Espaces L^p

Vincent Duchêne

19 septembre 2024

1 Définition

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^\star$). [1]

Définition 1.1. *Pour toute fonction mesurable définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ (où $n \in \mathbb{N}^\star$),* [2] *on note pour $p \in [1, +\infty[$,* [3]

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}$$

et

$$\|f\|_\infty := \sup\operatorname{ess} |f| = \inf \big\{ \alpha \geq 0 \ , \ |f| \leq \alpha \text{ presque partout} \big\}$$

avec pour convention $\|f\|_\infty = +\infty$ si l'ensemble ci-dessus est vide.

On définit alors, pour $p \in [1, +\infty]$,

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \big\{ \, f \text{ mesurable} \ , \ \|f\|_p < \infty \, \big\}.$$

Exemple 1.2.
- *Soit $f_\alpha : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mapsto (1 + |\mathbf{x}|)^{-\alpha}$. $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ si $\alpha p > d$.*
- *Soit $g_\alpha : \mathbf{x} \in (-1, 1)^d \mapsto |\mathbf{x}|^{-\alpha}$. $g_\alpha \in \mathcal{L}^p((-1, 1)^d)$ si $\alpha p < d$.*
- *La fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}^d} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$, et $\|\mathbf{1}_{\mathbb{Q}^d}\|_p = 0$.*

Définition 1.3. *Sur l'espace des fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{C}^n$, on considère la relation d'équivalence*

$$f \sim g \quad \iff f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \text{ pour presque tout } \mathbf{x} \in \Omega.$$

On note alors $L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)/\sim$, l'espace vectoriel obtenu en quotientant $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par la relation d'équivalence. Pour tout $[f] \in L^p(\Omega)$, on note $\|[f]\|_p := \|f\|_p$ où f est un représentant de $[f]$.

Remarque 1.4. *La définition de $\|[f]\|_p$ est légitime : le choix du représentant ne modifie pas sa valeur.*

En pratique (et dans la suite), par abus de notation, on identifie un élément $[f] \in L^p(\Omega)$ avec un de ses représentants, $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$.

1. Avec des petites modifications, on peut remplacer dans ce document $\mathbb{R}^d$ par $\mathbb{T}^d$, ou plus généralement par un espace mesuré complet muni d'une mesure positive. Il est intéressant de faire le travail de noter les différences lorsque cet espace est $\mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{N}^d$, muni de la topologie discrète et de la mesure de comptage. On note alors généralement l'espace de Lebesgue associé ℓ^p (ce sont des suites) et non L^p (ce sont des fonctions).

2. On peut bien-sûr remplacer $\mathbb{C}^n$ par $\mathbb{R}^n$. Ici la dimension (finie) de l'espace d'arrivée, n, ne joue aucun rôle, si bien qu'on ne la précisera pas dans la suite : on ne note pas $L^p(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Il peut être intéressant, en particulier pour des applications en analyse fonctionnelle ou aux équations aux dérivées partielles, de considérer un espace d'arrivée de dimension infinie (de Banach), et définir par exemple $L^p(\mathbb{R}^d; L^q(\mathbb{R}^n))$. On fait alors appel aux intégrales de Bochner.

3. Il est entendu ici que l'on considère l'intégration de Lebesgue ; voir Remarque 3.3.

2 Inégalités fondamentales

Proposition 2.1. *Soit f mesurable sur Ω. Pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$, $|f(\mathbf{x})| \leq \|f\|_\infty$.*

Autrement dit, on peut remplacer inf par min dans la définition de $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. Si $\|f\|_\infty = \infty$, alors il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire, montrons d'abord que

$$X_\alpha := \{\mathbf{x} \in \Omega \ , \ |f(\mathbf{x})| > \alpha\}$$

est de mesure nulle dès que $\alpha > \|f\|_\infty$. C'est un ensemble mesurable en tant que réciproque d'un ouvert par une fonction mesurable. De plus, par définition, on a : pour tout $\alpha > \|f\|_\infty$, il existe $\alpha' \leq \alpha$ tel que $X_{\alpha'}$ est de mesure nulle. Puisque $X_{\alpha'} \supset X_\alpha$, on a bien que X_α est de mesure nulle.

