Notes Complément Agreg : Analyse complexe

Nicolas Moench

Automne 2022

.
Attention ! Peut contenir des coquilles.

1 Cours

1.1 Dérivée complexe et fonctions holomorphes.

Définition 1.1. Une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ est dite $\mathbf{C}-$derivable en $z_0 \in U$ si la limite suivante existe

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

La fonction f' est la dérivée complexe de f.

Définition 1.2. Une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ est dite holomorphe si elle est $\mathbf{C}-$dérivable en tout point de son domaine et que sa dérivée est continue.

Remarque 1.3. Il existe approche pour la définition de l'holomorphie : Continuité de la dérivée ou juste $\mathbf{C}$-différentiabilité.

Exemple 1.4. Polynômes, exponentielle. Contre exemple : $z \mapsto \overline{z}$

Remarque 1.5. Les règles de dérivations habituelles restent vraies (sommes, produit, inverse, composition...)

Proposition 1.6. *Soit f de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbf{C}$, il y a équivalence entre*

1. *La fonction f est holomorphe*
2. *La limite $\lim_{t\to 0} f(z + te^{i\theta})/(te^{i\theta})$ ne dépende pas de θ.*
3. *En écrivant $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées*
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
4. *la différentielle de f est une similitude directe (conserve les angles algébriques).*

1.2 Fonctions analytiques

Définition 1.7. (Fonction analytique) Une fonction f est analytique si en tout point z de l'ouvert il existe un disque sur lequel f est égale à une série entière.

Proposition 1.8. *La somme d'une série entière est holomorphe sur l'intérieur de son disque de convergence.*

Proof. Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une serie entière de rayon de convergence $R > 0$, montrons que sa dérivée complexe est $g(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$. Pour $z \in D(0, R)$ et $h \in \mathbf{C}$ petit on a

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) &= \sum_{n\geq 1} a_n \left[\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right] \\ &= \sum_{n\geq 1} a_n v_n(h),\end{aligned}$$

avec $v_n(h) = \sum_{k=0}^{n-1}(z+h)^{n-1-k} z^k - nz^{n-1}$. Or pour $r \in]|z_0|, R[$ et $|h| \leq r - |z_0|$ on a

$$|a_n v_n(h)| \leq n a_n r^{n-1}$$

qui est sommable et ne dépend pas de h, de plus $v_n(h) \to_{h\to 0} 0$. Donc f est $\mathbf{C}$-derivable en z et sa derivée complexe est $g(z)$.

□

1.3 Intégration sur les chemins et formule de Cauchy.

Définition 1.9. Pour $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ de classe C^1 par morceaux, on définit

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

Remarque 1.10. C'est invariant par reparametrisation (théorème du changement de variable).

Remarque 1.11.

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq L(\gamma) \sup |f|$$

Attention ne pas écrire $\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\mathrm{d}z$.

Théorème 1.12. *(Formule de Cauchy) Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un disque $D(z_0, r)$, alors pour tout $z \in D(z_0, r)$ on a*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Lemme 1.13. *Soit h une fonction holomorphe sur un ouvert U et $\Gamma : [0,1]^2 \to U$ de classe C^2 et telle que pour $s \in [0,1]$ $\gamma_s : t \mapsto \Gamma(s,t)$ soit un lacet. Alors $I(s) := \int_{\gamma_s} h(z)dz$ est constante.*

