

---

## Compléments sur l'approximation des valeurs propres

Miguel Rodrigues

---

Le matériel discuté ici peut être trouvé dans les livres classiques d'algèbre linéaire [Ser01], d'analyse numérique matricielle [AK02, Cia07, CMT01] ou d'analyse numérique en général [Fil13, Sch04].

Ces notes de cours sont consacrées à l'approximation du spectre et des vecteurs propres des matrices carrées sur le corps des complexes  $\mathbf{C}$ . Même quand les matrices sont effectivement à coefficients réels, c'est bien leur spectre complexe qu'il est utile de calculer.

### 1 Stabilité

Avant de se lancer dans l'approximation des valeurs propres, il est naturel de se poser la question de leur stabilité.

**Théorème 1** 1. Soit  $A$  une matrice carrée possédant une valeur propre  $\lambda_0$  de multiplicité algébrique  $m_0$  et de multiplicité  $m_1$  comme racine du polynôme minimal et  $\|\cdot\|$  une norme subordonnée. Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  et  $C_0 > 0$  telle que, pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , toute matrice  $B$  vérifiant

$$\|B - A\| \leq C_0 \varepsilon^{m_1}$$

possède  $m_0$  valeurs propres comptées avec multiplicité algébrique dans  $B(\lambda_0, \varepsilon)$ .

2. Notons  $\widehat{\mathbf{C}}^d$  le quotient de  $\mathbf{C}^d$  par l'action des permutations sur les coordonnées et  $\widehat{d}$  une distance quotient associée. Soit  $A$  une matrice carrée de plus grande multiplicité  $m_0$  pour le polynôme minimal et  $\|\cdot\|$  une norme subordonnée. Alors il existe  $R_0 > 0$  et  $C_0 > 0$  telle que toute matrice  $B$  vérifiant  $\|B - A\| \leq R_0$  satisfait à

$$\widehat{d}(\Sigma(A), \Sigma(B)) \leq C_0 \|B - A\|^{\frac{1}{m_0}}$$

où  $\Sigma(\cdot)$  est l'application qui à une matrice associe la classe d'équivalence du  $d$ -uplet de ses valeurs propres comptées avec multiplicité algébrique.

*Démonstration.* Il suffit de montrer le premier point.

Notons que lorsqu'il est bien défini

$$\Pi_\varepsilon(B) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\varepsilon} (zI_d - B)^{-1} dz$$

(où  $\gamma_\varepsilon$  est un lacet simple paramétrant dans le sens direct le bord de  $B(\lambda_0, \varepsilon)$ ) est la somme des projecteurs spectraux associés à des valeurs propres de  $B$  dans  $B(\lambda_0, \varepsilon)$ . Son rang est égal à la somme des rangs de ces projecteurs donc à la somme des multiplicités algébriques des valeurs propres de  $B$  dans  $B(\lambda_0, \varepsilon)$ .

Il suffit donc de montrer

1. que  $\Pi_\varepsilon(B)$  est bien défini quand  $B$  et  $\varepsilon$  sont comme dans le théorème ;
2. que le rang des projecteurs est localement constant.

Le deuxième point est l'objet du lemme qui suit<sup>1</sup>. Quant au premier, cela vient du fait qu'il existe  $c'$  tel que pour  $|z - \lambda_0|$  assez petit

$$\|(zI_d - B)^{-1}\| \leq \frac{c'}{|z - \lambda_0|^{m_0}}.$$

D'où le résultat pour n'importe quel  $C_0$  tel que  $C_0 c' < 1$ . ■

**Lemme 2** Soit  $\|\cdot\|$  une norme subordonnée et  $P$  et  $Q$  deux projecteurs tels que  $\|P - Q\| < 1$ . Alors  $P$  et  $Q$  ont même rang.

*Démonstration.* L'application  $\text{Im}P \rightarrow \text{Im}Q$ ,  $x \mapsto Qx$  est injective puisque, pour  $x \in \text{Im}P$ ,

$$Qx = (Q - P)x + x, \quad \|Qx\| \geq (1 - \|P - Q\|)\|x\|,$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme dont  $\|\cdot\|$  est la norme subordonnée. Cela implique que le rang de  $Q$  est inférieur ou égal à celui de  $P$ . D'où le résultat par symétrie. ■

Comme le cas diagonalisable est générique, il est utile d'avoir une version encore plus précise que l'on pourrait obtenir en inspectant la démonstration précédente mais dont on va fournir une démonstration indépendante.

