Université de Rennes 2023-2024
Agrégation externe

Compléments sur l'équation de chaleur

Miguel Rodrigues

Ces notes de cours sont consacrées à l'équation de chaleur. On renvoie à [Joh78, Chapitre 7] et [Eva10] pour des références bibliographiques.

1 Équations sans bord

1.1 Modèle

On se donne deux temps $t_0 < T$, un coefficient de diffusion $\kappa\,:\,]t_0,T[\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+^*$, une source $Q\,:\,]t_0,T[\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ et une donnée initiale réelle $\theta_0\,:\,\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. On considère alors pour une inconnue réelle θ définie sur $[t_0,T[\times\mathbf{R}$ l'*équation de la chaleur* ou *équation de diffusion* associée

$$\partial_t\theta-\partial_x(\kappa\,\partial_x\theta)=Q\,,\qquad \text{sur }]t_0,T[\times\mathbf{R} \tag{1.1}$$

complétée par la donnée initiale

$$\theta(t_0,\cdot)=\theta_0\,. \tag{1.2}$$

L'équation exprime un bilan pour la densité θ avec une source volumique Q et un flux surfacique donné comme un multiple négatif du gradient spatial de la densité. Ainsi le mécanisme interne de l'équation est d'étaler les valeurs pour contrer les concentrations. On peut s'attendre à ce que cela régularise (par atténuation des pentes) et fasse converger vers une constante (en l'absence de source).

La modélisation historique conduisant à cette équation est celle due à Joseph Fourier d'une description simplifiée de l'évolution d'une densité de température θ, avec une source de chaleur Q et un coefficient de diffusion thermique κ. Dans ce contexte la relation qui donne le flux comme $-\kappa\partial_x\theta$ est appelée loi de Fourier et l'analyse de Fourier a été initialement développée pour sa résolution dans le cas κ constant. Dans la vie quotidienne on oppose ce phénomène d'étalement de la chaleur, appelé diffusion, à celui de déplacement par un champs de vitesse cohérent u, appelé convection, où le flux est en $\theta\,u$. Les déplacements convectifs sont plus rapides que les diffusifs.

Cependant il ne faut pas se laisser tromper par le nom de l'équation et son origine. Le mécanisme de diffusion, comme celui de convection, est présent dans beaucoup de situations différentes (dynamique des populations animales, cinétiques des réactions chimiques,...). Quand Q est donné comme une fonction de θ, on parle d'équations de réaction-diffusion.

Le cas κ constant est suffisamment riche pour que l'on se contente de celui-ci. Si κ_0 note cette valeur constante, alors en remplaçant (t,Q) par $(t/\kappa_0,Q/\kappa_0)$ on peut se ramener au cas où κ_0 vaut 1, cela qu'on fera dorénavant. Nous allons aussi supposer $t_0=0$.

Une explication microscopique/particulaire de ces équations est arrivée tardivement. C'est lié au fait que l'explication microscopique la plus simple est stochastique. En un certain sens, l'équation peut être résolue par une méthode des caractéristiques dont les courbes caractéristiques résolvent des équations différentielles stochastiques (notion qui dépasse largement le cadre de l'agrégation). En termes plus physiques, la densité associée à des particules suivant un mouvement brownien vérifie l'équation de la chaleur.

Notons que les éléments de modélisation suggèrent que sans source, l'équation de la chaleur doit préserver la positivité et l'intégrale. Observons aussi que l'équation duale de $\partial_t\theta - \partial_x^2\theta = 0$ est $\partial_t\varphi + \partial_x^2\varphi \;=\; 0$. Explicitement si (θ,φ) vérifient ces équations alors

$$\partial_t(\varphi\,\theta) + \partial_x(u\partial_x\varphi - \varphi\partial_x u) \;=\; 0\,.$$

Pour étudier l'équation directe vers le futur, il faut étudier l'équation duale vers le passé. Avec cela [1] en tête on se rend compte que l'équation de la chaleur est essentiellement sa propre duale.

1.2 Invariance d'échelle et solution fondamentale

Focalisons-nous sur

$$\partial_t\theta - \partial_x^2\theta = 0\,, \qquad \text{sur }]0,T[\times\mathbf{R}\,. \tag{1.3}$$

L'équation force le fait qu'une dérivée en temps coïncide avec deux dérivées en espace. Une conséquence est que pour tout $\lambda > 0$ si θ résout (1.3) (sur $]0,T[\times\mathbf{R}$) alors $(t,x) \mapsto \theta(\lambda^2\,t,\lambda\,x)$ résout la même équation (sur $]0,T/\lambda[\times\mathbf{R}$). Cette invariance d'échelle suggère que s'il existe un échelle spatiale caractéristique au temps t c'est $\sqrt{t}$.