Proof. (Lemme) On a par définition

$$I(s) = \int_0^1 h\big(\Gamma(s,t)\big)\partial_t\Gamma(s,t)\mathrm{d}t$$

On applique le théorème de dérivation sous l'intégrale (h est C^1 et Γ est C^2 sur le compact $\Gamma([0,1]^2)$) pour obtenir

$$\begin{aligned}\partial_s I(s) &= \int_0^1 h'\big(\Gamma(s,t)\big)\partial_s\Gamma(s,t)\partial_t\Gamma(s,t) + h(\Gamma)\partial_t\partial_s\Gamma(s,t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \partial_t\Big(h\big(\Gamma(s,t)\big)\partial_s\Gamma(s,t)\Big)\mathrm{d}t \\ &= \big[h(\gamma_s(0)) - h(\gamma_s(1))\big]\partial_s\Gamma(s,0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Proof. (Théorème) Soit $\varepsilon > 0$ et les deux chemins $\gamma_1(t) = z + \varepsilon e^{2i\pi t}$ et $\gamma_0(t) = z_0 + re^{2i\pi t}$. On pose $\Gamma(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$ et on applique le lemme avec la fonction $w \mapsto f(w)/(w-z)$ qui est holomorphe sur l'ouvert $U\backslash\{z\}$. Ainsi

$$\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w.$$

Or

$$\left| f(z) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w \right| = \left| \int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\mathrm{d}w \right| \leq \varepsilon \sup_{D(z,\varepsilon)} |f'|.$$

D'où le résultat en faisant tendre ε vers 0. □

Corollaire 1.14. *(Égalité de la moyenne) Toute fonction holomorphe f vérifie l'égalité de la moyenne :*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt.$$

Théorème 1.15. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U et $z_0 \in U$. Alors pour $R = d(z_0, U^c)$, la fonction f est développable en série entière sur le disque $D(z_0, R)$.*

Proof. Pour $z \in D(z_0,R)$ et $r \in \big]|z - z_0|, R\big[$, d'après la formule de Cauchy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{z_0+re^{it}-z}re^{it}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it}}{1-(z-z_0)/(re^{it})}re^{it}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\sum_{n\geq 0}(z-z_0)^n r^{-n}e^{-int}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n\geq 0}(z-z_0)^n r^{-n} e^{-int}$ converge normalement sur $[0,2\pi]$ donc

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

avec $a_n = \frac{r^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})e^{-int}$. □

Remarque 1.16. On obtient la formule

$$f^{(n)}(z) = \frac{r^{-n}}{2i\pi}\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\mathrm{d}w$$

Corollaire 1.17. *Holomorphie et analycité sont équivalentes.*

Corollaire 1.18. *Une fonction holomorphe est de classe C^∞ et sont infiniment* **C***-derivable.*

Théorème 1.19. *(Critère de Morera) Soit f une fonction continue sur un ouvert de* **C***, il y a équivalence entre*

1. *La fonction f est holomorphe.*
2. *Pour tout triangle T inclus dans U, on a $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.*

Proof. **1**) ⇒ **2**) On applique le lemme 14 à $\Gamma(s,t) = sz_0 + (1-s)\gamma(t)$ où z_0 est un point du triangle et γ parcourt le bord du triangle.

2) ⇒ **1**) Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $D(z_0,r) \subset U$, on pose

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w)\mathrm{d}w,$$

où $\int_z^{z'}$ est l'intégrale sur le chemin liant z à z'. En utilisant l'hypothèse, on a pour $z, z' \in D(z_0, r)$

$$\frac{F(z)-F(z')}{z-z'} - f(z) = \frac{1}{z-z'}\Big(\int_{z'}^{z} f(w)\mathrm{d}w - f(z)(z-z')\Big)$$
$$= \frac{1}{z-z'}\int_{z'}^{z}(f(w)-f(z))\mathrm{d}w.$$

Alors par continuité de f en z, on obtient

$$\left|\frac{F(z)-F(z')}{z-z'} - f(z)\right| \xrightarrow[z'\to z]{} 0.$$

Donc F est $\mathbf{C}-$ dérivable de dérivée f, et donc f est holomorphe comme dérivée d'une fonction holomorphe. □

1.4 Estimées de Cauchy et conséquences.

Proposition 1.20. *(Estimées de Cauchy) Soit K un compact et K_r l'ensemble des points a distance au plus r de K.*

$$\sup_K |f^{(n)}| \leq \frac{n!}{r^n}\sup_{K_r}|f|.$$

Proof. Pour $z_0 \in K$ on peut écrire

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})e^{-int}.$$

□

Théorème 1.21. *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction f. Alors f est holomorphe et de plus pour tout k, la suite de fonction $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur les compacts vers $f^{(k)}$.*

Proof. Tout triangle T est compact par limite uniforme on a

$$\int_{\partial T} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\int_{\partial T} f_n(z)\mathrm{d}z = 0.$$

D'où l'holomorphie de f.

