

Notes Complément Agreg : Analyse complexe

Nicolas Moench

Automne 2022

Attention ! Peut contenir des coquilles.

1 Cours

1.1 Dérivée complexe et fonctions holomorphes.

Définition 1.1. Une fonction définie sur un ouvert U de \mathbf{C} est dite \mathbf{C} -dérivable en $z_0 \in U$ si la limite suivante existe

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

La fonction f' est la dérivée complexe de f .

Définition 1.2. Une fonction définie sur un ouvert U de \mathbf{C} est dite holomorphe si elle est \mathbf{C} -dérivable en tout point de son domaine et que sa dérivée est continue.

Remarque 1.3. Il existe approche pour la définition de l'holomorphie : Continuité de la dérivée ou juste \mathbf{C} -différentiabilité.

Exemple 1.4. Polynômes, exponentielle. Contre exemple : $z \mapsto \bar{z}$

Remarque 1.5. Les règles de dérivations habituelles restent vraies (sommes, produit, inverse, composition...)

Proposition 1.6. Soit f de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbf{C} , il y a équivalence entre

1. La fonction f est holomorphe
2. La limite $\lim_{t \rightarrow 0} f(z + te^{i\theta}) / (te^{i\theta})$ ne dépend pas de θ .
3. En écrivant $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

4. la différentielle de f est une similitude directe (conserve les angles algébriques).

1.2 Fonctions analytiques

Définition 1.7. (Fonction analytique) Une fonction f est analytique si en tout point z de l'ouvert il existe un disque sur lequel f est égale à une série entière.

Proposition 1.8. La somme d'une série entière est holomorphe sur l'intérieur de son disque de convergence.

Proof. Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, montrons que sa dérivée complexe est $g(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$. Pour $z \in D(0, R)$ et $h \in \mathbf{C}$ petit on a

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) &= \sum_{n \geq 1} a_n \left[\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right] \\ &= \sum_{n \geq 1} a_n v_n(h), \end{aligned}$$

avec $v_n(h) = \sum_{k=0}^{n-1} (z+h)^{n-1-k} z^k - n z^{n-1}$. Or pour $r \in]|z_0|, R[$ et $|h| \leq r - |z_0|$ on a

$$|a_n v_n(h)| \leq n a_n r^{n-1}$$

qui est sommable et ne dépend pas de h , de plus $v_n(h) \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$. Donc f est \mathbf{C} -dérivable en z et sa dérivée complexe est $g(z)$. \square

1.3 Intégration sur les chemins et formule de Cauchy.

Définition 1.9. Pour $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ de classe C^1 par morceaux, on définit

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Remarque 1.10. C'est invariant par reparamétrisation (théorème du changement de variable).

Remarque 1.11.

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \sup |f|$$

Attention ne pas écrire $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| dz$.

Théorème 1.12. (Formule de Cauchy) Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un disque $D(z_0, r)$, alors pour tout $z \in D(z_0, r)$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Lemme 1.13. Soit h une fonction holomorphe sur un ouvert U et $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow U$ de classe C^2 et telle que pour $s \in [0, 1]$ $\gamma_s : t \mapsto \Gamma(s, t)$ soit un lacet. Alors $I(s) := \int_{\gamma_s} h(z) dz$ est constante.

Proof. (Lemme) On a par définition

$$I(s) = \int_0^1 h(\Gamma(s, t)) \partial_t \Gamma(s, t) dt$$

On applique le théorème de dérivation sous l'intégrale (h est C^1 et Γ est C^2 sur le compact $\Gamma([0, 1]^2)$) pour obtenir

$$\begin{aligned} \partial_s I(s) &= \int_0^1 h'(\Gamma(s, t)) \partial_s \Gamma(s, t) \partial_t \Gamma(s, t) + h(\Gamma) \partial_t \partial_s \Gamma(s, t) dt \\ &= \int_0^1 \partial_t (h(\Gamma(s, t)) \partial_s \Gamma(s, t)) dt \\ &= [h(\gamma_s(0)) - h(\gamma_s(1))] \partial_s \Gamma(s, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Proof. (Théorème) Soit $\varepsilon > 0$ et les deux chemins $\gamma_1(t) = z + \varepsilon e^{2i\pi t}$ et $\gamma_0(t) = z_0 + r e^{2i\pi t}$. On pose $\Gamma(s, t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$ et on applique le lemme avec la fonction $w \mapsto f(w)/(w-z)$ qui est holomorphe sur l'ouvert $U \setminus \{z\}$. Ainsi

$$\int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\partial D(z, \varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Or

$$\left| f(z) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z, \varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw \right| = \left| \int_{\partial D(z, \varepsilon)} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dw \right| \leq \varepsilon \sup_{D(z, \varepsilon)} |f'|.$$

D'où le résultat en faisant tendre ε vers 0.