Cela motive de chercher une solution particulière sous la forme $(t,x) \mapsto a(t)\,G(x/\sqrt{t})$. La préservation de l'intégrale force $a(t) = 1/\sqrt{t}$. En insérant cet *ansatz* dans l'équation, elle se réduit à pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, $-\frac{1}{2}G(\xi) - \frac{1}{2}\xi G'(\xi) = G''(\xi)$, c'est-à-dire $(G' + \frac{1}{2}(\cdot)G)' \equiv 0$. Si l'on cherche des solutions dont les valeurs et les dérivées décroissent vite à l'infini, cela force $G(\xi) = C_0\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\xi^2}$ pour une constante C_0. Reste à déterminer la condition initiale en $t = 0$ associée à cette solution. La solution se concentrant en 0 en maintenant son intégrale constante, sa limite (en un sens faible) est [2]

$$\left(\int_{\mathbf{R}} G\right)\delta_0 \;=\; C_0\,\sqrt{4\pi}\,\delta_0\,.$$

Par exemple, on a pour toute fonction φ continue et bornée

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{t}} G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbf{R}} G(\xi)\,\varphi(\sqrt{t}\,\xi)\,\mathrm{d}\xi \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \varphi(0)\int_{\mathbf{R}} G$$

par le théorème de convergence dominée.

Remarque 1 *Sur $\mathbf{R}^d$, les équivalents des équations* (1.1) *et* (1.3) *seraient réciproquement* $\partial_t\theta - \mathrm{div}(\kappa\nabla\theta) = f$ *et* $\partial_t\theta - \Delta\theta = 0$. *La plupart des résultats des présentes notes s'adaptent à ce cadre multidimensionnel avec des changements adéquats. Par exemple, en dimension d on utiliserait également l'invariance par rotation pour motiver la recherche d'une solution radiale et la préservation de l'intégrale forcerait $a(t) = t^{-d/2}$.*

La plupart des arguments heuristiques employés ci-dessus sont robustes. Ce qui est miraculeux c'est d'avoir pu résoudre explicitement l'équation différentielle pour le profil G et calculer l'intégrale correspondante.

1. Quitte à remplacer t par $-t$ dans l'une des équations pour comparer des équations dans la même direction.
2. On rappelle que l'intégrale d'une fonction gaussienne se calcule instantanément par un changement de coordonnée polaire sur son carré.

En choisissant $C_0 = 1/\sqrt{4\pi}$, on obtient une solution $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,T[\times\mathbf{R}$ de donnée initiale δ_0. Par convolution spatiale on peut générer des solutions pour n'importe quelle donnée initiale.

Théorème 2 *Pour tout $T>0$, $p\in[1,\infty]$ et $u_0\in L^p(\mathbf{R})$, avec u_0 uniformément continue si $p=\infty$, il existe un unique $u\in\mathcal{C}^0([0,T[;L^p(\mathbf{R}))$ tel que*

1. *$u_{|]0,T[\times\mathbf{R}}$ soit une fois dérivable en temps et deux fois dérivables en espace avec u, $\partial_t u$, $\partial_x u$, $\partial_x^2 u$ majorées ponctuellement par $x\mapsto C\,\mathrm{e}^{C\,x^2}$ pour un certain $C>0$;*
2. *u résout (1.3) sur $]0,T[\times\mathbf{R}$ et $u(0,\cdot)=u_0$.*

De plus la solution est donnée par, pour tout $t>0$,

$$u(t,\cdot) \;=\; \frac{1}{\sqrt{t}}G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right)\star u_0$$

où

$$G\,:\,\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad \xi\mapsto\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4}}\,.$$

En particulier, $u_{|]0,T[\times\mathbf{R}}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $t>0$, $u(t,\cdot)$ est analytique de rayon de convergence infinie.