Finalement, on vérifie aisément que $X_{\|f\|_\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_{\|f\|_\infty + 2^{-n}}$ est de mesure nulle comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle. □

Théorème 2.2 (Hölder)**.** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Alors pour toutes fonctions mesurables f, g, on a*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Démonstration. Les cas $p = \infty$ et $q = \infty$ sont évidents. Les cas $p, q \in]1, +\infty[$ sont obtenus, après renormalisation, en utilisant l'inégalité de Young (donc la convexité de la fonction exponentielle). □

Remarque 2.3. *Si $p = 2$, alors l'inégalité de Hölder est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Corollaire 2.4. *Soient $N \geq 1$, $p \in [1, +\infty]$, et $p_1, \ldots, p_N \in [1, +\infty]$ tels que $\sum_{i=1}^N p_i^{-1} = p^{-1}$. Alors pour toutes fonctions mesurables f_i (pour $i \in \{1, \ldots, N\}$), on a*

$$\|\prod_{i=1}^N f_i\|_p \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{p_i}.$$

On appelle encore cette propriété l'inégalité de Hölder.

Remarque 2.5. *L'espace vectoriel $L^p(\Omega)$ forme une algèbre (stable par produit) ssi $p = \infty$.*

Corollaire 2.6. *Soient $p < r < q \in [1, +\infty]$. Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, alors $f \in L^r(\Omega)$ et*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}.$$

On appelle cette propriété l'inégalité d'interpolation.

Remarque 2.7. *En général, si $p < q$, on n'a ni $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, ni $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.*

Si Ω est borné et si $p < q$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Comparer ici avec l'inclusion $\ell^p(\mathbb{N}^d) \supset \ell^q(\mathbb{N}^d)$.

$p \mapsto \|f\|_p$ est continue sur $\{p \in [1, +\infty] \ , \ f \in L^p(\Omega)\}$.

Théorème 2.8 (Minkowski)**.** *Soit $p, q \in [1, +\infty]$. Alors pour toutes fonctions mesurables f, g, on a*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Démonstration. On utilise la décomposition $|f + g|^p \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}$ et l'inégalité de Hölder sur les deux termes. □

Les inégalités de Young, Hölder et de Minkowski forment un développement classique, en particulier en lien avec les espaces de fonctions L^p (leçons 201, 208, 229, 234).

Corollaire 2.9. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'application $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur l'espace $L^p(\Omega)$.*

Que *mesure* la norme $\|\cdot\|_p$? Si Ω n'est pas borné, en partie la localisation de la fonction. Dans tous les cas, en partie l'amplitude et la régularité de la fonction. Pour se faire une idée de pourquoi, il peut être intéressant de noter l'homogénéité par rapport aux dilatations : si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $\lambda > 0$, $f_\lambda := f(\lambda \cdot) \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f_\lambda\|_p = \lambda^{-d/p} \|f\|_p$. Consulter la vidéo de “5 minutes Lebesgue” de M. Rodrigues (https://www.lebesgue.fr/fr/node/4579) pour une discussion plus complète.

3 Complétude

Une propriété essentielle des espaces de Lebesgue, qui justifie pleinement son utilisation en pratique, est le fait qu'ils définissent (munis de la topologie des normes associées) des espaces de Banach (espace vectoriel normé complet).

Théorème 3.1 (Riesz-Fischer). *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(\Omega)$ muni de la topologie associée à la norme $\|\cdot\|_p$ est complet.*

Démonstration. On sépare le cas $p = \infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$. Hors d'un ensemble de mesure nulle, la suite des $(f_n(\mathbf{x}))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc converge, et en passant à la limite $m \to \infty$ dans l'inégalité $|f_n(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{x})| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$, on déduit la convergence uniforme.