**Proposition 3** Soit  $\|\cdot\|$  une norme subordonnée telle que<sup>2</sup> pour toute matrice diagonale  $D$ ,  $\|D\| = \max_i |D_{i,i}|$ . Pour toute matrice  $A$  diagonalisable, il existe  $R_0 > 0$  telle que pour toute matrice  $B$

$$\sigma(B) \subset \bigcup_{\lambda \in \sigma(A)} \overline{B}(\lambda, C_0 \|B - A\|)$$

et si  $\|B - A\| \leq R_0$

$$\widehat{d}(\Sigma(A), \Sigma(B)) \leq C_0 \|B - A\|$$

(avec les notations du Théorème 1) où

$$C_0 = \inf_{\substack{P \text{ inversible} \\ P^{-1}AP \text{ diagonale}}} \|P\| \|P^{-1}\|.$$

La constante  $C_0$  est appelée conditionnement spectral de  $A$  (par rapport à  $\|\cdot\|$ ).

*Démonstration.* Il suffit de montrer que si  $d(\lambda, \sigma(A)) > C_0 \|B - A\|$  alors  $\lambda \notin \sigma(B)$ . Considérons un tel  $\lambda$ . Il existe  $P$  inversible tel que  $D := P^{-1}AP$  soit diagonale et  $d(\lambda, \sigma(A)) > \|P\| \|P^{-1}\| \|B - A\|$ .

On a  $\lambda I_d - B = P(\lambda I_d - D - (P^{-1}(B - A)P))P^{-1}$  avec

$$\|(\lambda I_d - D)^{-1}(P^{-1}(B - A)P)\| \leq \|(\lambda I_d - D)^{-1}\| \|P^{-1}\| \|B - A\| \|P\| = \frac{\|P\| \|P^{-1}\| \|B - A\|}{d(\lambda, \sigma(A))} < 1.$$

D'où le résultat par le lemme classique rappelé ci-dessous. ■

---

1. Une version moins quantitative suffit et peut être obtenue en utilisant la continuité du spectre et le fait que pour un projecteur le rang coïncide avec le nombre de valeurs propres de module strictement plus grand que  $1/2$ .

2. C'est le cas des normes subordonnées aux normes  $\ell^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Lemme 4** Si  $A$  une matrice carrée de taille  $d$  et  $\|\cdot\|$  est une norme subordonnée telle que  $\|A\| < 1$ , alors  $I_d - A$  est inversible et

$$(I_d - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a

$$I_d - A^n = I_d^n - A^n = (I_d - A) \sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

avec

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|} < \infty.$$

■

La stabilité des espaces caractéristiques est encodée par celle des projecteurs spectraux. On ne peut guère espérer mieux en général. La seule exception est celle des valeurs propres simples.

**Proposition 5** Soit  $\lambda_0$  est une valeur propre simple de  $A$  de vecteur propre  $V_0$ . Il existe  $\Omega$  un voisinage de  $A$  et  $\Lambda : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$  et  $V : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^d$  analytiques tels que

- pour tout  $B \in \Omega$ ,  $\Lambda(B)$  est une valeur propre simple de  $B$  de vecteur propre  $V(B)$  ;
- $\Lambda(A) = \lambda_0$  et  $V(A) = V_0$ .

*Démonstration.* Nous allons en fournir deux démonstrations très différentes.

**Première démonstration.** Soit  $\gamma$  un lacet simple entourant  $\lambda_0$  positivement mais n'entourant pas  $\sigma(A) \setminus \{\lambda_0\}$ . Introduisons

$$\Pi(B) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (zI_d - B)^{-1} dz$$

qui est une fonction analytique en  $B$  à valeur dans les projecteurs de rang 1 définie sur un voisinage connexe de  $A$ . Il suffit d'introduire

$$V(B) = \Pi(B) V_0, \quad \Lambda(B) = \frac{\langle V(B), B V(B) \rangle}{\|V(B)\|^2}$$

(quitte à réduire le voisinage pour assurer que  $V(B)$  est non nul) où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire hermitien canonique sur  $\mathbf{C}^n$  (linéaire à droite) et  $\|\cdot\|$  la norme associée.

