas une algèbre de Banach (il n'est pas stable par produit). Pour remédier à ce problème, on peut définir les espaces de Sobolev.

Définition 4.1. *On note l'espace de Sobolev d'indice $s \geq 0$*

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \langle \cdot \rangle^s \mathcal{F} f \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Muni de la norme $\|f\|_{H^s} := \|\langle \cdot \rangle^s \mathcal{F} f\|_2$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach.

Si $s \in \mathbb{N}$, l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ coïncide avec $W^{s,2}(\mathbb{R}^d) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall j \in \{0, \ldots, s\},\ \nabla^j f \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$.

Proposition 4.2 (injection)**.** *On a $H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $s > d/2$.*

Démonstration. Le "si" se voit facilement : $\mathcal{F} f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ lorsque $s > d/2$ et par la formule d'inversion, $\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_1 \lesssim \|f\|_{H^s}$. Pour le "seulement si", on peut construire une suite de fonctions à travers leur transformée de Fourier de la forme $(\mathcal{F} f)\chi(\frac{\cdot}{n})$ (avec χ une fonction de troncature lisse) qui sera bornée et convergente dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, dans la classe de Schwartz, et dont la valeur prise en $\boldsymbol{x} = 0$ converge vers $+\infty$ (par la formule explicite d'inversion). $\square$

Proposition 4.3 (produit)**.** *Si $s, s_1, s_2 \geq 0$ sont tels $s \leq s_1$, $s \leq s_2$, $s + d/2 < s_1 + s_2$, alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in H^{s_1}(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $g \in H^{s_2}(\mathbb{R}^d)$, $fg \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|fg\|_{H^s} \leq C\|f\|_{H^{s_1}}\|g\|_{H^{s_2}}.$$

En particulier, on peut prendre $s_1 = s_2 = s$ et $H^s(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre si $s > d/2$.

Démonstration. Il s'agit d'écrire la transformée de Fourier du produit comme une convolution, puis d'appliquer l'inégalité de Young pour la convolution. $\square$

Proposition 4.4 (composition)**.** *Soient $s \geq 0$ et $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$ telle que $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Alors pour tout $M > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec $\|u\|_\infty \leq M$, on a $F \circ u \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|F \circ u\|_{H^s} \leq C\|u\|_{H^s}.$$

Démonstration. La preuve de ce résultat est relativement simple lorsque $s \in \mathbb{N}$ (il s'agit d'estimer les dérivées jusqu'à l'ordre s pour la norme $\|\cdot\|_2$), et nettement plus ardue lorsque $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$. $\square$

Ces résultats rendent les espaces de Sobolev particulièrement agréables dans des problèmes non-linéaires : on va pouvoir utiliser à la fois la transformée de Fourier et le caractère Hilbertien de l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$, mais également des estimations de produit...

Par exemple, anticipant sur la suite, admettons que l'on sache résoudre le problème linéaire à coefficients constants suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + P(\nabla)u = 0 \\ u\big|_{t=t_0} = u_0 \end{cases}$$

au sens où pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, il existe un unique $u \in \mathcal{C}([0, +\infty[; H^s(\mathbb{R}^d))$ solution (dans un sens à définir précisément) des équations ci-dessus. Notons $S(t; t_0)u_0 := u(t, \cdot)$ avec u la solution émergeant de u_0 à $t = t_0$. Alors on peut résoudre *localement en temps* le problème non-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u + P(\nabla)u = F(u) \\ u\big|_{t=t_0} = u_0 \end{cases}$$

où F est une fonction lisse telle que $F(0) = 0$, grâce à la formule de Duhamel

$$u(t, \cdot) = S(t; t_0)u_0 + \int_0^t S(t; \tau)N(u(\tau, \cdot))\,\mathrm{d}\tau.$$

La formule produit en effet une solution du problème non-linéaire, et peut se résoudre sur un intervalle $I = [t_0, t_1]$ par application du théorème de point fixe de Banach, pourvu que $t_1 - t_0$ soit suffisamment petit.