Démonstration. Donnons seulement les principaux éléments de la démonstration.
Commençons par la partie existence. On note u la fonction définie par la convolution. Pour vérifier l'équation il faut justifier la dérivation sous le signe intégral de la convolution. Le plus efficace est de montrer directement que pour tout $t>0$, $u(t,\cdot)$ est analytique en espace (avec une extension holomorphe à $\mathbf{C}$) et que pour tout x, $u(\cdot,x)$ est analytique en temps (avec une extension holomorphe au demi-plan de partie réelle strictement positive). Les estimations justifiant cela sont que si $z\in\mathbf{C}$, pour tout $t>0$, $y\in\mathbf{R}$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2-2z\,y+|y|^2}{4\,t}}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{4\pi\,t}}\,\mathrm{e}^{\frac{|z|^2}{4\,t}}\,\mathrm{e}^{\frac{|z|\,|y|}{2\,t}-\frac{|y|^2}{4\,t}}$$

(ce qui donne un contrôle quand $|z|\leq R$) et si $\tau\in\mathbf{C}$, avec $\mathrm{Re}(\tau)>0$ pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{4\pi}\sqrt{\tau}}\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4\,\tau}}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{4\pi}\sqrt{|\tau|}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{Re}(\tau)}{|\tau|^2}\frac{|x-y|^2}{4}}$$

(ce qui donne un contrôle quand $\mathrm{Re}(\tau)\geq r$ et $r\leq|\tau|\leq R$, avec $0<r\leq R$). En utilisant récursivement l'équation on déduit que u est en fait $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,T[\times\mathbf{R}$. Pour vérifier la continuité au temps initial, il suffit d'observer que

$$\|u(t,\cdot)-u_0\|_{L^p(\mathbf{R})}\leq\int_{\mathbf{R}}G(y)\,\|u_0(\cdot-\sqrt{t}\,y)-u_0\|_{L^p(\mathbf{R})}\,\mathrm{d}y$$

et d'appliquer le théorème de convergence dominée. Le même argument fournit la continuité en tout temps.
Passons maintenant à la partie unicité. On souhaite la déduire de l'existence pour le problème dual. Il faut vérifier que l'on peut obtenir de l'existence avec des poids gaussiens en partant d'une donnée à support compacte. Cela découle du fait que si $|y|\leq R$, alors

$$\frac{|x-y|^2}{4\,t}\geq\frac{|x|^2-R\,|x|}{4\,t}\,.$$

On peut ainsi conclure à l'unicité par dualité sur $[0,t_1]\cap[0,T[$ avec $1/(4t_1)<C$. Puisque cette contrainte ne dépend que de C on peut l'itérer pour couvrir $[0,T[$. ∎

Même avec une donnée initiale à support compact $u(t,\cdot)$ ne peut pas être mieux localisé que $t^{-1/2}\,G(\cdot/\sqrt{t})$. Plus encore, on peut montrer que la condition de localisation gaussienne est optimale. La formule due à Andreï Tychonoff

$$u(t,x) := \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(t)\,\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

avec $g :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{-1/t^{\alpha}}$, $\alpha > 1$, fournit une solution de donnée initiale nulle (la convergence étant localement uniforme).

Notons que si $u_0 \geq 0$ et u_0 n'est pas nul, alors pour tout $t > 0$, en tout x, $u(t,x) > 0$. Cela montre à la fois un principe du maximum fort et une vitesse de propagation infinie. Il découle du principe maximum fort que si u_0 n'est pas constant alors pour tout $t > 0$, $\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} < \|u_0\|_{L^\infty}$. Le théorème de Fubini montre que l'intégrale en espace est bien constante en temps. Cependant il découle de cette conservation et du principe maximum fort que si u_0 n'est pas de signe constant alors pour tout $t > 0$, $\|u(t,\cdot)\|_{L^1} < \|u_0\|_{L^1}$.

Notons aussi que le théorème contient une forme d'irréversibilité : on ne peut pas trouver de solution raisonnable sur $]0,t]$ avec une donnée fixée en t qui ne soit pas analytique, ou qui soit analytique de rayon de convergence fini.

1.3 Estimations L^p

Par souci de concision, notons

$$\mathrm{e}^{t\partial_x^2} u_0 := \frac{1}{\sqrt{t}} G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) \star u_0\,.$$

L'inégalité de Young pour la convolution combinée avec un changement de variables donne les estimations suivantes.