Pour tout compact K il existe $r>0$ tel que $K_r \subset U$. Alors pour $k \in \mathbf{N}$ la convergence uniforme sur K de $f_n^{(k)}$ vers $f^{(k)}$ découle des estimées de Cauchy. □

Exemple 1.22. L'application $\zeta : s \mapsto \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ définit une fonction holomorphe sur $\{z\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\ z>1\}$.

Théorème 1.23. *(Holomorphie sous l'intégrale) Soit E une espace mesuré, U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : E\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ vérifiant*

- *Pour tout $z\in U$, la fonction $f(\cdot,z) : E\to\mathbf{C}$ est mesurable.*
- *Pour presque tout $x\in E$, la fonction $f(x,\cdot) : U\to\mathbf{C}$ est holomorphe.*
- *Il existe une fonction φ intégrable sur E telle que pour tout $z\in U$ on ait la domination $|f(x,z)|\leq\varphi(x)$ presque partout.*

Alors la fonction $F(z) := \int_E f(x,z)d\mu(x)$ est holomorphe sur U et de plus $F'(z) = \int_E \partial_z f(x,z)d\mu(x)$.

Remarque 1.24. Il suffit de montrer la domination localement (par rapport à la variable complexe z).

Proof. On va utiliser le théorème de Morera : La fonction F est continue en conséquence du théorème de continuité sous l'intégrale. Soit T un triangle dans U de bord paramétré par $\gamma : [0,1]\to\partial T$, on peut appliquer le théorème de Fubini car

$$\int_0^1\int_E \big|f(x,z)\gamma'(t)\big|\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}t \leq \int_0^1\int_E \varphi(x)\sup_{[0,1]}|\gamma'|\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}t < +\infty.$$

D'où

$$\int_\gamma F(z)\mathrm{d}z = \int_E\Big(\int_\gamma f(x,z)\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}\mu(x) = 0,$$

et l'holomorphie de F.

L'expression de la dérivée découle du théorème de dérivation sous l'intégrale. En effet les estimées de Cauchy implique que l'on dispose localement d'une domination pour $\frac{\partial f}{\partial z}$ □

Exemple 1.25. L'application $\Gamma : z\mapsto\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ définit une fonction holomorphe sur $\{z\in\mathbf{C},\ \mathrm{Re}\ z>0\}$.

1.5 Zéros isolés

Théorème 1.26. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbf{C}$ et $z_0\in U$.*

1. *Si pour tout $n\in\mathbf{N}$ on a $f^{(n)}(z_0)=0$ alors f est identiquement nulle sur U.*
2. *Sinon il existe un unique entier k tel que l'on puisse écrire pour $z\in U$*

$$f(z) = (z-z_0)^k g(z)$$

où g est une fonction holomorphe ne s'annulant pas en z_0. L'entier k est appelé ordre de f en z_0.

Proof. Soit $Z = \{z \in U, \quad \forall n \geq 0, \quad f^{(n)}(z) = 0\}$, il s'agit d'un fermé comme intersection de fermés. On va montrer que c'est également un ouvert :

Soit $z_0 \in Z$, on sait que f est développable en série entière sur un disque autour de z_0, or les coefficients de cette série sont tous nuls est donc f est identiquement nulle sur un voisinage de z_0. Donc Z est ouvert.