□

Corollaire 1.14. (Égalité de la moyenne) Toute fonction holomorphe f vérifie l'égalité de la moyenne :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt.$$

Théorème 1.15. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U et $z_0 \in U$. Alors pour $R = d(z_0, U^c)$, la fonction f est développable en série entière sur le disque $D(z_0, R)$.

Proof. Pour $z \in D(z_0, R)$ et $r \in]|z - z_0|, R[$, d'après la formule de Cauchy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{z_0 + r e^{it} - z} r e^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{1 - (z - z_0)/(r e^{it})} r e^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) \sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n r^{-n} e^{-int} dt \end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n r^{-n} e^{-int}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$ donc

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

avec $a_n = \frac{r^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) e^{-int} dt$.

□

Remarque 1.16. On obtient la formule

$$f^{(n)}(z) = \frac{r^{-n}}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

Corollaire 1.17. Holomorphie et analyticité sont équivalentes.

Corollaire 1.18. Une fonction holomorphe est de classe C^∞ et sont infiniment C -dérivable.

Théorème 1.19. (Critère de Morera) Soit f une fonction continue sur un ouvert de \mathbf{C} , il y a équivalence entre

1. La fonction f est holomorphe.
2. Pour tout triangle T inclus dans U , on a $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$.

Proof. **1) \Rightarrow 2)** On applique le lemme 14 à $\Gamma(s, t) = s z_0 + (1-s)\gamma(t)$ où z_0 est un point du triangle et γ parcourt le bord du triangle.

2) \Rightarrow 1) Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$, on pose

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw,$$

où $\int_z^{z'}$ est l'intégrale sur le chemin liant z à z' . En utilisant l'hypothèse, on a pour $z, z' \in D(z_0, r)$

$$\begin{aligned} \frac{F(z) - F(z')}{z - z'} - f(z) &= \frac{1}{z - z'} \left(\int_{z'}^z f(w)dw - f(z)(z - z') \right) \\ &= \frac{1}{z - z'} \int_{z'}^z (f(w) - f(z))dw. \end{aligned}$$

Alors par continuité de f en z , on obtient

$$\left| \frac{F(z) - F(z')}{z - z'} - f(z) \right| \xrightarrow{z' \rightarrow z} 0.$$

Donc F est \mathbf{C} -dérivable de dérivée f , et donc f est holomorphe comme dérivée d'une fonction holomorphe. \square

1.4 Estimées de Cauchy et conséquences.

Proposition 1.20. (*Estimées de Cauchy*) Soit K un compact et K_r l'ensemble des points à distance au plus r de K .

$$\sup_K |f^{(n)}| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{K_r} |f|.$$

Proof. Pour $z_0 \in K$ on peut écrire

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int}.$$

Théorème 1.21. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction f . Alors f est holomorphe et de plus pour tout k , la suite de fonction $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur les compacts vers $f^{(k)}$.

Proof. Tout triangle T est compact par limite uniforme on a

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial T} f_n(z)dz = 0.$$

D'où l'holomorphie de f .

Pour tout compact K il existe $r > 0$ tel que $K_r \subset U$. Alors pour $k \in \mathbf{N}$ la convergence uniforme sur K de $f_n^{(k)}$ vers $f^{(k)}$ découle des estimées de Cauchy. \square

Exemple 1.22. L'application $\zeta : s \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ définit une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 1\}$.

Théorème 1.23. (*Holomorphie sous l'intégrale*) Soit E un espace mesuré, U un ouvert de \mathbf{C} et $f : E \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ vérifiant

- Pour tout $z \in U$, la fonction $f(\cdot, z) : E \rightarrow \mathbf{C}$ est mesurable.
- Pour presque tout $x \in E$, la fonction $f(x, \cdot) : U \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe.
- Il existe une fonction φ intégrable sur E telle que pour tout $z \in U$ on ait la domination $|f(x, z)| \leq \varphi(x)$ presque partout.