Proposition 3 *Pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $1 \leq p \leq q \leq \infty$, il existe C tel que pour tout $t > 0$ et tout $u_0 \in L^p(\mathbf{R})$, on a $\partial_x^k(\mathrm{e}^{t\partial_x^2} u_0) \in L^q(\mathbf{R})$ avec*

$$\|\partial_x^k(\mathrm{e}^{t\partial_x^2} u_0)\|_{L^q(\mathbf{R})} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+\frac{k}{2}}}\,\|u_0\|_{L^p(\mathbf{R})}\,.$$

Cela montre ce que coûte la régularisation quand $t \to 0$ et donne de la décroissance vers zéro lorsque $t \to \infty$. Le taux de décroissance $1/\sqrt{t}$ dans L^∞ est le taux maximal de décroissance même partant d'une donnée $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. En développant

$$G\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right) - G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = -\frac{y}{\sqrt{t}} \int_0^1 G'\left(\frac{x-\tau\,y}{\sqrt{t}}\right) \mathrm{d}\tau$$

on obtient en effet que

$$\left\| \mathrm{e}^{t\partial_x^2} u_0 - \left(\int_{\mathbf{R}} u_0\right) \frac{1}{\sqrt{t}} G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) \right\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \leq \frac{C}{t}\, \|\,|\cdot|\,u_0\|_{L^1(\mathbf{R})}\,.$$

Seules les solutions d'intégrale nulle peuvent décroître plus vite.

Il est possible, mais pas si facile, d'obtenir ces bornes par des estimations d'énergie. Donnons quelques exemples simples. Si $\eta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est $\mathcal{C}^2$ alors (1.3) implique

$$\partial_t(\eta(\theta)) - \partial_x^2(\eta(\theta)) + \eta''(\theta)(\partial_x\theta)^2 = 0\,.$$

Ainsi si η est convexe et $\partial_x\eta(\theta)$ décroît à l'infini,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\mathbf{R}} \eta(\theta)\right) + \int_{\mathbf{R}} \eta''(\theta)(\partial_x\theta)^2 = 0\,.$$

Cela donne par exemple

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + 2\,\|\partial_x\theta\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \;=\; 0\,.$$

Puisque $\partial_x\theta$ vérifie la même équation, il vérifie une borne identique que l'on peut combiner en

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\theta\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 + 2\,(\cdot)\,\|\partial_x\theta\|_{L^2(\mathbf{R})}^2\right)(t) + 4\,t\,\|\partial_x^2\theta(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 \;=\; 0\,.$$

En intégrant on déduit

$$\|\partial_x\theta(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \frac{1}{\sqrt{2\,t}}\,\|\theta_0\|_{L^2(\mathbf{R})}\,.$$

Les estimations sont en particulier utiles pour analyser le traitement du cas affine à partir du cas linéaire *via* la formule de Duhamel, ce que nous ne ferons pas en détails ici. Notons cependant qu'il n'y a aucun espoir d'obtenir une solution très régulière avec un terme source qui ne l'est pas, puisque l'équation conduirait à une contradiction. Les estimations suggèrent que par rapport au terme source l'on peut gagner une dérivée spatiale, mais pas gagner deux dérivées spatiales parce que $t \mapsto t^{-1/2}$ est localement intégrable au voisinage de zéro, mais $t \mapsto t^{-1}$ ne l'est pas.

1.4 Analyse de Fourier

Dans ce qui précède seule la preuve d'unicité sous la borne $C\,\mathrm{e}^{C\,x^2}$ a vraiment utilisée la forme explicite de G. Presque tout se montre à partir de la seule information que la transformée de Fourier de G est donnée par $\widehat{G}(\eta) = \mathrm{e}^{-\eta^2}$, ce qui se déduit directement de l'équation qui implique

$$\widehat{u(t,\cdot)}(\eta) \;=\; \mathrm{e}^{-t\,\eta^2}\,\widehat{u_0}(\eta)\,.$$

Par exemple la forme $t^{-1/2}\,G(\cdot/\sqrt{t})$ provient directement du fait que $\mathrm{e}^{-t\,\eta^2}$ est une fonction de $\sqrt{t}\,\eta$. De même la proposition 3 découle du fait que la transformée de Fourier préserve la classe de Schwartz et que $\eta^k\,\mathrm{e}^{-t\,\eta^2}$ s'écrit $t^{-k/2}$ multiplié par une fonction de la classe de Schwartz évaluée en $\sqrt{t}\,\eta$.
L'analyticité spatiale se lit sur la localisation exponentielle de la transformée de Fourier.
Si l'on se contente des données initiales L^2 dans le théorème 2 et des bornes $L^p \to L^q$ avec $1 \leq p \leq 2$ et $2 \leq q \leq \infty$ dans la proposition 3, on peut même obtenir des démonstrations plus rapides. Par exemple,