**Deuxième démonstration.** Choisissons un vecteur  $W_0$  tel que  $\langle W_0, V_0 \rangle \neq 0$ . Montrons que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à

$$\Phi : \mathbf{C} \times \mathbf{C}^d \times \mathcal{M}_d(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{C}^d, \quad (\lambda, V, B) \mapsto (\langle W_0, V \rangle, (\lambda - B)V).$$

On pourra alors se contenter de poser  $(\Lambda, V)(B) := (\Phi(\cdot, \cdot, B))^{-1}(\langle W_0, V_0 \rangle, 0)$ . Soit  $(\mu, V)$  tel que  $d_{(\lambda, V)} \Phi(\lambda_0, V_0, A)(\mu, V) = (0, 0)$ , c'est-à-dire tel que

$$(\lambda_0 I_d - A)V + \mu V_0 = 0, \quad \langle W_0, V \rangle = 0.$$

En appliquant à la première équation le projecteur spectral sur le noyau de  $(\lambda_0 I_d - A)$ , comme  $\lambda_0$  est semi-simple, on déduit  $\mu = 0$ . Ainsi  $V$  appartient à ce noyau donc est co-linéaire à  $V_0$ . La seconde équation implique alors que  $V = 0$ . D'où le résultat. ■

## 2 Méthode de la puissance

La méthode de la puissance permet de calculer une approximation d'une valeur propre particulière<sup>3</sup> et d'un vecteur propre associé.

Pour analyser la méthode de la puissance, il est utile d'avoir la décomposition spectrale.

**Théorème 6 (Décomposition spectrale)** *Soit  $A$  une matrice carré de taille  $d$ , de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ,  $r \in \llbracket 1, d \rrbracket$ . Alors il existe  $\Pi_1, \dots, \Pi_r, N_1, \dots, N_r$  donnés comme des fonctions<sup>4</sup> de  $A$  tels que*

$$A = \sum_{i=1}^r (\lambda_i \mathbf{I}_d + N_i) \Pi_i$$

et

1.  $\Pi_1, \dots, \Pi_r$ , étant des projecteurs supplémentaires, l'image de chaque  $\Pi_i$  étant égale à l'espace caractéristique  $E_{\lambda_i}$  ;
2. chaque  $N_i$  est nilpotent de degré de nilpotence la multiplicité de  $\lambda_i$  comme racine du polynôme minimal.

De plus si  $f$  est holomorphe dans un voisinage de  $\sigma(A)$  alors

$$f(A) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{f^{(k)}(\lambda_j)}{k!} N_j^k \Pi_j.$$

où, pour  $1 \leq j \leq r$ ,  $m_j$  est le degré de nilpotence de  $N_j$ .

**Proposition 7** *Supposons que, dans les notations du théorème 6,  $\lambda_1$  soit la seule valeur propre de module  $\rho(A)$ . Choisissons  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbf{C}^d$ . Alors*

1. si  $\lambda_1$  n'est pas semi-simple et  $V_0$  est tel que  $N_1^{m_1-1}(V_0) \neq 0$ , on a, pour tout  $n \geq 1$ ,  $A^n V_0$  ne s'annule pas et

$$W_n := \frac{A^n V_0}{\|A^n V_0\|} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\equiv} \left( \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} \right)^{n-(m_1-1)} \frac{N_1^{m_1-1}(V_0)}{\|N_1^{m_1-1}(V_0)\|} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\frac{\langle W_n, A W_n \rangle}{\|W_n\|_2^2} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\equiv} \lambda_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right);$$

2. si  $\lambda_1$  est semi-simple et  $V_0$  est tel que  $\Pi_1(V_0) \neq 0$ , on a, pour tout  $n \geq 1$ ,  $A^n V_0$  ne s'annule pas et

$$W_n := \frac{A^n V_0}{\|A^n V_0\|} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\equiv} \left( \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} \right)^n \frac{\Pi_1(V_0)}{\|\Pi_1(V_0)\|} + \mathcal{O}\left(n^{m_0-1} \left( \frac{\rho_0}{\rho(A)} \right)^n\right),$$

$$\frac{\langle W_n, A W_n \rangle}{\|W_n\|_2^2} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\equiv} \lambda_1 + \mathcal{O}\left(n^{m_0-1} \left( \frac{\rho_0}{\rho(A)} \right)^n\right),$$

avec  $\rho_0 := \rho(A(\mathbf{I}_d - \Pi_1)) = \max_{j \geq 2} |\lambda_j|$  le deuxième plus grand module des valeurs propres et  $m_0 := \max_{j, |\lambda_j|=\rho_0} m_j$  ;

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire hermitien canonique sur  $\mathbf{C}^n$  (linéaire à droite) et  $\|\cdot\|_2$  la norme associée.