Alors la fonction $F(z) := \int_E f(x, z) d\mu(x)$ est holomorphe sur U et de plus $F'(z) = \int_E \partial_z f(x, z) d\mu(x)$.

Remarque 1.24. Il suffit de montrer la domination localement (par rapport à la variable complexe z).

Proof. On va utiliser le théorème de Morera : La fonction F est continue en conséquence du théorème de continuité sous l'intégrale. Soit T un triangle dans U de bord paramétré par $\gamma : [0, 1] \rightarrow \partial T$, on peut appliquer le théorème de Fubini car

$$\int_0^1 \int_E |f(x, z) \gamma'(t)| d\mu(x) dt \leq \int_0^1 \int_E \varphi(x) \sup_{[0,1]} |\gamma'| d\mu(x) dt < +\infty.$$

D'où

$$\int_{\gamma} F(z) dz = \int_E \left(\int_{\gamma} f(x, z) dz \right) d\mu(x) = 0,$$

et l'holomorphie de F .

L'expression de la dérivée découle du théorème de dérivation sous l'intégrale. En effet les estimées de Cauchy implique que l'on dispose localement d'une domination pour $\frac{\partial f}{\partial z}$ \square

Exemple 1.25. L'application $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ définit une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$.

1.5 Zéros isolés

Théorème 1.26. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de \mathbf{C} et $z_0 \in U$.

1. Si pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $f^{(n)}(z_0) = 0$ alors f est identiquement nulle sur U .
2. Sinon il existe un unique entier k tel que l'on puisse écrire pour $z \in U$

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

où g est une fonction holomorphe ne s'annulant pas en z_0 . L'entier k est appelé ordre de f en z_0 .

Proof. Soit $Z = \{z \in U, \forall n \geq 0, f^{(n)}(z) = 0\}$, il s'agit d'un fermé comme intersection de fermés. On va montrer que c'est également un ouvert :

Soit $z_0 \in Z$, on sait que f est développable en série entière sur un disque autour de z_0 , or les coefficients de cette série sont tous nuls est donc f est identiquement nulle sur un voisinage de z_0 . Donc Z est ouvert.

Si maintenant Z est non vide, alors $Z = U$ par connexité de U . D'où le premier point.

Si $z_0 \notin Z$ alors il existe un $k \in \mathbf{N}$ minimal tel que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Posons alors $g(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}$, il s'agit d'une fonction holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$, montrons qu'elle l'est au voisinage de z_0 .

On sait que f est développable en série entière sur un disque $D(z_0, r)$, de plus pour $j < k$ on a $f^{(j)}(z_0) = 0$ par minimalité de k donc son développement est de la forme

$$f(z) = \sum_{j \geq k} a_j (z - z_0)^j$$

Alors $g(z) = \sum_{j \geq 0} a_{j+k} (z - z_0)^j$ et donc g est holomorphe sur $D(z_0, r)$. □

Corollaire 1.27. (*Prolongement analytique*) Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U et telle que f s'annule sur une partie A admettant un point d'accumulation dans U . Alors f est identiquement nulle sur U entier.

Remarque 1.28. Attention le point d'accumulation doit être dans le domaine de définition : $e^{1/z}$ en zéro.

Proof. Supposons f non identiquement nulle et soit z_0 un zéro de f , d'après le résultat précédent il existe $k \in \mathbf{N}$ et une fonction holomorphe g non nulle en z_0 telle que

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

Or g ne s'annule pas sur un voisinage de z_0 , et z_0 est le seul zéros de f sur ce voisinage. □

Corollaire 1.29. Une fonction holomorphe admet (sur un ouvert donné) au plus un prolongement analytique.

Exemple 1.30. Prolongement analytique de fonctions spéciales

1. Fonction Γ sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}^-$
2. Fonction ζ de Riemann sur $\mathbf{C} \setminus \{-1\}$.

1.6 Principe du maximum

Théorème 1.31. (*Principe du maximum.*) Soit U un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur U , si $|f|$ atteint son maximum en un point de U , alors f est constante.

