Université de Rennes 1–Année 2022/2023

PrépaAgreg—CCAN–Calcul Différentiel

Feuille de TD 1

Exercice 1

Étudier la différentiabilité des fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ suivantes définies par $f(0,0)=0$ et, pour $(x,y)\neq 0$, par

$$(i)\quad f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{|x|+|y|}\qquad (ii)\quad f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$(iii)\quad f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\qquad (iv)\quad f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

$$(v)\quad f(x,y)=\frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6}\qquad (vi)\quad f(x,y)=\frac{|x|^\alpha y}{x^2+y^4}$$

Exercice 2

Pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable, calculer les dérivées partielles des fonctions $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ donnés par

$$g(x,y):=f(x+y),\qquad h(x,y):=f(x^2+y^2),\qquad k(x,y):=f(xy).$$

Exercice 3

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

Exercice 4

Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point (x_0,y_0,z_0) donné :

1. $z=\sqrt{19-x^2-y^2},\quad (x_0,y_0,z_0)=(1,3,3)$;
2. $z=\sin(\pi xy)\exp(2x^2y-1),\quad (x_0,y_0,z_0)=(1,1/2,1)$.

Exercice 5

Trouver les points sur le paraboloïde $z=4x^2+y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x+2y+z=6$. Même question avec le plan $3x+5y-2z=3$.

Exercice 6

Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y)=\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\text{ si } x\neq y,\ \ F(x,x)=g'(x).$$

Montrer que F est de classe C^1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle.

Exercice 7

Soit E^n l'espace des polynômes de degré $\leqslant n$. Etudier la différentiabilité des applications

$$F:E^n\to\mathbb{R},\quad P\mapsto\int_0^1 (P^3(t)-P^2(t))\,dt\qquad\text{et}\qquad F:E^n\to E^n,\quad P\mapsto P'-P^2.$$

Exercice 8

1. Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$; montrer que l'application $\varphi: t\to M_n(\mathbb{R}), t\ni\mathbb{R}\mapsto e^{tA}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit $x\in\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, t\mapsto\langle e^{tA}x, e^{tA}x\rangle$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. On suppose que A est antisymétrique. Montrer que e^{tA} est unitaire pour tout $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 9

1. Soit $f:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ définie par $f(A)=\det(A)$. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Pour $k\geqslant 1$, soit $\varphi_k:M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_k(A)=A^k$. Montrer que φ_k est différentiable et calculer sa différentielle

3. Calculer la différentielle de l'application $A \mapsto A^{-1}$ de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10

1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ et que f^{-1} est différentiable en tout point de $f(\mathbb{R})$.
2. Soit f définie par $f(x) = x + x^2 \sin \frac{\pi}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
   Montrer que $f'(0)$ existe et que $f'(0) \neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Expliquer.

Exercice 11

1. Montrer que l'application $\varphi : (r,\theta) \to (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$ sur le plan privé de la demi-droite $\mathbb{R}^-$. Si $f(x,y) = g(r,\theta)$ donner les formules de passage entre les dérivées partielles de f et celles de g.
2. Soit U le plan privé de l'origine, et $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.
   Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.
3. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x+y, xy)$. Trouver un ouvert connexe maximal $U \subset \mathbb{R}^2$ tel que g soit un difféomorphisme de U sur $g(U)$.
4. Soit h l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x,y) \to (e^x \cos y, e^x \sin y)$.
   Montrer que h est de classe C^1, que $Dh(x,y)$ est une isométrie pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, mais que h n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $h(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 ; on suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $||f(x) - f(y)|| \geqslant k||x-y||$.

1. Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3. Montrer que F est un difféomorphisme.

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0,0)$. Montrez qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exercice 14

(**Folium de Descartes**) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ et $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$.
(i) En quels points (a,b) peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites ? Calculer la dérivée de la fonction implicite lorsqu'elle existe et écrire l'équation de la tangente à C.
(i) Dessiner C en précisant l'asymptote à C.

Exercice 15

On considère le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 - 2z^2 & = & 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 & = & 4 \end{array} \right. .$$

Montrer que, pour x proche de l'origine, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x, y(x), z(x))$ soit solution du système. On déterminera y' en fonction de x, y et z' en fonction de x, z.