Si maintenant Z est non vide, alors $Z = U$ par connexité de U. D'où le premier point.

Si $z_0 \notin Z$ alors il existe un $k \in \mathbf{N}$ minimal tel que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Posons alors $g(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}$, il s'agit d'une fonction holomorphe sur $U \backslash \{z_0\}$, montrons qu'elle l'est au voisinage de z_0.

On sait que f est développable en série entière sur un disque $D(z_0, r)$, de plus pour $j < k$ on a $f^{(j)}(z_0) = 0$ par minimalité de k donc son développement est de la forme

$$f(z) = \sum_{j \geq k} a_j (z - z_0)^j$$

Alors $g(z) = \sum_{j \geq 0} a_{j+k}(z - z_0)^j$ et donc g est holomorphe sur $D(z_0, r)$. □

Corollaire 1.27. *(Prolongement analytique) Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U et telle que f s'annule sur une partie A admettant un point d'accumulation dans U. Alors f est identiquement nulle sur U entier.*

Remarque 1.28. Attention le point d'accumulation doit être dans le domaine de définition : $e^{1/z}$ en zéro.

Proof. Supposons f non identiquement nulle et soit z_0 un zéro de f, d'après le résultat précèdent il existe $k \in \mathbf{N}$ et une fonction holomorphe g non nulle en z_0 telle que

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

Or g ne s'annule pas sur un voisinage de z_0, et z_0 est le seul zéros de f sur ce voisinage. □

Corollaire 1.29. *Une fonction holomorphe admet (sur un ouvert donné) au plus un prolongement analytique.*

Exemple 1.30. Prolongement analytique de fonctions spéciales

1. Fonction Γ sur $\mathbf{C} \backslash \mathbf{Z}^-$
2. Fonction ζ de Riemann sur $\mathbf{C} \backslash \{-1\}$.

1.6 Principe du maximum

Théorème 1.31. *(Principe du maximum.) Soit U un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur U, si $|f|$ atteint son maximum en un point de U, alors f est constante.*

Proof. Soit $z_0 \in U$ tel que $|f|$ y atteigne son maximum. Pour $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$, d'après l'égalité de la moyenne

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \mathrm{d}t$$

Alors

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| \mathrm{d}t$$

Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, donc $|f|$ est maximal sur $\partial D(z_0, r)$ et donc sur $D(z_0, r)$. Alors pour tout point z de $D(z_0, r)$ on a $f'(z) = 0$ car $\{z, |z| = |f(z_0)|\}$ est d'intérieur vide et donc f ne peut y être ouverte (TIL). Alors $f - f(z_0)$ est holomorphe sur U ouvert connexe et admet z_0 comme point d'accumulation de ses zéros, elle est donc nulle. f est constante. □

Corollaire 1.32. *(D'alembert Gauss) Tout polynôme de $\mathbf{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbf{C}$.*

Proof. Soit P un polynôme ne s'annulant pas sur $\mathbf{C}$. Alors $1/P$ est une fonction entière qui atteint son maximum. Elle est donc constante □

Corollaire 1.33. *Soit U un ouvert connexe borné et $f \in C^0(\overline{U}) \cap \mathcal{H}(U)$, alors pour tout $z \in U$ on a*

$$|f(z)| \leq \sup_{x \in \partial U} |f(x)|$$

Proof. Si f atteint son maximum dans U alors elle est constante et son maximum est atteint au bord. □

Corollaire 1.34. *(Lemme de Schwarz) Si $f : D(0,1) \to D(0,1)$ est holomorphe alors pour tout $z \in D(0,1)$,*

$$|f(z)| \leq |z|$$

Si il y a égalité pour un z non nul, alors f est de la forme $f(z) = \lambda z$, avec $|\lambda| = 1$.