Proof. Soit $z_0 \in U$ tel que $|f|$ y atteigne son maximum. Pour $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$, d'après l'égalité de la moyenne

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Alors

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt$$

Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, donc $|f|$ est maximal sur $\partial D(z_0, r)$ et donc sur $D(z_0, r)$. Alors pour tout point z de $D(z_0, r)$ on a $f'(z) = 0$ car $\{z, |z| = |f(z_0)|\}$ est d'intérieur vide et donc f ne peut y être ouverte (TIL). Alors $f - f(z_0)$ est holomorphe sur U ouvert connexe et admet z_0 comme point d'accumulation de ses zéros, elle est donc nulle. f est constante. □

Corollaire 1.32. (*D'Alembert Gauss*) Tout polynôme de $\mathbf{C}[X]$ admet une racine dans \mathbf{C} .

Proof. Soit P un polynôme ne s'annulant pas sur \mathbf{C} . Alors $1/P$ est une fonction entière qui atteint son maximum. Elle est donc constante □

Corollaire 1.33. Soit U un ouvert connexe borné et $f \in C^0(\bar{U}) \cap \mathcal{H}(U)$, alors pour tout $z \in U$ on a

$$|f(z)| \leq \sup_{x \in \partial U} |f(x)|$$

Proof. Si f atteint son maximum dans U alors elle est constante et son maximum est atteint au bord. □

Corollaire 1.34. (*Lemme de Schwarz*) Si $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ est holomorphe alors pour tout $z \in D(0, 1)$,

$$|f(z)| \leq |z|$$

Si il y a égalité pour un z non nul, alors f est de la forme $f(z) = \lambda z$, avec $|\lambda| = 1$.

Corollaire 1.35. (*Automorphismes du disque unité*) Exo : On a

$$\text{Aut}(D(0, 1)) = \left\{ z \mapsto \lambda \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, |a| < 1, |\lambda| = 1 \right\}$$

1.7 Autres conséquences de la formule de Cauchy.

Théorème 1.36. (*Goursat*) Une fonction \mathbf{C} dérivable sur un ouvert U y est holomorphe.

Proof. Il s'agit d'utiliser Morera □

Proposition 1.37. (*Inversion locale*) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U et $z_0 \in U$. Si $f'(z_0) \neq 0$ alors il existe un voisinage de z_0 sur lequel f est un C^1 difféomorphisme, et sa réciproque est holomorphe également.

Proof. La différentielle de f^{-1} est df^{-1} et est donc une similitude.

Théorème 1.38. Une fonction holomorphe non constante est ouverte.

Proof. Voir section sur les logarithmes

Proposition 1.39. (Théorème de Liouville) Toute fonction entière et bornée est constante.

Proof. Supposons que f soit entière et bornée par une constante M . D'après la formule de Cauchy pour $z \in \mathbf{C}$ et $R > 0$ on a

$$f'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z,R)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

Et donc $|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$, d'où le résultat en faisant tendre R vers l'infini.

Remarque 1.40. Exo : Si f entière est majorée par un polynôme, alors c'est un polynôme.

1.8 Primitives complexes

Définition 1.41. Une primitive pour une fonction holomorphe f est une fonction holomorphe F telle que $F' = f$.

Proposition 1.42. Toute fonction holomorphe admet localement une primitive.

Proof. Soit z_0 dans le domaine de définition de f . On peut écrire $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z-z_0)^n$ pour z dans un disque $D(z_0, r)$. Alors $F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ est une primitive. \square

Proposition 1.43. Si f admet une primitive F , alors pour tout chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$$

Proof. On peut écrire

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt$$

Remarque 1.44. $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive sur \mathbf{C}^* . En effet

$$\int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$$

\square **Définition 1.45.** (Homotopie) Deux lacets γ_0, γ_1 de classe C_{pm}^1 sont dits homotopes si il existe une fonction $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbf{C}$ continue telle que $\Gamma(0, \cdot) = \gamma_0$ et $\Gamma(1, \cdot) = \gamma_1$ et telle que pour tout $s \in [0, 1]$ l'application $\gamma_s := \Gamma(s, \cdot)$ soit un lacet de classe C_{pm}^1

\square **Proposition 1.46.** Si γ_0 et γ_1 sont homotopes via une homotopie Γ et si f est holomorphe au voisinage de $\Gamma([0, 1]^2)$, alors

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

Proof. On montre que $s \mapsto \int_{\gamma_s} f(z) dz$ est une application localement constante.