5 Applications

5.1 Problème de Laplace

Proposition 5.1. *Pour tout $\alpha > 0$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe un unique $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que $\Delta u \in L^2(\mathbb{R})$ et*

$$-\alpha\Delta u + u = f.$$

Démonstration. Si la solution existe, alors elle vérifie $-\alpha\mathcal{F}(\Delta u) + \mathcal{F}u = \mathcal{F}f$. De plus, on a $\mathcal{F}(\Delta u)(\boldsymbol{\xi}) = -|\boldsymbol{\xi}|_2^2\mathcal{F}u$,[5] et on a donc nécessairement $(\alpha|\boldsymbol{\xi}|_2^2 + 1)\mathcal{F}u = \mathcal{F}f$. En utilisant la formule d'inversion, on déduit

$$u := \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{P}\mathcal{F}(\alpha|\boldsymbol{\xi}|_2^2 + 1)^{-1}\mathcal{F}f.$$

Il reste à montrer que u ainsi définie est bien solution du problème. On a immédiatement que $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ d'après la continuité de $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On montre également que $\Delta u \in L^2(\mathbb{R})$ et vérifie l'identité voulue en supposant d'abord que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (auquel cas $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$), puis par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et en utilisant encore la continuité de $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$. □

La preuve nous donne mieux que l'existence et l'unicité de la solution : elle donne une formule explicite pour la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}u = (\alpha|\cdot|_2^2 + 1)^{-1}\mathcal{F}f.$$

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Proposition 5.2. *Avec les notations de la Proposition 5.1, si de plus $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s \geq 0$, alors $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^d)$.*

Proposition 5.3. *Avec les notations de la Proposition 5.1, si $d = 1$, on a $u = K \star f$ avec*

$$K(x) = \frac{1}{2\alpha}e^{\frac{-|x|}{\alpha}}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'identité $\mathcal{F}(K\star f) = \widehat{K}\,(\mathcal{F}f)$ valide pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $K \in L^1(\mathbb{R})$, et de la formule pour g_α exhibée dans l'Exemple 1.2. □

La fonction K est appelée le *noyau de Green* (de l'opérateur $-\alpha\Delta + \mathrm{Id}$). Le fait que $K(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ traduit un *principe du maximum.* Une conséquence est que si $f_1(x) \leq f_2(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, alors $u_1(x) \leq u_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (où l'on note, pour $i \in \{1, 2\}$, $u_i = K \star f_i$ la solution de $-\alpha u_i'' + u_i = f_i$). En particulier, si $f_1(x) \leq M$ (respectivement $f_1(x) \geq m$), alors $u_1(x) \leq M$ (respectivement $u_1(x) \geq m$).

De plus, puisque $K \in L^1(\mathbb{R})$, l'identité $u = K \star f$ engendre pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ une fonction $u \in L^p(\mathbb{R})$ (par l'inégalité de Young), et on peut vérifier que $u'' \in L^p(\mathbb{R})$ et $-\alpha u'' + u = f$.

5.2 Équation de la chaleur

Proposition 5.4. *Pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe $u \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[; L^2(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^\infty(]t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ vérifiant*

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{sur }]t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^d, \\ u\big|_{t=t_0} = u_0 & \text{dans } L^2(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

De plus, $S : u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d) \mapsto u \in \mathcal{C}([0, +\infty[; L^2(\mathbb{R}^d))$ est une application linéaire bornée.

5. On a vu la relation pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dans le cas général, on considère $u_n = u \star \rho_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ avec $\rho_n = n^d\rho(n\cdot)$ avec $\rho \geq 0$, $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\int_{\mathbb{R}^d}\rho = 1$. On a $\|u_n - u\|_2 \to 0$ et $\|\Delta u_n - \Delta u\|_2 = \|\rho_n \star (\Delta u) - \Delta u\|_2 \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Par Plancherel, il suit $\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{F}u_n - \mathcal{F}u\|_2 = \lim_{n\to\infty}\||\cdot|_2^2\mathcal{F}u_n - \mathcal{F}(\Delta u)\|_2 = 0$. À extraction de sous-suite près, on déduit les convergences et donc l'identité recherchée pour presque tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$.

Remarque 5.5. *Pour tout $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $(X, \|\cdot\|_X)$ espace de Banach, on note*

$$\mathcal{C}(I;X) := \{u \text{ mesurable telle que pour tout } t \in I,\ u(t,\cdot) \in X \text{ et } \lim_{t' \to t, t' \in I} \|u(t',\cdot) - u(t,\cdot)\|_X = 0\}.$$

C'est un espace de Banach, muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty(I;X)} : u \mapsto \sup_{t \in I} \|u(t,\cdot)\|_X$.

