# Variations autour d'Ascoli

Suites de fonctions, équicontinuité, compacité, complétude, théorème d'Ascoli

Les questions marquées par $\star$ demandent des connaissances de topologie générale.

## 1 Équicontinuité

**Exercice 1.** Soit $I \subset \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{A}$ une famille de fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$. Quand dit-on que $\mathcal{A}$ est *équicontinue* ? *uniformément équicontinue* ? Montrer que toute famille équicontinue de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est uniformément équicontinue.

**Exercice 2.** $\star$ Généralisez la notion d'équicontinuité pour des fonctions d'un espace topologique $X$ à valeurs dans un espace métrique $E$.
Montrer qu'on peut généraliser le résultat de l'exercice précédent pour des fonctions entre deux espaces métriques.

**Exercice 3.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite équicontinue de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction $f$. Montrer que $f$ est continue.
$\star$ Peut-on généraliser pour des fonctions d'un espace topologique $X$ dans un espace métrique $E$ ?
Donner un contre-exemple lorsque les $f_n$ sont seulement continues (et que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas équicontinue).

**Exercice 4.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite équicontinue de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction $f$. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact.
$\star$ Peut-on généraliser pour des fonctions d'un espace topologique $X$ dans un espace métrique $E$ ?

**Exercice 5.**
1. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x + n$. La suite $(f_n)$ est-elle équicontinue ?
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n : [0, +\infty[$ définie par $g_n(x) = \sin\sqrt{x + n^2\pi^2}$. La suite $(g_n)$ est-elle équicontinue ?
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h_n(x) = \arctan(nx)$. En quels points la suite $(h_n)$ est-elle équicontinue ?

**Exercice 6.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $D = (x_j)_{j \in J}$ un ensemble dense dans $I$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite équicontinue de fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur $D$.
Montrer que $(f_n)$ converge simplement sur $I$ (et donc que la limite est continue).
$\star$ Quelle hypothèse peut-on mettre sur un espace métrique $E$ pour généraliser ce résultat pour des fonctions d'un espace topologique $X$ dans $E$ ?

## 2 Ascoli, take 1

**Exercice 7.** On veut démontrer le théorème suivant. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$ et que la suite $(f_n)$ est équicontinue. Alors il existe $f \in C^0([0,1])$ et une sous-suite de $(f_n)$ qui converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

1. Montrer que $[0,1]$ contient une suite dense $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer qu'il existe une suite d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$ fixé, $(f_{n_k}(x_p))_{k\in\mathbb{N}}$ converge lorsque $k \to +\infty$. (On utilisera le procédé d'extraction diagonale de Cantor.)
3. Conclure en utilisant les exercices 6 et 4.

**Exercice 8.** $\star$ (**Théorème d'Ascoli, cas métrique**) Soit $(X, d_X)$ un espace métrique compact et $(E, d_E)$ un espace métrique. On munit l'ensemble $C^0(X,E)$ de la métrique uniforme $\delta$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite équicontinue de $C^0(X,E)$. On suppose que, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ est contenue dans un compact $K_x$ de $E$.

1. Rappeler la définition de $\delta$.
2. En utilisant la stratégie de l'exercice précédent, montrer qu'on peut extraire de $(f_n)$ une sous-suite qui converge uniformément dans $C^0(X,E)$.

## 3 Topologie de la convergence simple

**Exercice 9.** $\star$ Soit $X$ un ensemble et $E$ un espace topologique (on pourra choisir $E = \mathbb{R}$ si nécessaire). On identifie l'ensemble des fonctions de $X$ dans $E$ avec l'espace produit $E^X$.

1. Expliciter $E^X$ lorsque $X$ a un nombre fini d'éléments, et lorsque $X = \mathbb{N}$.
2. On munit $E^X$ de la *topologie produit*. Montrer qu'une suite de fonctions $f_n \in E^X$ converge simplement vers $f \in E^X$ si et seulement si cette suite converge pour la topologie produit.

On appelle la topologie produit sur $E^X$ la *topologie de la convergence simple.*

**Exercice 10.** Soit $A = (f_j)_{j\in J}$ une famille de fonctions de $X$ dans $E$.

1. $\star$ Si $X$ et $E$ sont des espaces topologiques, montrer que tous les éléments de $A$ sont continus en $x \in X$ si et seulement si la fonction $F : x \mapsto (f_j(x)) \in E^J$ est continue en $x$ pour la topologie produit sur $E^J$.
2. Si $X$ est un espace topologique et $E$ un espace métrique, montrer que $A$ est équicontinue en $x$ si et seulement si $F$ est continue pour la distance uniforme sur $E^J = \mathcal{F}(J, E)$.
3. Si $X$ et $E$ sont des espaces métriques, montrer que $A$ est *uniformément* équicontinue en $x$ si et seulement si $F$ est uniformément continue pour la distance uniforme sur $E^J = \mathcal{F}(J, E)$.
4. Retrouver directement le résultat de l'exercice 1.

