PRÉ-COMPACITÉ DANS LES ESPACES DE FONCTIONS

JULIEN SABIN

1. Motivation : le théorème de Riesz

Théorème 1 (Riesz)**.** *Soit E un espace vectoriel normé. Alors, $\overline{B}(0,1)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Remarque 2. La condition suffisante est “simple” : en effet, si E est dimension finie, on peut se donner une base quelconque de E et la norme infinie associée. Par compacité des segments dans $\mathbb{R}$, la sphère unité de E pour la norme infinie est compacte. On en déduit que la norme de départ sur E est équivalente à la norme infinie (en considérant l'application identité de E (muni de la norme infinie) dans E (muni de la norme de départ) ; qui est continue et donc atteint un minimum strictement positif sur la sphère unité pour la norme infinie qui est compacte comme on vient de le voir). Comme deux normes équivalentes définissent la même topologie et que la compacité de $\overline{B}(0,1)$ équivaut à la compacité de tous les fermés bornés, on déduit le résultat.

Remarque 3. Une conséquence importante est que les fermés bornés en dimension infinie ne sont pas forcément compacts (mais certains le sont ! Comme les singletons par exemple...). Ainsi, d'une suite bornée on ne sait pas forcément extraire une sous-suite convergente. Un exemple typique est celui d'un espace de Hilbert séparable H et d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H ; comme elle vérifie $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ pour tout $n \neq m$, elle ne peut posséder de sous-suite convergente.

Démonstration du théorème de Riesz. On suppose $\overline{B}(0,1)$ compacte et on montre qu'alors E est de dimension finie. Par Borel-Lebesgue, il existe $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$\overline{B}(0,1) \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \tfrac{1}{2}).$$

Soit à présent $x \in E$ et montrons que $x \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, ce qui prouve le résultat. Pour cela, il suffit de supposer par homogénéité que $x \in \overline{B}(0,1)$, et de montrer que $x \in \overline{\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)} = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Par définition des x_j, il existe $j_1 \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\|x - x_{j_1}\| < \tfrac{1}{2}.$$

Ainsi, $2(x - x_{j_1}) \in \overline{B}(0,1)$ et donc il existe $j_2 \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\|2(x - x_{j_1}) - x_{j_2}\| < \tfrac{1}{2},$$

ou de manière équivalente $\|x - x_{j_1} - \frac{1}{2}x_{j_2}\| < \frac{1}{4}$. En procédant par récurrence, on trouve pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un $j_n \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\|x - x_{j_1} - \tfrac{1}{2}x_{j_2} - \cdots - \tfrac{1}{2^n}x_{j_n}\| < \tfrac{1}{2^n}.$$

Comme $\overline{x_{j_1} + \frac{1}{2}x_{j_2} + \cdots + \frac{1}{2^n}x_{j_n}} \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ et que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, cela démontre bien que $x \in \overline{\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)}$.

□

Remarque 4. Malgré ce résultat, on a quand même parfois besoin de faire converger des sous-suites en dimension infinie (penser à n'importe quel problème d'optimisation en dimension infinie). Parfois, on peut s'en sortir à l'aide de la complétude. L'exemple typique est le théorème de projection sur un convexe fermé C dans un espace de Hilbert H : si $x \in H$ et si on note $d(x, C) = \inf_{c\in C} \|x-c\|$, on veut montrer qu'il existe $c^* \in C$ tel que $\|x-c^*\| = d(x, C)$. Pour cela, on prend $(c_n) \subset C$ une suite telle que $\|x - c_n\| \to d(x, C)$ lorsque $n \to +\infty$, et on veut faire converger (c_n) pour obtenir le c^* comme limite des (c_n) (même une sous-suite nous suffirait). Ce qui fait marcher l'argument dans le cas est l'identité du parallélogramme, qui montre que pour tout n, m on a

$$\|c_n - c_m\|^2 + \|c_n - x + c_m - x\|^2 = 2\|c_n - x\|^2 + 2\|c_m - x\|^2.$$

Comme on a de plus par convexité de C

$$\|c_n - x + c_m - x\|^2 = 4\|\tfrac{c_n+c_m}{2} - x\|^2 \geqslant 4d(x, C)^2,$$

on déduit que

$$\|c_n - c_m\|^2 \leqslant 2(\|c_n - x\|^2 - d(x, C)^2) + 2(\|c_m - x\|^2 - d(x, C)^2).$$

Comme le terme de droite tend vers 0 lorsque $n, m \to +\infty$, on déduit que (c_n) est de Cauchy et on conclut par complétude de H. Malheureusement, ce cas de figure favorable ne se présente pas toujours et dans la suite on donne quelques outils pour faire converger des (sous-)suites en dimension infinie.