Lorsque $1 \leq p < \infty$, le schéma de la preuve est identique. On construit d'abord f comme une limite simple presque partout (on peut considérer une sous-suite $(f_{n_i})_i$ telle que $\|f_{n_i} - f_{n_{i-1}}\|_p < 2^{-i}$ et la série $f_{n_0} + \sum_{i\geq 1}(f_{n_i} - f_{n_{i-1}})$ est absolument convergente presque partout, par application de l'inégalité de Minkowski et du lemme de Fatou). Dans un second temps, on montre (par le théorème de convergence dominée) la convergence de f_n vers f dans $L^p(\Omega)$. □

Remarque 3.2. *La preuve démontre que pour toute suite de Cauchy (et donc convergente) dans $L^p(\Omega)$, il existe une sous-suite convergeant vers la fonction limite presque partout. En particulier, si une suite converge vers f dans $L^p(\Omega)$ et vers g presque partout, alors $f \sim g$.*

Remarque 3.3. *Si l'on définit les espaces $L^p(\Omega)$ en utilisant l'intégrale de Riemann et non l'intégrale de Lebesgue (en se restreignant donc aux fonctions continues presque partout), alors l'espace obtenu n'est pas complet. On peut expliciter une suite de Cauchy non convergente (même en évoquant la relation d'équivalence) en construisant progressivement une version "épaissie" de la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}^d}$; voir https://personal.math.ubc.ca/ feldman/m420/incomplete.pdf*

Corollaire 3.4. *L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(f, g)_2 := \int_\Omega f \cdot \bar{g} \,\mathrm{d}\mathbf{x}$ est un espace de Hilbert.*

Il y a évidemment énormément de choses à dire sur l'espace $L^2(\Omega)$, en particulier en relation avec la transformée de Fourier (ou les séries de Fourier si $\Omega = \mathbb{T}^d$).

La complétude est une propriété essentielle, donnant accès à des outils d'analyse fonctionnelle tels que le théorème de Banach-Steinhaus ou le théorème du graphe fermé (ou de l'application ouverte).

Il permet également, par définition, de construire des éléments par des méthodes d'approximations successives, pourvu que ces approximations produisent une suite de Cauchy. C'est par exemple l'essence du théorème de point fixe de Banach et de l'un de ses corollaire, le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Application Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit $K \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $f_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$, il existe un unique $f : t \mapsto f_t \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; L^p(\mathbb{R}^d))$ solution de

$$f(t = 0) = f_0 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \partial_t f = K \star f.$$

Il s'agit d'une application immédiate du théorème de Cauchy-Lipschitz (dans les espaces de Banach) et de l'inégalité de Young pour la convolution.

Donnons-nous en plus $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$. Alors pour tout $M > 0$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $f_0 \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant $\|f_0\|_\infty \leq M$, il existe un unique $f : t \mapsto f_t \in \mathcal{C}^0([-T, T]; L^\infty(\mathbb{R}^d))$ solution de

$$f|_{t=0} = f_0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [-T, T], \quad \partial_t f = K \star f + G(f).$$

On peut pousser légèrement plus loin l'analyse de ces problèmes de Cauchy en démontrant qu'il existe un unique développement maximal (défini sur le plus grand intervalle —qui est ouvert— possible) pour toute donnée initiale, et que l'application $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \mapsto f \in L^\infty([-T, T] \times \mathbb{R}^d)$ est continue (pour les normes naturelles associées aux espaces de départ et d'arrivée), et même de classe $\mathcal{C}^n$ si G est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

4 Densité

On a vu dans la Remarque 3.2 que la propriété convergence dans $L^p(\Omega)$ est plus “forte” que la convergence ponctuelle (presque partout). Sur un domaine borné Ω, on a vu que $L^\infty(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^p(\Omega)$, donc la propriété convergence uniforme est plus “forte” que la convergence dans $L^p(\Omega)$. Cela pose naturellement la question de la densité des fonctions continues à support compactes, dénotées $\mathcal{C}_c(\Omega)$, pour ces différentes topologies.

En effet, $\mathcal{C}_c(\Omega)$ n'est pas dense dans les espaces $L^p(\Omega)$ (comme tous les espaces contenant des fonctions discontinues) pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On a par contre le résultat suivant.

Théorème 4.1. *Pour tout $1 \leq p < \infty$, l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_p$.*

Démonstration. Le résultat découle de l'écriture d'une fonction mesurable bornée en série de fonctions indicatrices, $f = \|f\|_\infty \sum_{j\geq 0} 2^{-j}\mathbf{1}_{A_j}$, qui peuvent être approchées (pour la norme L^p) par des fonctions continues. Cela permet de montrer la densité de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans l'espace des fonctions étagées pour la norme $\|\cdot\|_p$, et la densité de ces dernières dans $L^p(\Omega)$ est une conséquence du théorème de convergence dominée. □