**Exercice 11.** $\star$ Soit $K$ un espace compact, $E$ un espace métrique et $A$ un ensemble équicontinu de fonctions de $K$ dans $E$. Montrer que sur $A$, la topologie de la convergence simple et celle de la convergence uniforme coïncident. (On pourra montrer que tout voisinage pour une topologie contient un voisinage pour l'autre topologie.)

# 4 Ascoli, take 2

**Exercice 12.** $\star$ (**Théorème d'Ascoli, cas général**) Soit $K$ un espace compact, $E$ un espace métrique et $A$ un ensemble équicontinu de $C^0(K, E)$. On suppose que, pour tout $x \in K$, l'ensemble $A(x) := \{f(x); f \in A\}$ est inclus dans un compact $B(x)$ de $E$.
En utilisant l'exercice précédent, montrer que $A$ est inclus dans un compact de $C^0(K, E)$.

On utilisera le théorème de Tychonov (« tout produit de compacts est compact »).

**Exercice 13.** $\star$ (**Théorème d'Ascoli, énoncé complet**) Nous avons pour le moment discuté du sens le plus intéressant du théorème d'Ascoli ; mais en réalité ce théorème énonce une équivalence :
Soit $K$ un espace compact, $E$ un espace métrique et $A$ une partie de $C^0(K, E)$. Alors $A$ est relativement compacte (c'est-à-dire incluse dans un compact) *si et seulement si* :

1. $A$ est équicontinue, et
2. pour tout $x \in K$, l'ensemble $A(x) := \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact dans $E$.

Il reste donc à démontrer le caractère nécessaire de ces conditions.

## 5 Applications

On pourra utiliser les énoncés précédents du théorème d'Ascoli.

**Exercice 14. Opérateurs à noyaux.** Soit $k \in C^0([0,1] \times [0,1])$ et $K : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ l'opérateur défini par :

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,t) f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Soit $(f_n)_n$ une suite bornée de $C([0,1])$.

1. Montrer que $k$ est uniformément continue.
2. Montrer que $(Kf_n)_n$ est équicontinue.
3. Montrer que $(Kf_n)_n$ admet une sous-suite convergente.

**Exercice 15. Compacité par régularité**. On munit $C^1([0,1];\mathbb{R})$ de la norme $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que toute suite bornée dans $(C^1([0,1];\mathbb{R}); \|\cdot\|_{C^1})$ admet une sous-suite qui converge uniformément dans $C^0([0,1];\mathbb{R})$.

**Exercice 16. Équicontinuité et dimension finie.** *Cet exercice est une « curiosité »...* Soit $V$ un sous-espace fermé de l'espace vectoriel $C^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. On suppose que toute fonction $f \in V$ est de classe $C^1$.

1. Montrer que $V$ est un espace de Banach.
2. Soit $f_n$ une suite de $V$ qui converge vers $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $f \in V$.
3. On suppose en outre que la suite $f_n'$ converge vers $g$ dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $f' = g$.
4. En déduire que le graphe de l'opérateur $D : V \to C^0([0,1],\mathbb{R})$, $Df = f'$ est fermé.
5. En déduire que $D$ est continu.
6. Montrer que la boule unité de $V$ est équicontinue.
7. En déduire que $V$ est de dimension finie.

**Exercice 17. Théorème de Cauchy-Peano**. On veut démontrer le théorème suivant.

> Soient $I, U$ des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, et soit $F : I \times U \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tous $(t_0, x_0) \in I \times U$, il existe un voisinage $I_0$ de $t_0$ et une fonction $f \in C^1(I_0; \mathbb{R})$ tels que
>
> $$\begin{cases} f'(t) = F(t, f(t)) \\ f(t_0) = x_0 \,. \end{cases} \tag{1}$$

(L'énoncé est vrai aussi pour $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.)

1. Montrer que $f$ n'est en général pas unique, en considérant l'équation différentielle $x' = 3x^{2/3}$ qui admet comme solution $x(t) = t^3$.
2. Comparer avec l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz.
3. Commençons par résoudre le problème de Cauchy (1) de façon *approchée* sur l'intervalle $I_0 := [t_0, t_0 + \delta]$ pour $\delta$ assez petit. Pour cela, on découpe l'intervalle en $N$ sous-intervalles en posant $t_i = t_0 + i\frac{\delta}{N}$ et on approche $f(t_i)$ au moyen d'un schéma d'Euler explicite. Donner la formule récursive pour la solution approchée $x_i$, $i = 0, \ldots, N$.
4. Montrer que, pour $\delta$ assez petit (indépendant de $N$), ce schéma numérique est bien défini pour tous $N \geqslant 1$, avec $x_i \in K$ où $K$ est un compact fixé de $U$.
5. On notera $f_N(t)$ la fonction continue définie par $f_N(t_i) = x_i$ et affine sur chaque $[t_i, t_{i+1}]$. Montrer que $f_N$ est une solution approchée du problème de Cauchy (1) au sens où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 0$ tel que pour $n \geqslant N$,

$$\left| f_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} F(s, f_n(s))ds \right| \leqslant \varepsilon(t - t_0)\,.$$

6. Montrer que la suite $f_N$ est équicontinue.
7. Conclure.