2. Le théorème d'Ascoli-Arzela

Définition 5. Soit E un espace métrique. Un sous-ensemble A de E est dit *relativement compact*, ou *pré-compact*, si $\overline{A}$ est compact, ie si de toute suite de A on peut extraire une sous-suite convergente dans E.

Remarque 6. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, A est pré-compact si et seulement si A est borné.

Théorème 7 (Ascoli-Arzela)**.** *Soient (E, d_E) un espace métrique compact, (F, d_F) un espace métrique complet et A une partie de l'espace métrique $(C^0(E, F), d_\infty)$, où $C^0(E, F)$ désigne l'ensemble des fonctions continues de E dans F muni de la distance*

$$\forall f, g \in C^0(E, F), \quad d_\infty(f, g) = \sup_{x\in E} d_F(f(x), g(x)).$$

Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) *A est une partie relativement compacte de $(C^0(E, F), d_\infty)$*

*(ii) A est une partie **équicontinue** de $(C^0(E,F), d_\infty)$, i.e.,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in A, \forall x, y \in E,\ d_E(x,y) < \delta, \quad d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

et A est ponctuellement relativement compacte i.e.,

$$A_x = \{f(x) : f \in A\} \subset F,$$

est une partie relativement compacte de F pour tout $x \in E$.

Remarque 8. Un cas d'application typique des hypothèses ci-dessus est celui où E est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$. Dans ce cas, A_x est relativement compacte si et seulement si A_x est bornée pour tout $x \in E$. L'hypothèse d'équicontinuité est de plus typiquement vérifiée si les fonctions de A sont uniformément hölderiennes, c'est-à-dire s'il existe $M, \alpha > 0$ tels que pour tout $f \in A$ et tout $x \in E$ on a

$$d_F(f(x), f(y)) \leqslant M d_E(x,y)^\alpha.$$

Il faut donc que la constante M et l'exposant de Hölder α soient les même pour toutes les fonctions de A. Dans le cas $\alpha = 1$ (fonctions lipschitziennes), on peut obtenir cette hypothèse en contrôlant uniformément les dérivées des fonctions de A ; par exemple si E est une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ et si

$$\sup_{f \in A} \sup_{x \in E} \|D_x f\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty.$$

Exemple 9. L'ensemble

$$A = \{f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f\ C^1,\ \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leqslant 1\}$$

est pré-compact pour la topologie de la convergence uniforme.

Preuve du théorème d'Ascoli. Montrons d'abord la condition nécessaire. Supposons donc A pré-compacte. Pour $x \in E$, l'application d'évaluation $\mathrm{ev}_x : f \in A \mapsto f(x) \in F$ est continue donc $\mathrm{ev}_x(\overline{A})$ est compact. Ainsi, $A_x \subset \mathrm{ev}_x(\overline{A})$ est pré-compact. Montrons maintenant l'équicontinuité de A. Soit donc $\varepsilon > 0$. Par pré-compacité de A, il existe $f_1, \ldots, f_n \in A$ tels que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^n B(f_j, \tfrac{\varepsilon}{3}).$$

Les f_j sont continues sur E compact donc uniformément continues. Soit donc $\delta > 0$ tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $x, y \in E$ avec $d_E(x,y) < \delta$ on a $d_F(f_j(x), f_j(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit maintenant $f \in A$ et $x, y \in E$ tels que $d_E(x,y) < \delta$. Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $d_\infty(f, f_j) < \frac{\varepsilon}{3}$. Par inégalité triangulaire, on a alors

$$d_F(f(x), f(y)) \leqslant d_F(f(x), f_j(x)) + d_F(f_j(x), f_j(y)) + d_F(f_j(y), f(y)) < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

ce qui démontre l'équicontinuité de A.

Montrons à présent la condition suffisante. Pour montrer que A est pré-compacte, on considère une suite $(f_n) \subset A$ et on va en trouver une sous-suite qui converge uniformément. Comme E est (métrique) compact, E est séparable : il contient une suite (x_k) dense. Par pré-compacité de A_{x_k} pour tout k et par un argument diagonal, on peut trouver une sous-suite