On a en fait, via le même principe de preuve, un résultat un peu plus précis que le précédent, indiquant que “toute fonction est presque continue” :

Théorème 4.2 (Lusin)**.** *Pour une fonction f mesurable à support borné, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que pour tout n, $f_n \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ et $\mu(\{\mathbf{x}\ ,\ f_n(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x})\}) \leq 2^{-n}$.*

Ce Théorème 4.1, avec le résultat de complétude, montre que $L^p(\Omega)$ réalise la complétion de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ pour la métrique $\|\cdot\|_p$, ce qui est très naturel. On aurait pu définir $L^p(\Omega)$ directement de cette manière, encore aurait-il fallu montrer qu'il s'agit bien (d'une classe d'équivalence) d'un espace de fonctions. La complétion de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ pour la métrique $\|\cdot\|_\infty$ est l'espace des fonctions continues s'annulant à l'infini, *cf.* [Rud, §3.16].

Application Voici un exemple d'application concrète (et utile plus tard) du résultat précédent [4]

Proposition 4.3. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. On note, pour $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, $\tau_{\mathbf{y}} f := f(\cdot - \mathbf{y})$. Alors*

$$\lim_{\mathbf{y}\to 0} \|\tau_{\mathbf{y}} f - f\|_p = 0.$$

Démonstration. Par densité, et parce que la norme $\|\cdot\|_p$ est invariante par translation, il suffit de montrer le résultat pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. C'est alors une application directe du théorème de convergence dominée. □

On voit l'intérêt du résultat de densité. Mais pourquoi s'arrêter là ? Montrons que des espaces encore plus petits (pour lesquels on pourra utiliser, entre autres, des intégrations parties) sont denses dans $L^p(\Omega)$ pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_p$.

Théorème 4.4. *Pour tout $1 \leq p < \infty$, l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_p$.*

Démonstration. D'après le résultat précédent, il suffit de montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$ pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_p$. Pour cela, on utilise une technique de régularisation qui vaut la peine d'être développée séparément, à la section suivante. [5] □

4. Une autre conséquence (de sa démonstration) qui est importante du point de vue de l'analyse fonctionnelle est que $L^p(\mathbb{R}^d)$ est séparable, *i.e.* il existe une partie dénombrable dense : les fonctions à valeurs rationnelles sur les $2^{-n}(\mathbf{k} + [0,1]^d)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ et à support compact.

5. Plus précisément, on complète f par 0 en dehors de Ω (notons cette nouvelle fonction f_0), et l'on considère $(\rho_n \star f_0)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(\rho_n)_n$ est une suite régularisante : $\rho_n = n^d\rho(n\cdot)$ où $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est positive et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$.

5 Produit de convolution et régularisation

Dans cette section on pose $\Omega = \mathbb{R}^d$. Cette partie est plus développée dans [Bre, IV.4] que [Rud]. C'est pourtant un bagage important du petit analyste.

On définit le produit de convolution comme suit (lorsque la définition fait sens, *i.e.* quand l'intégrande est bien intégrable)

$$(f \star g) : \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}. \tag{5.1}$$

Rappelons que le produit de convolution est bilinéaire, associatif et commutatif : des propriétés qui se démontrent aisément sur $\mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ puis, par densité et à l'aide de l'inégalité suivante, pour des fonctions dans des espaces de Lebesgue adaptés.

Théorème 5.1 (Young)**.** *Soient p, q, r telles que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{r}$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors* (5.1) *est définie presque partout, $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Démonstration. Si $r=\infty$, il s'agit de l'inégalité de Hölder. Si $r=1$, $p=q=1$ et le résultat est une conséquence des théorèmes de Tonelli et Fubini. Plus généralement, si $p=1$, le cas $q=\infty$ est évident et le cas $1<q<\infty$ se déduit du cas $q=1$ et de l'inégalité de Hölder. Dans le cas $1<p,q,r<\infty$, on utilise un outil supplémentaire : la dualité $(L^r)' = L^{r'}$.[6] □

Cette proposition et sa preuve (au moins lorsque $p=1$) peuvent faire l'objet d'un développement, en particulier pour les leçons 209, 234, 235.

On va s'intéresser principalement à la propriété de *régularisation* du produit de convolution.