3. La plus grande ou celle la plus proche d'une valeur donnée.

4. Donc commutant entre eux et avec  $A$ .

La suite  $(W_n)_{n \geq 0}$  est en fait calculée par récurrence

$$\forall n \geq 0, \quad W_{n+1} = \frac{A W_n}{\|A W_n\|}.$$

Il s'agit de la *méthode de la puissance*.

Si on choisit de normaliser avec  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ ,  $\langle W_n, A W_n \rangle / \|W_n\|_2^2$  se réduit à  $\langle W_n, A W_n \rangle$ .

Pour rater les conditions sur  $V_0$ , il faut que  $V_0$  soit choisi dans un espace de co-dimension positive. En particulier, numériquement, les erreurs d'arrondi finissent par assurer ces conditions au bout d'un nombre fini d'itérations.

En appliquant la méthode à  $(A - \mu_0 I_d)^{-1}$ , pour un  $\mu_0 \in \mathbf{C}$ , on calcule une approximation de la valeur propre la plus proche de  $\mu_0$  lorsqu'elle est unique. Il s'agit de la méthode de la puissance inverse. Il est important de noter que dans ce cas il n'est pas nécessaire de calculer  $(A - \mu_0 I_d)^{-1}$ , puisque pour calculer  $W_{n+1}$  il suffit de résoudre le système  $(A - \mu_0 I_d)Z_n = W_n$  puis de poser  $W_{n+1} = Z_n / \|Z_n\|$ .

Il est important de noter que la suite des vecteurs  $(W_n)_n$  ne converge pas sauf si la valeur propre à approcher est réelle et positive.

### 3 Méthode QR

La méthode QR permet elle de calculer une approximation de tout le spectre. Elle s'appuie sur la décomposition QR.

**Théorème 8 Décomposition QR.** *Pour toute matrice  $A$  inversible il existe un unique couple de matrices  $(Q, R)$  tel que  $Q$  soit unitaire,  $R$  soit triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs et  $A = QR$ . De plus,*

- l'application correspondante  $A \mapsto (Q, R)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  ;
- si  $A$  est réelle, sa décomposition QR est réelle.

*Démonstration.* Si  $(Q, R)$  et  $(Q', R')$  sont deux paires comme ci-dessus. Alors  $R(R')^{-1} = Q^{-1}Q'$  est unitaire avec des valeurs propres strictement positives donc est égale à  $I_d$ . D'où l'unicité.

Notons  $Q$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs sont obtenus à partir des vecteurs-colonnes de  $A$  en appliquant le procédé de Gram-Schmidt. Posons  $R = Q^{-1}A$ . Alors  $(Q, R)$  convient. ■

La méthode QR, aussi appelée algorithme de Francis, construit une suite de matrices unitairement semblables à la matrice de départ, qui deviennent proches d'être triangulaires. Comme on le verra ci-dessous, en général cette suite ne converge pas mais on peut tout de même s'en servir pour extraire une approximation du spectre. La méthode consiste à itérer

$$\Phi : \quad \text{GL}_d(\mathbf{C}) \rightarrow \text{GL}_d(\mathbf{C}), \quad A \mapsto RQ \quad \text{où } (Q, R) \text{ est la décomposition QR de } A.$$

Analyser les cas où  $A$  est initialement unitaire ou initialement triangulaire supérieure permet déjà de se faire une idée de ce que l'on ne peut pas espérer.

Toute matrice unitaire est un point fixe trivial de  $\Phi$ . En fait, comme pour la méthode de la puissance, la méthode QR s'appuie sur les différences de croissance dues aux différences de module des valeurs

propres. Elle nécessite que les valeurs propres soient toutes simples et de modules distincts. Cela exclut les matrices unitaires mais aussi les matrices réelles avec des valeurs propres non réelles.