Soit $s \in [0, 1]$, il existe des disques D_0, \dots, D_k et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tels que pour $1 \leq k \leq n-1$

$$z_k := \gamma_s(t_k) \in D_k \cap D_{k+1}$$

et

$$\gamma_s([0, 1]) \subset \bigcup_{k=1}^n D_k \subset U,$$

où U est le domaine d'holomorphie de f . Il existe $\eta > 0$ tel que pour $|u-s| < \eta$ on ait encore

$$w_k := \gamma_u(t_k) \in D_k \cap D_{k+1}$$

et

$$\gamma_u([0, 1]) \subset \bigcup_{k=1}^n D_k \subset U$$

Sur chaque disque D_k , la fonction f admet une primitive F_k , de plus il existe des constante c_k telles que $F_{k+1} - F_k = c_k$ sur $D_k \cap D_{k+1}$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_s} f(z) dz &= \sum_{k=0}^{n-1} F_k(z_{k+1}) - F_k(z_k) \\ &= F_n(z_n) - F_0(z_0) + \sum_{k=1}^n F_{k-1}(z_k) - F_k(z_k) \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \end{aligned}$$

De même

$$\int_{\gamma_u} f(z)dz = \sum_{k=0}^{n-1} F_k(w_{k+1}) - F_k(w_k) = \sum_{k=1}^n c_k$$

D'où le résultat □

Définition 1.47. Un ouvert connexe U de \mathbf{C} est dit simplement connexe si tout lacet γ est homotope à un lacet constant

Remarque 1.48. Et alors $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ pour tout lacet.

Proposition 1.49. Une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe y admet une primitive.

Proof. On pose $F(z) = \int_{\gamma} f(w)dw$ où γ est un chemin liant z_0 à z . La fonction F est bien définie car si γ' est un autre chemin alors

$$\gamma''(t) = (\gamma * \gamma'^{-1})(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \gamma'(2 - 2t) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est un lacet. Alors par simple connexité

$$\int_{\gamma''} f(z)dz = \int_{\{z_0\}} f(z)dz = 0,$$

c'est à dire $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma'} f(z)dz$.

Maintenant pour z, z' , par simple connexité on peut écrire

$$\frac{F(z) - F(z')}{z - z'} = \frac{1}{z - z'} \int_z^{z'} f(w)dw = \int_0^1 f(z + t(z' - z))dt \xrightarrow{z' \rightarrow z} f(z)$$

Donc F est \mathbf{C} dérivable de dérivée f . □

1.9 Logarithmes

Définition 1.50. (Détermination du logarithme.) Une fonction holomorphe l est une détermination du logarithme si pour tout z on a $e^{l(z)} = z$. Pour une fonction holomorphe f , une détermination du logarithme de f est une fonction holomorphe p qui vérifie $e^{p(z)} = f(z)$.

Remarque 1.51. Cela existe toujours localement (inversion locale). Mais pas nécessairement globalement ex : \mathbf{C}^*

Proposition 1.52. Une fonction holomorphe l sur un ouvert connexe est un logarithme si et seulement si $l'(z) = 1/z$ et si $e^{l(z_0)} = z_0$ en un point z_0 .

Proof. Soit $\varphi(z) = ze^{-l(z)}$, on a

$$\varphi'(z) = (1 - z l'(z))e^{-l(z)} = 0$$

De plus $\varphi(z_0) = 1$, donc $\varphi = 1$. □

Proposition 1.53. Sur tout ouvert simplement connexe de \mathbf{C}^* , il existe une détermination du logarithme, unique à un élément de $2i\pi\mathbf{Z}$ près.

Définition 1.54. La détermination principale du logarithme est la primitive de $1/z$ sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ telle que $l(1) = 0$. Elle est égale à $l(z) = \log(|z|) + i\theta$ (dessin)

Remarque 1.55. Cela permet de prolonger $z \mapsto z^\alpha$ sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$

Proposition 1.56. Toute fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbf{C}^*$ avec U un ouvert simplement connexe admet un logarithme.