Proposition 5.2. *Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$,[7] $\rho \in \mathcal{C}^k_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$. Alors $\rho \star f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\nabla^k(\rho \star f) = (\nabla^k \rho) \star f.$$

Démonstration. Le cas $k=0$ est une application directe de la Proposition 4.3. Pour le cas $k=1$, on utilise l'approximation uniforme

$$|\rho(\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{h}) - \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \mathbf{h}\cdot(\nabla\rho)(\mathbf{x}-\mathbf{y})| = o(|\mathbf{h}|)$$

et le fait que pour tout $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$, $|\mathbf{h}| \leq 1$, le support de $\mathbf{y} \mapsto \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{h}) - \rho(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \mathbf{h}\cdot(\nabla\rho)(\mathbf{x}-\mathbf{y}))$ est inclus dans un compact (contenant les $\mathbf{y}$ tels que $\mathbf{x}-\mathbf{y}+B(\mathbf{0},1)$ est dans le support de ρ). Les cas $k \geq 2$ se déduisent par récurrence. □

Le produit de convolution $\rho \star f$ est donc très régulier si l'*une* des fonctions est régulières. On note aussi que, formellement ou rigoureusement au sens des distributions, $\delta \star f = f$, où δ est la masse de Dirac. On va "approcher la masse de Dirac" par une suite de fonctions régulières à support compact. On note $(\rho_n)_n$ une suite régularisante : $\rho_n = n^d \rho(n\cdot)$ où $\rho \in \mathcal{C}^\infty_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ est positive et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$.

Proposition 5.3. *Si $f \in \mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$, alors $\rho_n \star f \to f$ uniformément lorsque $n \to \infty$.*

Démonstration. On utilise les identités $(\rho_n \star f)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}))\rho_n(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$ (puisque $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n = \int_{\mathbb{R}^d} \rho {=} 1$) et $\int_{\mathbb{R}^d} (f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}))\rho_n(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^d} (f(\mathbf{x}-\frac{\mathbf{y}}{n}) - f(\mathbf{x}))\rho(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$ (par changement de variable), l'uniforme continuité de f et le fait que $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$. □

Corollaire 5.4. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p \in [1,\infty[$, alors $\rho_n \star f \to f$ pour la norme $\|\cdot\|_p$.*

Démonstration. Le résultat suit de la densité de $\mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, du fait que la norme $\|\cdot\|_\infty$ contrôle la norme $\|\cdot\|_p$ sur les compacts, et de l'inégalité de Young. □

Ce résultat permet la démonstration de la densité de $\mathcal{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$, Théorème 4.4.

6. On énonce cette dualité plus loin. On n'utilise de toute manière que le cas $r=1$ dans cette section, et en particulier pour la preuve du Théorème 4.4.

7. $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est l'espace des fonctions *localement p-intégrable* : $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ si pour tout compact $K \subset \Omega$, on a $f\mathbf{1}_K \in L^p(\Omega)$ (où $\mathbf{1}_K$ est la fonction indicatrice de K).

6 Transformation de Fourier

Il serait difficile, rendu à ce point, de ne pas évoquer la transformation de Fourier, en relation avec les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ et le produit de convolution.[8]

En effet, rappelons que pour des fonctions suffisamment régulières, $\widehat{f \star g} = \widehat{f}\widehat{g}$. De plus, si $P(\nabla)$ est un opérateur différentiel à coefficients constants[9], $\widehat{P(\nabla)f}(\mathbf{k}) = P(\mathrm{i}\mathbf{k})\widehat{f}(\mathbf{k})$ (aux facteurs multiplicatifs près liés à la convention de la transformation de Fourier). Ce qui, par la transformation de Fourier inverse, donne une formule pour la solution de l'équation aux dérivées partielles $P(\nabla)f = u$, à savoir $f = K \star u$ où K est définie par $\widehat{K} = P(\mathrm{i}\mathbf{k})^{-1}$. La fonction K est appelée le noyau de Green. On voit ici tout l'intérêt de travailler dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$, et de l'inégalité de Young.

Une propriété remarquable met en lumière la puissance de la théorie de l'interpolation.