Pour réparer cela, on peut appliquer la méthode à  $A - \mu_0 \mathbf{I}_d$ , avec  $\mu_0$  n'appartenant à aucune des médiatrices entre deux valeurs propres de  $A$ , puis translater par  $\mu_0$  les valeurs obtenues. Dans le cas où  $A$  est réelle, il faut translater par un  $\mu_0$  non réel. Les algorithmes les plus optimisés réalisent une telle translation à chaque étape pour accélérer la convergence en rendant les modules des valeurs propres les plus distincts possibles.

Si on applique la méthode à une matrice avec des valeurs propres de même module, la suite des itérations devient proches d'être triangulaires par blocs avec des blocs correspondant aux valeurs propres de même module.

Quand  $A$  est triangulaire supérieure et inversible alors la suite des itérés  $(A^{(k)})_k = (\Phi^k(A))_k$  est explicitement donnée par, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,

$$A_{j,\ell}^{(k)} = \left( \frac{A_{\ell,\ell}/|A_{\ell,\ell}|}{A_{j,j}/|A_{j,j}|} \right)^k A_{j,\ell}, \quad 1 \leq j, \ell \leq d.$$

En particulier, dans ce cas, si tous les coefficients  $A_{j,\ell}$ ,  $j < \ell$ , sont non nuls, la suite ne converge que si toutes les valeurs propres sont sur une même demi-droite réelle partant de 0.

L'ensemble des points fixes de  $\Phi$  est compliqué, puisqu'il contient au moins toutes les matrices diagonales par blocs avec des blocs unitaires ou triangulaires avec des coefficients diagonaux alignés sur une demi-droite réelle partant de 0. On trouve dans la version anglaise de [Sch04] une analyse des points fixes dont les valeurs propres sont simples avec des modules deux à deux distincts, qui montre que ces point fixes sont des matrices triangulaires à coefficients diagonaux alignés sur une demi-droite réelle partant de 0.

Après ces mises en garde, passons à l'analyse de l'algorithme.

**Lemme 9** Soit  $A \in GL_d(\mathbf{C})$ . Notons  $(A^{(k)})_k = (\Phi^k(A))_k$  la suite des itérés partant de  $A$ ,  $(Q^{(k)}, R^{(k)})_k$  la suite des décompositions  $QR$  associées et définissons, pour  $k \in \mathbf{N}$ ,

$$Q_k = Q^{(0)} \dots Q^{(k)}, \quad R_k = R^{(k)} \dots R^{(0)}.$$

1. Pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,  $Q_k$  est unitaire et

$$A = Q_k A^{(k+1)} Q_k^{-1}.$$

2. Pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,  $(Q_k, R_k)$  est la décomposition  $QR$  de  $A^{k+1}$ .

*Démonstration.* On a :

- $A = Q^{(0)} R^{(0)} = Q^{(0)} \Phi(A) (Q^{(0)})^{-1}$  ;
- et, pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,  $A^k = (Q^{(0)} R^{(0)})^k = Q^{(0)} \Phi(A)^{k-1} R^{(0)}$ .

Les deux propriétés s'en déduisent par récurrence. ■

La deuxième propriété montre que de manière déguisée ce que l'on calcule c'est une orthonormalisation de la suite des puissances. Ce sont les différences de croissance de la suite des puissances qui expliquent la (presque) convergence quand les valeurs propres sont simples de modules deux à deux distincts.

Le résultat suivant montre une forme de convergence sous une hypothèse générique.

**Théorème 10** Soit  $A \in GL_d(\mathbf{C})$  dont les valeurs propres sont simples et de modules deux à deux distincts. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  les valeurs propres ordonnées par module,  $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_d|$ .

Supposons qu'il existe  $P \in GL_d(\mathbf{C})$  tel que  $A = P^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d) P$  et  $P$  admette une décomposition LU, c'est-à-dire que tous les mineurs fondamentaux de  $P$  sont non nuls. Alors il existe une matrice triangulaire  $T$  de diagonale  $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$  telle qu'en notant  $(A^{(k)})_k = (\Phi^k(A))_k$  la suite des itérés de la méthode QR partant de  $A$ , l'on ait

$$A^{(k)} \stackrel{k \rightarrow \infty}{\cong} \Lambda^{-k} T \Lambda^k + \mathcal{O}(\rho^k),$$

avec

$$\Lambda := \text{diag} \left( \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}, \dots, \frac{\lambda_d}{|\lambda_d|} \right), \quad \rho := \max \left( \left\{ \frac{|\lambda_{j+1}|}{|\lambda_j|}; 1 \leq j \leq (d-1) \right\} \right).$$