$(f_{\varphi(n)})$ de (f_n) telle que $(f_{\varphi(n)}(x_k))_n$ converge dans F pour tout k. A l'aide de l'hypothèse d'équicontinuité et de complétude de F, on va construire $f : E \to F$ telle que $(f_{\varphi(n)})$ converge uniformément vers f. Définissons déjà $f(x_k) := \lim_{n\to\infty} f_{\varphi(n)}(x_k)$. Soit ensuite $x \in E$. Par densité de (x_k) dans E, soit $(y_\ell) \subset (x_k)$ telle que $y_\ell \to x$ quand $\ell \to +\infty$. Montrons que $(f(y_\ell))$ converge en montrant qu'elle est de Cauchy dans F complet. Soit donc $\varepsilon > 0$. Par équicontinuité de A, soit $\delta > 0$ tel que pour tout $g \in A$ et pour tout $x, y \in E$ tels que $d_E(x, y) < \delta$ on a $d_F(g(x), g(y)) < \varepsilon$. Comme (y_ℓ) converge vers x elle est en particulier de Cauchy dans E. Soit donc $L \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $\ell, \ell' \geqslant L$ on a $d_E(y_\ell, y_{\ell'}) < \delta$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $d_F(f_{\varphi(n)}(y_\ell), f_{\varphi(n)}(y'_\ell)) < \varepsilon$. A la limite $n \to +\infty$, on trouve donc que pour tous $\ell, \ell' \geqslant L$ on a $d_F(f(y_\ell), f(y_{\ell'})) < \varepsilon$, ce qui prouve que la suite $(f(y_\ell))$ est de Cauchy dans F complet. Pour pouvoir définir $f(x) := \lim_{\ell\to\infty} f(y_\ell)$, il faut s'assurer que la limite de $(f(y_\ell))$ ne dépend pas du choix de la suite (y_ℓ) approchant x. En effet, si $(z_\ell) \subset (x_k)$ est une telle autre suite, alors on a encore $d_E(y_\ell, z_\ell) < \delta$ pour ℓ assez grand, assurant par le même argument que $d_F(f(y_\ell), f(z_\ell)) < \varepsilon$ pour ℓ assez grand. Ainsi, $(f(y_\ell))$ et $(f(z_\ell))$ convergent vers la même limite, que l'on appelle $f(x)$. Par encore le même argument, f est uniformément continue (et donc continue) sur E : en effet, si $\varepsilon > 0$, si $\delta > 0$ lui est associé par équicontinuité de A, et si $x, y \in E$ sont tels que $d_E(x, y) < \delta/2$, alors on peut trouver $(y_\ell), (z_\ell) \subset (x_k)$ tels que $y_\ell \to x$ et $z_\ell \to y$ lorsque $\ell \to +\infty$, et en particulier $d_E(y_\ell, z_\ell) < \delta$ pour $\ell \geqslant L$. On en déduit que pour tout $\ell \geqslant L$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $d_F(f_{\varphi(n)}(y_\ell), f_{\varphi(n)}(z_\ell)) < \varepsilon$. En prenant $n \to +\infty$ puis $\ell \to +\infty$, on trouve que $d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$, démontrant l'uniforme continuité de f. Montrons finalement que $(f_{\varphi(n)})$ converge uniformément vers f. Soit donc $\varepsilon > 0$, δ' de l'équicontinuité associé, et δ'' de l'uniforme continuité de f associé. Posons $\delta = \min(\delta', \delta'')$. Par compacité de E, soient $y_1, \ldots, y_m \subset (x_k)$ tels que $E \subset \cup_{j=1}^m B(y_j, \delta)$. Soit alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$ on a $d_F(f_{\varphi(n)}(y_j), f(y_j)) < \varepsilon$. Soit maintenant $x \in E$. Alors, il existe $J \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $d_E(x, y_J) < \delta$. Alors, pour $n \geqslant N$ on a par inégalité triangulaire

$$d_F(f_{\varphi(n)}(x), f(x)) \leqslant d_F(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(y_J)) + d_F(f_{\varphi(n)}(y_J), f(y_J)) + d_F(f(y_J), f(x)) < 3\varepsilon,$$

avec N indépendant de x. Ceci démontre que $(f_{\varphi(n)})$ converge uniformément vers f, ce qui achève la démonstration du théorème.

□

Corollaire 10 (Théorème de Cauchy-Peano)**.** *Soit $J \in \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f : J \times U \to \mathbb{R}^d$ une application continue, et $(t_0, x_0) \in J \times U$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $]t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0[\subset J$ et il existe $x :]t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0[\to U$ de classe C^1 telle que*

$$\begin{cases} \forall t \in]t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0[, \; x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Remarque 11. Ce théorème est bien sûr à comparer avec le théorème de Cauchy-Lipschitz qui suppose l'hypothèse plus forte que la fonction f est localement lipschiztienne. Dans ce cas, une telle solution au problème de Cauchy est de plus unique. Si f est seulement continue, le théorème de Cauchy-Peano ci-dessus assure encore l'existence d'une telle solution, mais plus l'unicité. De manière générale, l'unicité ne peut être obtenue comme l'exemple $f(t, x) = \sqrt{|x|}$

le démontre (les fonctions $x(t) = \frac{1}{4}(t-a)_+^2$ en sont les solutions pour tout $a \in \mathbb{R}$, et pour $a \geqslant 0$ elles satisfont toutes $x(0) = 0$).