Proposition 6.1. *Doit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p \in [1,2]$. Alors $\widehat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et $\|\widehat{f}\|_{p'} \leq C_p \|f\|_p$, où C_p dépend uniquement de p et de la convention de la transformation de Fourier.*

Démonstration. On a immédiatement le résultat pour $p = 1$ ($p' = \infty$), et le cas $p = 2$ ($p' = 2$) est bien-sûr l'égalité de Parseval. Les cas $1 < p < 2$, avec $C_p = C_1^\theta C_2^{1-\theta}$, $1/p = \theta/1 + (1-\theta)/2$, suivent par interpolation (plus précisément le théorème de Riesz-Thorin). □

7 Dualité

Le théorème de représentation de Riesz est à la fois très utile et très profond : il donne un sens aux fonctions à partir d'observations (moyennes pondérées) et en pratique permet, pour montrer qu'une fonction est dans un espace, de la "tester" contre les fonctions de l'espace dual.

Théorème 7.1 (Riesz)**.** *Soit $1 \leq p < \infty$ et T une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$. Il existe un unique $u \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ tel que pour tout $f \in L^p(\Omega)$, $Tf = \int_\Omega u \cdot f$. De plus, $\|T\|_{L^p \to \mathbb{C}} = \|u\|_{p'}$.*

Démonstration. Dans le cas $1 < p < \infty$, le résultat suit du fait que l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif : l'application $J : u \in L^p(\mathbb{R}^d) \mapsto J(u) \in (L^p(\mathbb{R}^d))''$ où $J(u)(T) := Tu$ (qui est injective par le théorème de Hahn-Banach) est surjective (si $p \geq 2$, c'est une conséquence du théorème de Milman-Pettis qui indique que tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif ; si $1 < p < 2$ on applique ce résultat avec p'). Le cas $p = 1$ peut se ramener, péniblement, au cas $p = 2$. Le fait que $T_u : f \in L^p(\Omega) \mapsto \int_\Omega u \cdot f$ vérifie $\|T_u\|_{L^p \to \mathbb{C}} = \|u\|_{p'}$ est une conséquence de l'inégalité de Hölder pour la borne supérieure, et du bon choix de la fonction test pour la borne inférieure. □

En pratique, on fait l'identification entre les formes linéaires et leur représentation fonctionnelle, et on note $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Attention, $L^1(\Omega)$ n'est <u>pas</u> réflexif (et $L^\infty(\Omega)$ non plus) car $(L^\infty(\Omega))' \neq L^1(\Omega)$.[10] L'espace $(L^\infty(\Omega))'$ est strictement plus grand. En effet, le théorème de Hahn-Banach permet de construire $T \in (L^\infty(\Omega))'$ le prolongement de l'application $T_\delta : f \in \mathcal{C}_c(\Omega) \mapsto f(\mathbf{0})$. Bien-sûr, il n'existe pas de représentation dans $L^1(\Omega)$ de la distribution de Dirac.

L'écriture duale des espaces de Lebesgue permet en particulier d'invoquer le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki : toute suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément bornée dans $L^p(\Omega)$ pour un certain $p \in]1,\infty]$ possède une sous-suite $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ faiblement convergente :

$$\forall g \in L^{p'}(\Omega), \quad \lim_{i\to\infty} \int_\Omega (f_{n_i} - f) \cdot g = 0.$$

Il existe d'autres critères de compacité (forte) spécifiques aux espaces L^p ; voir [Bre, IV.5].

8. On peut remarquer par exemple que le noyau de Fejér, élément central des séries de Fourier, est une suite régularisante dans $L^1((\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^d)$.

9. par exemple $\nabla = (\partial_{x_i})_{i=1,\ldots,d}$, $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_i^2$, mais aussi pourquoi pas $(1+\Delta)^{1/2}$ qui peut être défini par exemple à l'aide de la formule donnée

10. On voit ici encore que les cas "limites" $p \in \{1,\infty\}$ sont à considérer avec précaution. Les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 < p < \infty$ (et encore plus pour $p = 2$) se comportent à merveille.

8 Espaces de Sobolev

On a vu dans l'application de la Section 2 une limitation importante des espaces de Lebesgue : seul $L^\infty(\Omega)$ fournit une algèbre de Banach. On s'attend à ce qu'il soit possible de construire des espaces de fonctions plus régulières (qui s'injectent dans $L^\infty(\Omega)$) et qui soient des algèbres de Banach, complétant ainsi les espaces de Lebesgue.

