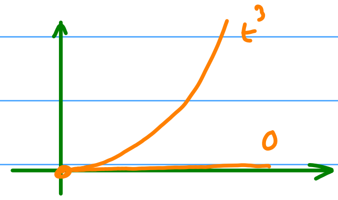
exercice 17 Cauchy - Peano

1) Les fonctions $x(t) = t^3$ et $x(t) \equiv 0$ sont solutions de

$$\begin{cases} x' = 3x^{3/2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

il n'y a donc pas unicité de ce problème de Cauchy



2) Au contraire, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'unicité (locale) des solutions de $\begin{cases} f' = F(t, f(t)) \\ f(t_0) = x_0 \end{cases}$

Mais il nécessite une hypothèse supplémentaire sur F :
F est supposée Lipschitz, au moins localement par rapport à la deuxième variable x.
Pour $F(t, x) = 3x^{2/3}$ ce n'est pas le cas (on a une tangente verticale à l'origine)

3) Le schéma d'Euler avec pas de temps h consiste à approcher

$$f(t+h) \simeq f(t) + h f'(t)$$

Ici ça nous donne, avec $h = \frac{\delta}{N}$

$$f(t_{i+1}) \simeq f(t_i) + h f'(t_i) = f(t_i) + h F(t_i, f(t_i))$$

si f est solution de (1)

On pose donc $\underline{x_{j+1} = x_j + h F(t_i, x_i)}$

et on espère que $x_j \sim f(t_j)$

4) Faisons d'abord une analyse rapide. Si on sait montrer que (t_i, x_i) reste dans un compact, alors F sera bornée et donc on aura $|x_{j+1} - x_j| \leq M \frac{\delta}{N}$

et donc $|x_0 - x_j| \leq |x_0 - x_1| + |x_1 - x_2| + \dots + |x_{N-1} - x_N|$
$\leq M \delta$

ce qui nous "conforte" sur le fait que x_j reste borné.

On le démontre donc par récurrence :

Soit $M_{r,\delta} = \max\limits_{[t_0, t_0+\delta] \times B(x_0, r)} |F|$

Fixons $r_0 > 0$ et $\delta_0 > 0$. Pour $r \leq r_0$ et $\delta \leq \delta_0$

on a $M_{r,\delta} \leq M_{r_0,\delta_0}$

Fixons $\delta > 0$ tel que $\delta M_{r_0,\delta_0} < r_0$

$$\boxed{\text{Montrons que pour tous } j = 0, \dots, N, \quad (\forall N) \quad x_j \in B(x_0, r_0)}$$

- C'est clair pour $j = 0$ $\quad x_0 = x_0$.
- Si c'est vrai pour tous $k \in \{0, \dots, j\}$

alors $|x_{j+1} - x_j| = \frac{\delta}{N} |F(t_j, x_j)| \leq \frac{\delta}{N} M_{r_0,\delta_0}$

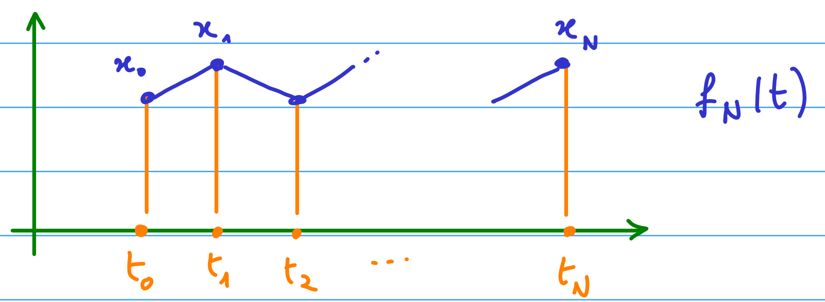
donc on a bien

$$|x_{j+1} - x_0| \leq (j+1) \frac{\delta}{N} M_{r_0,\delta_0} \leq \delta M_{r_0,\delta_0} < r_0$$

donc $x_{j+1} \in B(x_0, r_0)$

ce qui démontre la propriété par récurrence. Et répond donc à la question avec $K = \overline{B(x_0, r_0)}$

5)



On regarde la qualité de l'approximation sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s, f_N(s))\, ds - \left(f_N(t_{i+1}) - f_N(t_i) \right)$$

$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(F(s, f_N(s)) - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \right) ds$$

$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[F(s, f_N(s)) - F(t_i, x_i) \right] ds$$

$\forall s$, $f_N(s) \in K$ car le segment $[x_i, x_{i+1}] \subset K$.

F est continue sur $I_0 \times K$ donc unif. continue

Donc $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0$ tq $(|s - t_i| < \alpha$ et $|f_N(s) - x_i| < \alpha) \circledast$

$\Rightarrow |F(s, f_N(s)) - F(t_i, x_i)| < \varepsilon$

Or on a $|s - t_i| \leq h = \delta / N$

$|f_N(s) - x_i| \leq |x_{i+1} - x_i| \leq h M = \frac{\delta}{N} M$

Donc pour N assez grand, la condition $\circledast$ est vérifiée

Donc on obtient

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(s, f_N(s))\, ds - (x_{i+1} - x_i) \right| < \varepsilon h$$

En sommant on obtient, $\forall j$

$$\left| \int_{t_0}^{t_j} F(..) - (x_j - x_0) \right| < \varepsilon (t_j - t_0)$$

Pour chaque $t \in [t_j, t_{j+1}]$ on applique l'inégalité même sur $[t_j, t_{j+1}]$ mais on intègre seulement sur $[t_j, t]$

donc $\left| \int_{t_j}^{t} F(..)\, ds - (f_N(t) - x_j) \right| \leq \varepsilon |t_j - t|$

$\rightarrow$ Au total on obtient bien $\left| \int_{t_0}^{t} \cdots \right| \leq \varepsilon (t - t_0)$

6) Sur chaque $[t_i, t_{i+1}]$, $|f_N'| = |F(t_i, x_i)| \leq M$
donc f_N est M-Lipschitz par les accroissement finis
donc la suite f_N est (unif.) équicontinue

7) D'autre part $f_N(t) \in K$ donc est ponctuellement relativement compacte. On peut donc appliquer Ascoli qui nous indique que (f_N) est relativ. compacte dans $C^0(I_0)$
On peut donc en extraire une sous-suite f_{n_k} convergente $\to f$ (unif).
Quitte à extraire encore, (en posant $\varepsilon = 1/k$ dans (5))
on a

$$\left| f_{n_k}(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} F(s, f_{n_k}(s))\, ds \right| \leq \frac{1}{k}(t - t_0)$$

En passant à la limite uniforme on obtient

$$\left| f(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))\, ds \right| = 0$$

(car $s \mapsto F(s, f_{n_k}(s))$ converge unif vers $s \mapsto F(s, f(s))$)

Donc $f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))\, ds$

Puisque f est continue, $s \mapsto F(s, f(s))$ est continue
donc on voit que $f \in C^1$ et

$$f'(t) = F(t, f(t))$$

(D'autre part $f(t_0) = x_0$ car $\forall n$ $f_n(t_0) = x_0$ par construction)

On a donc bien résolu le pb de Cauchy !