Corollaire 1.35. *(Automorphismes du disque unité) Exo : On a*

$$Aut\big(D(0,1)\big) = \left\{z \mapsto \lambda \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}, \ |a| < 1, |\lambda| = 1\right\}$$

1.7 Autres conséquences de la formule de Cauchy.

Théorème 1.36. *(Goursat) Une fonction $\mathbf{C}$ derivable sur un ouvert U y est holomorphe.*

Proof. Il s'agit d'utiliser Morera □

Proposition 1.37. *(Inversion locale) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U et $z_0 \in U$. Si $f'(z_0) \neq 0$ alors il existe un voisinage de z_0 sur lequel f est un C^1 diffeomorphisme, et sa réciproque est holomorphe également.*

Proof. La différentielle de f^{-1} est $\mathrm{d}f^{-1}$ et est donc une similitude. $\square$

Théorème 1.38. *Une fonction holomorphe non constante est ouverte.*

Proof. Voir section sur les logarithmes $\square$

Proposition 1.39. *(Théorème de Liouville) Toute fonction entière et bornée est constante.*

Proof. Supposons que f soit entière et bornée par une constante M. D'après la formule de Cauchy pour $z \in \mathbf{C}$ et $R > 0$ on a

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z,R)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} \mathrm{d}w$$

Et donc $|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$, d'où le résultat en faisant tendre R vers l'infini. $\square$

Remarque 1.40. Exo : Si f entière est majorée par un polynôme, alors c'est un polynôme.

1.8 Primitives complexes

Définition 1.41. Une primitive pour une fonction holomorphe f est une fonction holomorphe F telle que $F' = f$.

Proposition 1.42. *Toute fonction holomorphe admet localement une primitive.*

Proof. Soit z_0 dans le domaine de définition de f. On peut écrire $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ pour z dans un disque $D(z_0, r)$. Alors $F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ y est une primitive. $\square$

Proposition 1.43. *Si f admet une primitive F, alors pour tout chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$ on a*

$$\int_\gamma f(z)dz = F\big(\gamma(1)\big) - F\big(\gamma(0)\big)$$

Proof. On peut écrire

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\gamma(t))\mathrm{d}t$$

$\square$

Remarque 1.44. $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbf{C}^*$. En effet

$$\int_{\partial D(0,1)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2i\pi \neq 0$$

Définition 1.45. (Homotopie) Deux lacets γ_0, γ_1 de classe C^1_{pm} sont dits homotopes si il existe une fonction $\Gamma : [0,1]^2 \to \mathbf{C}$ continue telle que $\Gamma(0,\cdot) = \gamma_0$ et $\Gamma(1,\cdot) = \gamma_1$ et telle que pour tout $s \in [0,1]$ l'application $\gamma_s := \Gamma(s,\cdot)$ soit un lacet de classe C^1_{pm}

Proposition 1.46. *Si γ_0 et γ_1 sont homotopes via une homotopie Γ et si f est holomorphe au voisinage de $\Gamma([0,1]^2)$, alors*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Proof. On montre que $s \mapsto \int_{\gamma_s} f(z)\mathrm{d}z$ est une application localement constante.

Soit $s \in [0,1]$, il existe des disques $D_0, \dots D_k$ et $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ tels que pour $1 \leq k \leq n-1$

$$z_k := \gamma_s(t_k) \in D_k \cap D_{k+1}$$

et

$$\gamma_s([0,1]) \subset \bigcup_{k=1}^n D_k \subset U,$$

où U est le domaine d'holomorphie de f. Il existe $\eta > 0$ tel que pour $|u-s| < \eta$ on ait encore

$$w_k := \gamma_u(t_k) \in D_k \cap D_{k+1}$$

et

$$\gamma_u([0,1]) \subset \bigcup_{k=1}^n D_k \subset U$$

Sur chaque disque D_k, la fonction f admet une primitive F_k, de plus il existe des constante c_k telles que $F_{k+1} - F_k = c_k$ sur $D_k \cap D_{k+1}$