Définition 8.1. *Soit $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$. On note*

$$W^{k,p}(\Omega) := \big\{ f \in L^p(\Omega) \text{ tels que } \forall j \in \{0, \dots, k\},\ \nabla^j f \in L^p(\Omega) \big\},$$

que l'on munit de la topologie associée à la norme

$$\|f\|_{W^{k,p}} := \sum_{j=0}^{k} \|\nabla^j f\|_p.$$

Dans cette définition, ∇^j est l'opérateur de différentiation (au sens faible) itéré j fois selon toutes les directions possibles. $\nabla^j f$ est donc à valeurs dans un espace de dimension $j \times d \times n$. La distance utilisée dans cet espace ne joue aucun rôle, de même que la distance utilisée pour mesurer $\|f\|_{W^{k,p}} := \big| (\|f\|_p, \|\nabla f\|_p, \dots, \|\nabla^k f\|_p) \big|$.

On a évidemment $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. On vérifie aisément que $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

On a la propriété de dilatation suivante : si $f \in W^{k,p}(\Omega)$ et $\lambda > 0$, $f_\lambda := f(\lambda \cdot) \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$, $\|\nabla^j f_\lambda\|_p = \lambda^{j-d/p} \|f\|_p$. Consulter la vidéo de "5 minutes Lebesgue" de M. Rodrigues (https://www.lebesgue.fr/fr/node/4579) pour une discussion plus complète.

Proposition 8.2 (injection)**.** *Soient $k, l \in \mathbb{N}$ et $p, q \in [1, +\infty]$ tels que on a (i) $k \geq l$ et $k - \frac{d}{p} > l - \frac{d}{q}$, ou (ii) $k \geq l$, $k - \frac{d}{p} = l - \frac{d}{q}$ et $(l, q) \notin \mathbb{N} \times \{\infty\}$. Alors $W^{k,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $W^{l,q}(\Omega)$.*

Cette injection peut être précisée sous la forme d'une inégalité d'interpolation (dite "inégalité de Gagliardo-Nirenberg") :

$$\|\nabla^l u\|_q \leq C_{k,l,p,q} \|u\|_p^\theta \|\nabla^k u\|_p^{1-\theta}, \qquad \frac{1}{q} - \frac{l}{d} = \theta \frac{1}{p} + (1-\theta)(\frac{1}{p} - \frac{k}{d}).$$

Cette inégalité s'étend au cas où les indices des deux termes à droite de l'inégalité sont distincts.

Proposition 8.3 (produit)**.** *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$. Alors $W^{k,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est une algèbre de Banach (stable par produit) et*

$$\|uv\|_{W^{k,p}} \leq C_{k,p} \left(\|u\|_{W^{k,p}} \|v\|_\infty + \|u\|_\infty \|v\|_{W^{k,p}} \right)$$

En particulier, $W^{k,p}(\Omega)$ est une algèbre de Banach si $k - \frac{d}{p} > 0$.

Pour traiter des problèmes complètement non-linéaires, on peut avoir à considérer des fonctions de la forme $F \circ u$ où F est donnée et régulière.

Proposition 8.4 (composition)**.** *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$. Soit $F \in \mathcal{C}^{k*}(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$ telle que $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (où $k* = \max(\{1, k\})$). Alors pour tout $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $F \circ u \in W^{k,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$,*

$$\|\nabla^j (F \circ u)\|_p \leq C_{j,p} \|F\|_{W^{j*,\infty}(B_u)} (1 + \|u\|_\infty^{j*-1}) \|\nabla^{j*} u\|_p, \qquad B_u := \overline{B(\mathbf{0}, \|u\|_\infty)}.$$

Toutes ces propositions sont relativement simples à démontrer. On utilise principalement la formule de Leibniz et l'inégalité de Hölder.

On peut également donner un sens et démontrer ces propriétés pour les espaces de Sobolev de régularité $k \in \mathbb{R}$.

Références

[Bre] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, 1983.

[Rud] W. Rudin, Analyse réelle et complexe. (traduit de l'édition anglaise par N. Dhombres and F. Hoffman). Masson, Paris, 1980 (3è édition).

[Roy] J. Royer, notes de cours : Espaces de Lebesgue. Polycopié accessible sur https://www.math.univ-toulouse.fr/ jroyer/Polys/Espaces-Lebesgue.pdf