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{t\partial_x^2}u_0\|_{L^\infty(\mathbf{R})} &\leq \frac{1}{2\pi}\,\|\eta \mapsto \mathrm{e}^{-t\,\eta^2}\,\widehat{u_0}(\eta)\|_{L^1(\mathbf{R})}\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\,\|\eta \mapsto \mathrm{e}^{-t\,\eta^2}\|_{L^1(\mathbf{R})}\,\|\widehat{u_0}\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\,t}}\,\|u_0\|_{L^1(\mathbf{R})}\,.\end{aligned}$$

2 Domaines bornés

La propagation à vitesse infinie du cas sans bord suggère fortement que l'ajout de conditions de bord va immédiatement avoir un impact partout.
On peut aussi s'attendre à ce que certaines conditions de bord mettent fin en temps long au phénomène d'étalement vers zéro. Pour chaque choix de conditions de bord, on peut se faire une idée de ce qui peut arriver en s'intéressant d'abord au problème stationnaire, c'est-à-dire aux solutions ne dépendant pas du temps. On tombe alors sur une équation de Poisson (ou de Laplace en l'absence de source).
Enfin l'incompatibilité entre la condition initiale et les conditions de bord peut aussi limiter la régularité en temps au temps initial.

2.1 Conditions de bord périodiques

Le théorème 2 permet déjà de prendre en compte des données périodiques (dans le cas $p = \infty$) et l'unicité implique que la périodicité est préservée par l'évolution. On peut évidemment également lire la préservation de la périodicité sur la formule de convolution.

Quand θ_0 est périodique il est tout de même utile de récrire l'analyse en des termes adapté à la périodicité. Si θ_0 est [3] $\mathbf{Z}$-périodique, alors [4]

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{t\partial_x^2}\theta_0)(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{t}}G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right)\star\theta_0\right)(x)\\ &= \left(G_{\text{pér}}(t,\cdot)\star_{\text{pér}}\theta_0\right)(x)\end{aligned}$$

avec

$$G_{\text{pér}}(t,x) := \sum_{x_0\in\mathbf{Z}}\frac{1}{\sqrt{t}}G\left(\frac{x+x_0}{\sqrt{t}}\right).$$

Il découle à la fois de l'équation et de la formule sommatoire de Poisson que les coefficients de Fourier de $G_{\text{pér}}(t,\cdot)$ sont donnés par

$$c_\eta(G_{\text{pér}}(t,\cdot)) = \mathrm{e}^{-t\,(2\pi\eta)^2}, \qquad \eta\in\mathbf{Z}.$$

L'étude de cette représentation permet d'étendre le théorème 2 au cas où θ_0 est $\mathbf{Z}$-périodique, mais seulement $L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R})$, pour un $1\leq p<\infty$. Elle permet aussi de remplacer la proposition 3 par la proposition suivante.

Proposition 4 *Pour tout $k\in\mathbf{N}$ et tout $1\leq p\leq q\leq\infty$, il existe C et $\omega>0$ tel que pour tout $t>0$ et tout θ_0 $\mathbf{Z}$-périodique avec $(\theta_0)_{|[0,1]}\in L^p([0,1])$, on a $(\partial_x^k(\mathrm{e}^{t\partial_x^2}\theta_0))_{|[0,1]}\in L^q([0,1])$ avec*

$$\left\|\partial_x^k\left(\mathrm{e}^{t\partial_x^2}(\theta_0)-\int_0^1\theta_0\right)\right\|_{L^q([0,1])} \leq C\left(1+\frac{1}{t^{\frac12\left(\frac1p-\frac1q\right)+\frac{k}{2}}}\right)\mathrm{e}^{-\omega\,t}\,\|\theta_0\|_{L^p([0,1])}.$$

Les conditions de bord périodiques cassent l'invariance d'échelle et déconnectent le temps court (régularisation à un coût algébrique) du temps long (décroissance exponentielle). En particulier elles discrétisent les pentes admissibles et limitent l'étalement ce qui conduit à la décroissance exponentielle vers les constantes.