Alors

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_s} f(z)\mathrm{d}z &= \sum_{k=0}^{n-1} F_k(z_{k+1}) - F_k(z_k) \\ &= F_n(z_n) - F_0(z_0) + \sum_{k=1}^{n} F_{k-1}(z_k) - F_k(z_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k\end{aligned}$$

De même

$$\int_{\gamma_u} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n-1} F_k(w_{k+1}) - F_k(w_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} c_k$$

D'où le résultat □

Définition 1.47. Un ouvert connexe U de $\mathbf{C}$ est dit simplement connexe si tout lacet γ est homotope à un lacet constant

Remarque 1.48. Et alors $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ pour tout lacet.

Proposition 1.49. *Une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe y admet une primitive.*

Proof. On pose $F(z) = \int_\gamma f(w)\mathrm{d}w$ où γ est un chemin liant z_0 à z. La fonction F est bien définie car si γ' est un autre chemin alors

$$\gamma''(t) = (\gamma * \gamma'^{-1})(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ \gamma'(2-2t) & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

est un lacet. Alors par simple connexité

$$\int_{\gamma''} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\{z_0\}} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

c'est à dire $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma''} f(z)\mathrm{d}z$.

Maintenant pour z, z', par simple connexité on peut écrire

$$\frac{F(z) - F(z')}{z - z'} = \frac{1}{z - z'} \int_z^{z'} f(w)\mathrm{d}w = \int_0^1 f(z + t(z' - z))\mathrm{d}t \xrightarrow[z' \to z]{} f(z)$$

Donc F est $\mathbf{C}$ derivable de dérivée f. □

1.9 Logarithmes

Définition 1.50. (Détermination du logarithme.) Une fonction holomorphe l est une détermination du logarithme si pour tout z on a $e^{l(z)} = z$. Pour une fonction holomorphe f, une détermination du logarithme est une fonction holomorphe p qui vérifie $e^{p(z)} = f(z)$.

Remarque 1.51. Cela existe toujours localement (inversion locale). Mais pas nécessairement globalement ex : $\mathbf{C}^*$

Proposition 1.52. *Une fonction holomorphe l sur un ouvert connexe est un logarithme si et seulement si $l'(z) = 1/z$ et si $e^{l(z_0)} = z_0$ en un point z_0.*

Proof. Soit $\varphi(z) = ze^{-l(z)}$, on a

$$\varphi'(z) = \big(1 - zl'(z)\big)e^{-l(z)} = 0$$

De plus $\varphi(z_0) = 1$, donc $\varphi = 1$. □

Proposition 1.53. *Sur tout ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}^*$, il existe une détermination du logarithme, unique à un élément de $2i\pi\mathbf{Z}$ près.*

Définition 1.54. La détermination principale du logarithme est la primitive de $1/z$ sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$ telle que $l(1) = 0$. Elle est égale à $l(z) = \log(|z|) + i\theta$ (dessin)

Proposition 1.55. *Toute fonction holomorphe $f : U \to \mathbf{C}^*$ avec U un ouvert simplement connexe admet un logarithme.*

Proof. On prend une primitive de f'/f. □

Proposition 1.56. *Soit f une fonction holomorphe définie sur un ouvert simplement connexe et ne s'y annulant pas, alors pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ il existe une fonction holomorphe h telle que $f(z) = h(z)^k$*

Proof. On prend $h(z) = e^{p(z)/k}$, où p est un logarithme de f □

Proposition 1.57. *Soit f une fonction holomorphe et z_0 un zéro d'ordre k de f. Il existe φ un biholomorphisme local autour de z_0 tel que*

$$f(z) = \varphi(z)^k$$

Proof. On sait qu'il existe une fonction g holomorphe non nulle en z_0 telle que

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

Soit h une racine $k-$ième de g, de sorte que $f(z) = \varphi(z)^k$ avec $\varphi(z) = (z - z_0)h(z)$. De plus $\varphi'(z_0) = h(z_0) \neq 0$, il s'agit donc d'un biholomorphisme local. □