Démonstration. Supposons que u existe, et notons (avec un abus de notation), pour tout $t \in [t_0, +\infty[$, $\widehat{u}(t,\cdot) := \mathcal{F}u(t,\cdot)$ la transformée de Fourier (dans $L^2(\mathbb{R}^d)$) de $u(t,\cdot)$. Supposons que l'on a pout $t \in]t_0, +\infty[$, $\mathcal{F}(\partial_t u) = \partial_t \widehat{u}$ et $\mathcal{F}(\Delta u) = -|\cdot|_2^2 \widehat{u}$.[6] On en déduit que $\widehat{u}(t, \boldsymbol{\xi})$ vérifie pour presque tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(t,\boldsymbol{\xi}) = -|\boldsymbol{\xi}|_2^2 \widehat{u}(t,\boldsymbol{\xi}) & \text{pour } t \in]t_0, +\infty[, \\ \widehat{u}(t_0, \boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}u_0(\boldsymbol{\xi}). \end{cases}$$

Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire selon la variable t (paramétrisée par $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$) qui se résout explicitement :

$$\forall t \geq t_0, \qquad \widehat{u}(t,\boldsymbol{\xi}) = \exp(-(t-t_0)|\boldsymbol{\xi}|_2^2)\mathcal{F}u_0(\boldsymbol{\xi}).$$

Puisque le terme de droite vit dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $t \geq t_0$ (mais pas pour $t < t_0$!), on peut écrire

$$\forall t \geq t_0, \quad u(t,\cdot) = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{P}\mathcal{F} \exp(-(t-t_0)|\boldsymbol{\xi}|_2^2)\mathcal{F}u_0.$$

On vérifie ensuite facilement (en utilisant que $\mathcal{F}$ coïncide avec la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ pour $\exp(-(t-t_0)|\boldsymbol{\xi}|_2^2)\mathcal{F}u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, et par application du théorème de dérivation sous le signe intégral) que $u \in \mathcal{C}^\infty(]t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ et vérifie bien les identités voulues. ☐

Encore une fois, la preuve nous donne une formule explicite pour la transformée de Fourier :

$$\widehat{u}(t,\boldsymbol{\xi}) = \exp(-(t-t_0)|\boldsymbol{\xi}|_2^2)\mathcal{F}u_0(\boldsymbol{\xi}).$$

On en déduit immédiatement les résultat suivants.

Proposition 5.6. *Avec les notations de la Proposition 5.4, si de plus $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s \geq 0$, alors $u \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[; H^s(\mathbb{R}^d))$.*

Proposition 5.7. *Avec les notations de la Proposition 5.4, on a pour tout $t > t_0$, $u(t,\cdot) = K_t \star f$ avec $K_t \in L^1(\mathbb{R}^d)$ définie par*

$$K_t(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(4\pi(t-t_0))^{d/2}} e^{\frac{-|\boldsymbol{x}|_2^2}{4(t-t_0)}}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'identité $\mathcal{F}(K_t \star f) = \widehat{K}_t\,(\mathcal{F}f)$ valide pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $K_t \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et de la formule pour h_α exhibée dans l'Exemple 1.2. ☐

Pour tout $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq p < \infty$, La formule précédente fournit $u \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[; L^p(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^\infty(]t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\partial_t u = \Delta u$ sur $]t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^d$ et $u\big|_{t=t_0} = u_0$. Le cas $p = \infty$ doit être exclus : on ne peut pas construire $u \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[; L^\infty(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^\infty(]t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ vérifiant $u\big|_{t=t_0} = u_0$ si u_0 est discontinue. Pour le cas $1 \leq p < \infty$, on montre la continuité en $t = t_0$ d'abord pour $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, puis par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Remarquons que la fonction K_t est positive pour tout $t > t_0$. La discussion sur le principe du maximum évoquée dans la section précédente s'applique donc.

6. C'est vrai si $\widehat{u}$, $\partial_t \widehat{u}$, $|\cdot|_2^2 \widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ (en utilisant les théorèmes de dérivation sous le signe intégral). En particulier, la solution que l'on construit dans la preuve est unique sous ces conditions. De manière plus profonde, ces résultats sont vrais pour les *distributions tempérées*, mais nous éviterons cet outil dans ces notes.

5.3 Problèmes d'évolution

Les applications précédentes pourraient laisser à penser que la transformée de Fourier est un simple artifice permettant de calculer la fonction de Green du problème, et que l'écriture sous forme de produit de convolution est le point essentiel. Cela est vrai en un sens puisque pour tout polynôme multivarié P, les identités $\widehat{P(\nabla)f}(\boldsymbol{\xi}) = P(i\boldsymbol{\xi})\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})$ et $P(\nabla)f = K \star f$ avec $\widehat{K} = P(i\boldsymbol{\xi})$ sont vraies très généralement (en particulier en utilisant la transformée de Fourier sur l'espace des distributions tempérées). Néanmoins une formule explicite pour K est en général illusoire, et c'est l'identité sur la transformation de Fourier qui est souvent la plus pratique.