Proof. On prend une primitive de f'/f . □

Proposition 1.57. Soit f une fonction holomorphe définie sur un ouvert simplement connexe et ne s'y annulant pas, alors pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ il existe une fonction holomorphe h telle que $f(z) = h(z)^k$

Proof. On prend $h(z) = e^{p(z)/k}$, où p est un logarithme de f □

Proposition 1.58. Soit f une fonction holomorphe et z_0 un zéro d'ordre k de f . Il existe φ un biholomorphisme local autour de z_0 tel que

$$f(z) = \varphi(z)^k$$

Proof. On sait qu'il existe une fonction g holomorphe non nulle en z_0 telle que

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

Soit h une racine k -ième de g , de sorte que $f(z) = \varphi(z)^k$ avec $\varphi(z) = (z - z_0)h(z)$. De plus $\varphi'(z_0) = h(z_0) \neq 0$, il s'agit donc d'un biholomorphisme local. □

Remarque 1.59. On en déduit qu'une fonction holomorphe non constante est ouverte

1.10 Fonctions meromorphes et singularités.

Définition 1.60. (Singularité) Un point $z_0 \in \mathbf{C}$ est une singularité pour une fonction holomorphe f si il existe un voisinage ouvert U de z_0 tel que f soit holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$

Théorème 1.61. (Théorème de prolongement de Riemann) Soit f une fonction holomorphe et z_0 une singularité de f . Si f est bornée sur un voisinage épointé de z_0 , alors f se prolonge par continuité en z_0 et le prolongement est holomorphe. On dit alors que la singularité est effaçable.

Proof. Soit $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$, il s'agit d'une fonction holomorphe sur un voisinage épointé de z_0 qui se prolonge par continuité en z_0 puisque f est bornée au voisinage de ce point.

De plus g est \mathbf{C} -dérivable en z_0 et $g'(z_0) = 0$. Alors g est développable en série entière autour de z_0 et

$$g(z) = \sum_{n \geq 2} a_n (z - z_0)^n$$

Alors $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n+2} (z - z_0)^n$ et donc f se prolonge en une fonction holomorphe. \square

Exemple 1.62. La fonction $z \mapsto \sin(z)/z$ en zero.

Définition 1.63. (pôle) Un pôle pour une fonction holomorphe f est une singularité a non effaçable et telle que pour un entier n positif la fonction $(z - a)^n f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe en a .

Remarque 1.64. Une singularité qui n'est ni un pôle ni effaçable est dite essentielle.

Définition 1.65. Une fonction f définie sur un ouvert de \mathbf{C} est dite meromorphe si toutes ses singularités sont des pôles.

Remarque 1.66. L'ensemble des fonctions meromorphes est un corps.

Théorème 1.67. (Séries de Laurent) Soient $0 \leq r < R$ et f une fonction holomorphe sur la couronne $C(r, R) := \{z \in \mathbf{C}, r < |z| < R\}$. Alors il existe des complexes $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ tels que $(\sum_{-N}^N a_n z^n)_N$ converge uniformément sur les compacts et

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$$

avec pour tout $n \in \mathbf{Z}$

$$a_n = \int_{\partial D(0, r')} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

où $r' \in (r, R)$.

Proof. Soient $r < r_1 < r_2 < R$ d'après la formule de Cauchy pour $z \in C(r_1, r_2)$

$$f(z) = \int_{\partial D(0, r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\partial D(0, r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

On a alors une décomposition $f(z) = g(z) + h(1/z)$ avec g holomorphe sur $D(0, r_2)$ et h holomorphe sur $D(0, 1/r_1)$ avec $h(0)$.

De plus une telle décomposition est unique car si $g_1(z) + h_1(1/z) = g_2(z) + h_2(1/z)$, alors $j(z) = g_1(z) - g_2(z) = h_2(1/z) - h_1(1/z)$ définit une fonction entière nulle en l'infini donc nulle par le théorème de Liouville.

Les fonctions g et h sont développables en série entières dans leur domaine de définition et leurs séries convergent uniformément sur les compacts d'où le résultat. \square

Définition 1.68. (Indice d'un lacet) Soit γ un lacet de \mathbf{C} et a un point hors de l'image de γ , alors l'indice de γ autour de a est l'entier

$$\text{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}$$

Remarque 1.69. Interprétation géométrique : C'est le nombre entier (relatif) de tour que fait γ autour de a (dans le sens direct).

Théorème 1.70. (Théorème des résidus) Soit f une fonction meromorphe et A l'ensemble de ses singularités, alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Ind}(\gamma, a) \text{Res}(f, a).$$