Remarque 1.58. On en déduit qu'une fonction holomorphe non constante est ouverte

1.10 Fonctions meromorphes et singularités.

Définition 1.59. (Singularité) Un point $z_0 \in \mathbf{C}$ est une singularité pour une fonction holomorphe f si il existe un voisinage ouvert U de z_0 tel que f soit holomorphe sur $U\backslash\{z_0\}$

Théorème 1.60. *(Théorème de prolongement de Riemann) Soit f une fonction holomorphe et z_0 une singularité de f. Si f est bornée sur un voisinage épointé de z_0, alors f se prolonge par continuité en z_0 et le prolongement est holomorphe. On dit alors que la singularité est effaçable.*

Proof. Soit $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$, il s'agit d'une fonction holomorphe sur un voisinage épointé de z_0 qui se prolonge par continuité en z_0 puisque f est bornée au voisinage de ce point.

De plus g est $\mathbf{C}$-derivable en z_0 et $g'(z_0) = 0$. Alors g est développable en série entière autour de z_0 et

$$g(z) = \sum_{n\geq 2} a_n (z - z_0)^n$$

Alors $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n+2}(z - z_0)^n$ et donc f se prolonge en une fonction holomorphe. □

Exemple 1.61. La fonction $z \mapsto \sin(z)/z$ en zero.

Définition 1.62. (pôle) Un pôle pour une fonction holomorphe f est une singularité a non effaçable et telle que pour un entier n positif la fonction $(z - a)^n f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe en a.

Remarque 1.63. Une singularité qui n'est ni un pôle ni effaçable est dite essentielle.

Définition 1.64. Une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbf{C}$ est dite meromorphe si toute ses singularités sont des pôles.

Remarque 1.65. L'ensemble des fonctions meromorphes est un corps.

Théorème 1.66. *(Séries de Laurent) Soient $0 \leq r < R$ et f une fonction holomorphe sur la couronne $C(r, R) := \{z \in \mathbf{C},\ r < |z| < R\}$. Alors il existe des complexes $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ tels que $\left(\sum_{-N}^{N} a_n z^n\right)_N$ converge uniformément sur les compacts et*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$$

avec pour tout $n \in \mathbf{Z}$

$$a_n = \int_{\partial D(0,r')} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

où $r' \in (r, R)$.

Proof. Soient $r < r_1 < r_2 < R$ d'après la formule de Cauchy pour $z \in C(r_1, r_2)$

$$f(z) = \int_{\partial D(0,r_2)} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w - \int_{\partial D(0,r_1)} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w$$

On a alors une décomposition $f(z) = g(z) + h(1/z)$ avec g holomorphe sur $D(0, r_2)$ et h holomorphe sur $D(0, 1/r_1)$ avec $h(0)$.

De plus une telle décomposition est unique car si $g_1(z) + h_1(1/z) = g_2(z) + h_2(1/z)$, alors $j(z) = g_1(z) - g_2(z) = h_2(1/z) - h_1(1/z)$ définit une fonction entière nulle en l'infini donc nulle par le théorème de Liouville.

Les fonctions g et h sont développable en série entières dans leur domaine de définition et leurs séries convergent uniformément sur les compacts d'où le résultat. □

Définition 1.67. (Indice d'un lacet) Soit γ un lacet de $\mathbf{C}$ et a un point hors de l'image de γ, alors l'indice de γ autour de a est l'entier

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a}$$

Remarque 1.68. Interprétation géométrique : C'est le nombre entier (relatif) de tour que fait γ autour de a (dans le sens direct).

Théorème 1.69. *(Théorème des résidus) Soit f une fonction meromorphe et A l'ensemble de ses singularités, alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{a\in A} Ind(\gamma, a) Res(f, a).$$