Pour le voir, on va traiter des problèmes d'évolution très généraux. [7]

Proposition 5.8. *Soit P un polynôme multivarié tel qu'il existe une fonction réelle $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ telle que*

$$\forall t \geq 0, \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad \| \exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\| \leq C(t)$$

où $\|A\| = \sup_{\boldsymbol{v}\neq \boldsymbol{0}} \frac{|A\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}$ et $|(v_1, \dots, v_n)|^2 = \sum_{j=1}^d |v_j|^2$ (par exemple). Alors pour tout $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $u(t, \cdot) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{P}\mathcal{F}\exp((t-t_0)P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\widehat{u}_0 \in \mathcal{C}^\infty([t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ et vérifie

$$\begin{cases} \partial_t u = P(\nabla)u & \text{sur }]t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^d, \\ u\big|_{t=t_0} = u_0. \end{cases}$$

Démonstration. On a $u\big|_{t=t_0} = u_0$ par définition. Montrons que $u \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[; L^2(\mathbb{R}^d))$. On a pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, $\widehat{u}(t, \boldsymbol{\xi}) = \exp((t-t_0)P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\widehat{u}_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t-t_0)^n P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})^n}{n!}\widehat{u}_0(\boldsymbol{\xi})$ est une série normalement convergente. Sur tout intervalle borné $J \subset \mathbb{R}^+$, $|\widehat{u}(t, \boldsymbol{\xi})|^2 \leq \sup_{t-t_0\in J} |C(t)|^2|\widehat{u}_0|^2$. Donc par le théorème de convergence dominée, $\widehat{u}(t, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{C}(J; L^2(\mathbb{R}^d))$ et donc (par Plancherel), $u \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[; L^2(\mathbb{R}^d))$.

Montrons que si $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $u \in \mathcal{C}^\infty([t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$. En utilisant le raisonnement précédent, et puisque $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a $(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})^\alpha\widehat{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})^\alpha\widehat{u}(t, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[; L^2(\mathbb{R}^d))$. Par la relation $(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})^\alpha = \frac{1}{(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^N}(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})^\alpha(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^N$ avec $N > d/4$, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $(t, \boldsymbol{\xi}) \mapsto (\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})^\alpha\widehat{u}(t, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[; L^1(\mathbb{R}^d))$ et donc (par la formule d'inversion explicite et le théorème de dérivation sous le signe intégral) $\partial_{\boldsymbol{x}}^\alpha u \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$. De la même manière, on a $P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})\widehat{u}(t, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[; L^1(\mathbb{R}^d))$ et on en déduit $\partial_t u \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ et de plus $\partial_t u = P(\nabla)u$. En itérant ce procédé, on montre par récurrence que $u \in \mathcal{C}^\infty([t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$. □

Remarque 5.9. *On s'est restreint à des données initiales $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, mais la formule a un sens pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et vérifie $\partial_t u = P(\nabla)u$ au sens des distributions tempérées. C'est l'unique telle solution dans $\mathcal{C}([t_0, +\infty[; L^2(\mathbb{R}^d))$ vérifiant $u|_{t=t_0} = u_0$ (la preuve de l'unicité requiert de définir la transformée de Fourier dans les distributions tempérées, et utilise un raisonnement de dualité).* [8]

La résolution des problèmes d'évolution du type précédent se ramène donc à vérifier une hypothèse sur $\exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))$, donc un problème d'algèbre linéaire.

Proposition 5.10. *Soit P un polynôme multivarié. Supposons*
i. Pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, $P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})$ est diagonalisable en valeurs propres de partie réelle négative ou nulle ;
ii. Il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, les projecteurs spectraux sont de norme bornée par C.
Alors pour tout $t \geq 0$, et pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, $\| \exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\| \leq d\,C$.

De plus, si il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ on a $\| \exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\| \leq C$, alors i. et ii. sont vérifiés (et les valeurs propres sont imaginaires pures).

7. Par ex. l'équation de la chaleur, l'équation de Schrödinger, l'équation de transport, l'équation des ondes...

8. Si l'on veut éviter de faire appel aux distributions tempérées, on peut également construire la solution pour une donné $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ par densité, en imposant la continuité de l'application $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d) \mapsto u \in \mathcal{C}([t_0, +\infty[; L^2(\mathbb{R}^d))$. La solution pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est alors la limite de solutions pour des données initiales $u_{0,n} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (qui sont uniques dans $\mathcal{C}([t_0, +\infty[; L^2(\mathbb{R}^d))$ telles que $u(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $t \geq t_0$). On retrouve bien alors, après passage à la limite, la solution $u(t, \cdot) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{P}\mathcal{F}\exp((t-t_0)P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\widehat{u}_0$.