En particulier, pour tout  $1 \leq j \leq d$ ,

$$\lambda_j \stackrel{k \rightarrow \infty}{\cong} A_{j,j}^{(k)} + \mathcal{O}(\rho^k).$$

*Démonstration.* Le but est d'obtenir l'asymptotique de la factorisation QR de  $A^k$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ , pour en déduire le reste. Notons  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ ,  $(Q, R)$  la décomposition QR de  $P^{-1}$  et  $(L, U)$  la décomposition LU de  $P$ . Alors pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,

$$A^k = P^{-1} D^k P = QR D^k LU.$$

Or

$$D^k L D^{-k} \stackrel{k \rightarrow \infty}{\cong} I_d + \mathcal{O}(\rho^k),$$

avec

$$\rho := \max \left( \left\{ \frac{|\lambda_{j+1}|}{|\lambda_j|}; 1 \leq j \leq (d-1) \right\} \right)$$

On en déduit que

$$Q_k \stackrel{k \rightarrow \infty}{\cong} Q \Lambda_U \Lambda^{k+1} + \mathcal{O}(\rho^k)$$

avec  $\Lambda_U = \text{diag}(U_{1,1}/|U_{1,1}|, \dots, U_{d,d}/|U_{d,d}|)$ . Or pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ ,

$$A^{(k)} = Q_{k-1}^{-1} A Q_{k-1} = Q_{k-1}^{-1} Q R D R^{-1} Q^{-1} Q_{k-1}.$$

D'où l'asymptotique de  $A^{(k)}$  avec

$$T := \Lambda_U^{-1} R D R^{-1} \Lambda_U.$$

■

Par souci de complétude, rappelons le résultat de décomposition LU.

**Théorème 11 Décomposition LU.** Pour toute matrice  $A$  dont tous les mineurs fondamentaux, il existe un unique couple de matrices  $(L, U)$  tel que  $L$  soit triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale,  $R$  soit triangulaire supérieure et  $A = LU$ .

*Démonstration.* Si  $(L, U)$  et  $(L', U')$  sont deux paires comme ci-dessus. Alors  $U(U')^{-1} = L^{-1}L'$  est à la fois triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et triangulaire supérieure donc est égale à  $I_d$ . D'où l'unicité.

L'existence est donnée par la méthode du pivot de Gauss. ■

Il faut noter que dans la construction de matrices semblables il est important de construire une suite bornée. Il ne suffit pas d'avoir une suite de matrices semblables dont la partie triangulaire inférieure converge pour en déduire quelque chose sur le spectre. On s'en convainc aisément en considérant

$$A^{(k)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ \frac{1}{k+1} & 1 \end{pmatrix}$$

dont le spectre est  $\{0, 2\}$ .

Pour mettre en œuvre la méthode QR de manière efficace, il faut évidemment s'intéresser au calcul des décompositions QR. La construction via la méthode de Gram-Schmidt est trop instable parce qu'elle implique des divisions par des nombres qui peuvent être petits. Il existe d'autres constructions plus stables (et plus géométriques). Par ailleurs, pour son utilisation dans la méthode QR, il est important de noter qu'il est facile d'explicitier une matrice de Hessenberg<sup>5</sup> semblable à  $A$ , que l'ensemble des matrices de Hessenberg est stable par itération de  $\Phi$  et que le calcul des décompositions QR pour ces matrices est nettement plus économique.

## Références

- [AK02] G. Allaire and S. M. Kaber. *Algèbre linéaire numérique*. Ellipses, 2002.
- [Cia07] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Dunod, 2007.
- [CMT01] P. G. Ciarlet, B. Miara, and J.-M. Thomas. *Exercices d'analyse numérique matricielle et d'optimisation*. Dunod, 2001.
- [Fil13] F. Filbet. *Analyse numérique - Algorithmes et étude mathématique*. Dunod, 2013.
- [Sch04] M. Schatzman. *Analyse numérique*. Dunod, 2004.
- [Ser01] D. Serre. *Les Matrices - Théorie et pratique*. Dunod, 2001.

---

5. C'est-à-dire une matrice dont les coefficients d'indice  $(j, \ell)$  avec  $j \geq \ell + 2$  sont nuls.