Université de Rennes 1–Année 2022/2023

PrépaAgreg—CCAN–Calcul Différentiel

Feuille de TD 2

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - xy^2$. Montrer que $(0,0)$ est le seul point critique de f, qu'il n'est pas un extremum local, mais que pourtant la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ admet en ce point un minimum local.

Exercice 2

Ecriver la formule de Taylor de second ordre pour chacune des fonctions suivantes au point (x_0,y_0) donné.

1. $f(x,y) = \sin(x+2y)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
2. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
3. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\cos xy$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
4. $f(x,y) = \sin(xy)+\cos(xy)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;
5. $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos y$, $(x_0,y_0) = (1,0)$.

Exercice 3

Trouver les points critiques des fonctions suivantes et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

1. $f(x,y) = x^3+6x^2+3y^2-12xy+9x$;
2. $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$;
3. $f(x,y,z) = \cos 2x \cdot \sin y + z^2$;
4. $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Étudier les extrema locaux de f.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f a un maximum M et un minimum m sur D.
3. Soit $(x,y) \in D$. Montrer que si $f(x,y) = M$ ou $f(x,y) = m$, alors $x^2+y^2 = 1$.
4. Étudier la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$. En déduire les valeurs de M et m.

Exercice 5

Trouver le point du plan d'équation $2x - y + z = 16$ dans $\mathbf{R}^3$ le plus proche de l'origine.

Exercice 6

Déterminer les extrema de $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ sur $[0,1]^2$.

Exercice 7

Déterminer un triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle donné.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xe^y + ye^x$.

Montrer que $(-1,-1)$ est le seul extremum possible. A l'aide d'un développement limité de $\varphi(h) = f(-1+h,-1+h)$ et de $\psi(h) = f(-1+h,-1-h)$, montrer que f n'a pas d'extremum.

Exercice 9

1. Déterminer les extrema de la fonction $f(x,y) = xy$ sur le cercle unité $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, | x^2+y^2 = 1\}$.
2. Même question pour la fonction $f(x,y) = xy^2$.

Exercice 10

Déterminer le minimum et maximum de la fonction $f(x,y,z) = 5x+y-3z$ sur l'intersection du plan $\Sigma = \{x+y+z = 0\}$ avec la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11

Déterminer les extrema de la fonction $f(x,y,z) = 2x+3y+2z$ sur l'intersection du plan d'équation $x+z = 1$ avec le cylindre $\mathscr{Z} = \{x^2+y^2 = 2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 12

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un fermé non vide de E et $x \in E$ un point, appartenant ou non à F. Montrer qu'il existe un point $\bar{x} \in F$ tel que $\|x-\bar{x}\| = \inf_{z\in F} \|x-z\|$. (Question subsidiaire : ce point est-il unique ?)
2. On se place désormais dans l'algèbre $M_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 à coefficients réels, munie de la norme

$$\left\| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

et on considère l'ensemble $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant égal à 1.

   (a) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ est fermé dans $M_2(\mathbf{R})$.

   (b) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ n'est *pas* bornée.

   (c) Soit $f : M_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ la fonction qui à une matrice M associe $f(M) = \|M\|$.

      i. Montrer que $f_{|\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})}$ est minorée et atteint son infimum.

      ii. Calculer le gradient de f. Est-il toujours défini ?

      iii. Trouver le ou les extrema de $f_{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$. Montrer qu'il s'agit du minimum et en déduire la valeur en cette ou ces matrices.

Exercice 13

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soient r et θ les coordonnées polaires standard dans le plan de telle sorte que l'association $]0,+\infty[\times]0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}, \quad (r,\theta) \longmapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ soit un changement de variables. Soit F la fonction définie par $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. C'est "l'expression de f en coordonnées polaires". Montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta). \tag{1}$$

Cette formule calcule "le Laplacien en coordonnées polaires."

Exercice 14

Les variables étant notées x et t, trouver la solution générale $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de "l'équation des ondes" : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$. Trouver ensuite la solution unique de l'équation des ondes qui satisfait aux conditions initiales

$$f(x,0) = \sin x,\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = -\cos x. \tag{2}$$

Exercice 15

Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *harmonique* si $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Une fonction $f(x,y)$ est dite *radiale* si ses valeurs au point (x,y) ne dépendent que de la distance $r = \sqrt{x^2+y^2}$ à l'origine, c'est à dire si $f(x,y) = F(r) = F(\sqrt{x^2+y^2})$, où $F = F(r)$ est une fonction d'une seule variable.
Montrez que les seules fonctions radiales et harmoniques, dans $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine, sont les fonctions $C\ln(r)+D = C\ln(\sqrt{x^2+y^2})+D$, où C et D sont des constantes.

Exercice 16

Vérifiez que les fonctions suivantes sont harmoniques dans $\mathbb{R}^2$:

1. $e^x \cos y$;
2. $x^3 - 3xy^2$;
3. pour tout entier $k \geqslant 0$, la fonction $f(x,y) = r^k\cos(k\theta)$, où r et θ sont les coordonnées polaires de (x,y).

Exercice 17

Dans $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine, montrez que les seules fonctions harmoniques et *radiales* (c'est-à -dire ne dépendant que de la distance ρ de (x,y,z) à l'origine) sont les fonctions $f(x,y,z) = \frac{C}{\rho} + D = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + D$, où C et D sont des constantes.