Démonstration. D'après *i.*, on a la décomposition $P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})} \lambda_j(\boldsymbol{\xi})\Pi_j(\boldsymbol{\xi})$ avec $\Re(\lambda_j(\boldsymbol{\xi})) \leq 0$ et $\Pi_j(\boldsymbol{\xi})^2 = \Pi_j(\boldsymbol{\xi})$, $\Pi_i(\boldsymbol{\xi})\Pi_j(\boldsymbol{\xi}) = 0$ si $i \neq j$. D'après *ii.*, $\|\Pi_j(\boldsymbol{\xi})\| \leq C$. Il suit

$$\forall t \geq 0, \| \exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\| = \| \sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})} e^{t\lambda_j(\boldsymbol{\xi})}\Pi_j(\boldsymbol{\xi})\| \leq \sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})} C \leq d\,C.$$

On a montré le premier énoncé.

Pour le second, s'il existe une valeur propre de partie réelle non nulle, alors en notant λ cette valeur propre et $\boldsymbol{v}$ un vecteur propre associé, on a $\| \exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{v}\| = |e^{t\lambda}\boldsymbol{v}| = e^{t\Re(\lambda)}|\boldsymbol{v}|$ ce qui amène une contradiction. Si il existe un bloc de Jordan non trivial (c'est à dire une valeur propre λ non semi-simple), alors pour $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}((P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}) - \lambda\mathrm{Id})^2) \setminus \mathrm{Ker}(P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}) - \lambda\mathrm{Id})$, on a $\| \exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{v}\| = \|e^{t\lambda}(\boldsymbol{v} + t(P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}) - \lambda\mathrm{Id})\boldsymbol{v}\| \geq -|\boldsymbol{v}| + |t|\,|(P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}) - \lambda\mathrm{Id})\boldsymbol{v}|$ ce qui amène une contradiction.

Finalement, en utilisant la décomposition spectrale $P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})} \lambda_j(\boldsymbol{\xi})\Pi_j(\boldsymbol{\xi})$, on déduit que pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \notin \{\lambda_j(\boldsymbol{\xi}),\ j \in \{1, \dots, m(\boldsymbol{\xi})\}\}$, $(\lambda - P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))^{-1} = \sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})} \frac{1}{\lambda - \lambda_j(\boldsymbol{\xi})}\Pi_j(\boldsymbol{\xi})$ et donc

$$\forall j \in \{1, \dots, m(\boldsymbol{\xi})\}, \qquad \lim_{\lambda \to \lambda_j(\boldsymbol{\xi})} (\lambda - \lambda_j(\boldsymbol{\xi}))(\lambda - P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))^{-1} = \Pi_j(\boldsymbol{\xi}).$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\lambda) > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})} e^{t(\lambda_j(\boldsymbol{\xi})-\lambda)}\Pi_j(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})} \frac{1}{\lambda - \lambda_j(\boldsymbol{\xi})}\Pi_j(\boldsymbol{\xi}) = (\lambda - P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))^{-1}.$$

En appliquant ces identités avec $\lambda = \lambda_j(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon$, $\varepsilon \searrow 0$, on trouve

$$\|\Pi_j(\boldsymbol{\xi})\| = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \|(\lambda_j(\boldsymbol{\xi}) + \varepsilon - P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))^{-1}\| \leq \varepsilon \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^{+\infty} |e^{-(\lambda_j(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon)t}|\| \exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\|\,\mathrm{d}t \leq C$$

où l'on a utilisé l'estimation uniforme $\| \exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\| \leq C$ et $\varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t}\,\mathrm{d}t = 1$. □

Concluons avec cette dernière remarque : on n'a pas besoin dans les preuves que P soit un polynôme (seulement qu'il soit à croissance polynomiale). Les résultats s'appliquent donc à des opérateurs plus généraux : les multiplicateurs de Fourier qui sont définis par la relation

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \qquad \mathcal{F}(P(\nabla)f) = P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})(\mathcal{F}f)$$

ou encore

$$P(\nabla) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{P}\mathcal{F}P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})\mathcal{F}$$

où l'on note $P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})$ l'opération de multiplication (usuelle) par la fonction $P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})$ (qui appelée dans ce cadre le *symbole* de l'opérateur $P(\nabla)$).

Références

[Rud] W. Rudin, Analyse réelle et complexe. (traduit de l'édition anglaise par N. Dhombres and F. Hoffman). Masson, Paris, 1980 (3è édition).

[Roy] J. Royer, notes de cours : Transformée de Fourier. Polycopié accessible sur le lien `https://www.math.univ-toulouse.fr/~jroyer/TD/2020-21-L2PS/Transformee-Fourier.pdf`