Une partie des bornes se déduit encore facilement d'estimations d'énergie. Par exemple

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\|\theta-\int_0^1\theta_0\right\|^2_{L^2([0,1])}\right)(t) &= -2\,\|\partial_x\theta(t,\cdot)\|^2_{L^2([0,1])}\\ &\leq -8\,\pi^2\left\|\theta(t,\cdot)-\int_0^1\theta(t,y)\mathrm{d}y\right\|^2_{L^2([0,1])}\\ &= -8\,\pi^2\|\theta(t,\cdot)-\int_0^1\theta_0\|^2_{L^2([0,1])}\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|\theta(t,\cdot)-\int_0^1\theta_0\|_{L^2([0,1])} \leq \mathrm{e}^{-4\,\pi^2\,t}\|\theta_0-\int_0^1\theta_0\|_{L^2([0,1])}$$

Évidemment cette estimation s'obtient aussi plus trivialement par les séries de Fourier.

3. On peut normaliser la période en utilisant l'invariance d'échelle.
4. On utilise sans rappel les notations du complément sur les séries de Fourier.

Il est intéressant de noter qu'en un certain sens les effets de régularisation incluent une amélioration des conditions de bord. Si u_0 est seulement $\mathbf{Z}$-périodique avec $(u_0)_{|[0,1]} \in L^2([0,1])$, alors pour tout $t > 0$, $u(t,\cdot)$ est $\mathbf{Z}$-périodique et $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$, ce qui implique que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\partial_x^k u(t,0) = \partial_x^k u(t,1)$. Un réexamen de l'argument d'unicité montre que nous y utilisons déjà ces égalités avec $k = 0$ et $k = 1$. Une fois que l'on suppose celles-ci les autres peuvent se déduire de l'équation par dérivation en temps.

Puisque l'équation est d'ordre 2 en espace, il est cohérent de prescrire deux conditions ponctuelles pour obtenir l'unicité.

Si on veut étendre la régularité en temps jusqu'au temps initial, l'obstacle principal est la régularité de u_0, conditions de bord comprises, encodée par la décroissance des coefficients de Fourier. On renvoie aux différentes définitions/caractérisations de $H^k_{\text{pér}}([0,1])$ pour une discussion plus explicite. Ici une dérivée en temps coûte deux dérivées en espace en ce sens là : si $u_0 \in H^{2k}_{\text{pér}}([0,1])$, alors $t \mapsto (\mathrm{e}^{t\partial_x^2}(\theta_0))_{|[0,1]}$ appartient à $\mathcal{C}^k([0,+\infty[; L^2([0,1])$.

2.2 Conditions de Dirichlet

En dimension 1 le moyen le plus efficace de traiter les conditions de Dirichlet est de se ramener à un problème périodique.

Commençons par noter que l'on peut passer de conditions de bord inhomogènes à des conditions de bord homogènes en soustrayant une fonction arbitraire satisfaisant les conditions de bord et modifiant le terme source de manière correspondante.

En translatant en espace et en utilisant l'invariance d'échelle, on peut se ramener au cas où l'intervalle est $[0, \frac{1}{2}]$. Notons E l'application qui à $u \in L^1_{\text{loc}}([0, \frac{1}{2}])$ associe l'unique $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$, impair et $\mathbf{Z}$-périodique tel que $v_{|[0,\frac{1}{2}]} = u$. Cette application est une bijection entre $L^1_{\text{loc}}([0, \frac{1}{2}])$ et l'ensemble des fonctions $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$, impaires et $\mathbf{Z}$-périodiques.

L'intérêt de cette extension est que grâce à l'unicité des solutions si θ_0 est impair et $\mathbf{Z}$-périodique, alors c'est le cas de $\theta(t,\cdot) := \mathrm{e}^{t\partial_x^2}\theta_0$ pour tout $t > 0$. Cela implique pour tout $t > 0$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\partial_x^{2k}\theta(t,0) = 0$ et $\partial_x^{2k}\theta(t, \frac{1}{2}) = 0$.

Réciproquement pour $\theta_0 \in L^1_{\text{loc}}([0, \frac{1}{2}])$ et $k \in \mathbf{N}$, on a $E(\theta_0)_{|[0,1]} \in H^{2k}_{\text{pér}}$ si et seulement si $\theta_0 \in H^{2k}([0, \frac{1}{2}])$ et pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$ $\partial_x^{2\ell}\theta(t,0) = 0$ et $\partial_x^{2\ell}\theta(t, \frac{1}{2}) = 0$. Ces conditions sont équivalentes au fait que la solution de la chaleur associée est de classe $\mathcal{C}^k$ en temps comme application à valeurs dans L^2_{loc}.

Références

[Eva10] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[Joh78] F. John. *Partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, NY, third edition, 1978.