Démonstration de Cauchy-Peano. On construit x comme limite uniforme de fonctions affines par morceaux. On commence par considérer $\varepsilon_0 > 0$ et $R > 0$ tels que $\mathcal{C} := [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times \overline{B}(x_0, R) \subset J \times U$ et

$$\varepsilon_0 \leqslant \frac{R}{1 + \max_{\mathcal{C}} \|f\|}.$$

Pour ce faire, on commence par considérer $\varepsilon > 0$ tel que $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}(x_0, R) \subset J \times U$ puis on diminue $\varepsilon > 0$ afin d'obtenir la seconde condition (en diminuant ε, le $\max \|f\|$ diminue). Ensuite, on se fixe $n \geqslant 1$ et on construit $x_n : [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \to \overline{B}(x_0, R)$ affine sur chaque $[t_j, t_{j+1}]$, où $t_j := t_0 + j\varepsilon_0/n$, pour $-n \leqslant j \leqslant n$. On construit x_n par récurrence sur j, de $j = 0$ à $j = n$ puis de $j = -1$ à $j = -n$. On définit donc x_n sur $[t_0, t_1]$ par

$$x_n(t) = x_0 + (t - t_0) f(t_0, x_0), \ t \in [t_0, t_1].$$

Une fois x_n construite sur $[t_0, t_1]$, on la construit sur $[t_1, t_2]$ par une relation similaire,

$$x_n(t) = x_n(t_1) + (t - t_1) f(t_1, x_n(t_1)), \ t \in [t_1, t_2]$$

où $x_n(t_1)$ est obtenu dans l'étape précédente. Remarquons que x_n construite ainsi est continue et affine par morceaux sur $[t_0, t_2]$. On itère alors la construction avec la relation

$$x_n(t) = x_n(t_j) + (t - t_j) f(t_j, x_n(t_j)), \ t \in [t_j, t_{j+1}].$$

Pour que cette construction soit bien définie, il faut s'assurer que $x_n(t_j) \in \overline{B}(x_0, R)$ pour tout j. C'est le cas car on a pour tout $t \in [t_0, t_1]$,

$$\|x_n(t) - x_0\| \leqslant \tfrac{\varepsilon_0}{n} \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leqslant R,$$

donc $x_n(t) \in \overline{B}(x_0, R)$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$. De même, pour tout $t \in [t_1, t_2]$,

$$\|x_n(t) - x_0\| \leqslant \|x_n(t_1) - x_0\| + \tfrac{\varepsilon_0}{n} \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leqslant 2\tfrac{\varepsilon_0}{n} \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leqslant R.$$

En itérant cette relation, on trouve que pour tout $0 \leqslant j \leqslant n-1$ et pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$ on a

$$\|x_n(t) - x_0\| \leqslant (j+1)\tfrac{\varepsilon_0}{n} \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leqslant R,$$

démontrant bien que $x_n(t) \in \overline{B}(x_0, R)$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_0]$. On effectue une construction similaire sur $[t_0 - \varepsilon_0, t_0]$, en commençant par définir

$$x_n(t) = x_0 + (t - t_0) f(t_0, x_0), \ t \in [t_{-1}, t_0],$$

puis en itérant cette construction. On montre que la suite (x_n) converge uniformément en appliquant le théorème d'Ascoli. On remarque déjà que pour tout $t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$, $x_n(t) \in \overline{B}(x_0, R)$ donc $(x_n(t))$ est bornée dans $\mathbb{R}^d$ donc pré-compacte. L'hypothèse d'équicontinuité se montre en remarquant que pour tout t, $\|x_n'(t)\| \leqslant \max_{\mathcal{C}} \|f\|$ et donc les (x_n) sont uniformément lipschitziennes (x_n n'est pas dérivable en t_j mais le théorème des accroissements finis s'applique quand même aux fonctions continues et C^1 par morceaux). Par le théorème d'Ascoli, il existe $x : [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \to \overline{B}(x_0, R)$ continue telle que $x_n \to x$ uniformément (à une sous-suite près). Montrons que x est alors C^1 et solution du problème de Cauchy. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le compact $\mathcal{C}$, elle y est uniformément continue : soit $\delta > 0$ associé au $\varepsilon > 0$. On remarque alors que pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$ on a $x_n'(t) - f(t, x_n(t)) = f(t_j, x_n(t_j)) - f(t, x_n(t))$ (pour $j \geqslant 0$) avec $|t - t_j| + |x_n(t) - x_n(t_j)| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{n}(1 + \max_{\mathcal{C}} \|f\|)$. Pour n assez grand tel que $\frac{\varepsilon_0}{n}(1 + \max_{\mathcal{C}} \|f\|) \leqslant \delta$, on déduit donc que $\|x_n'(t) - f(t, x_n(t))\| \leqslant \varepsilon$, et ce pour tout $t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$. Comme x_n est continue et C^1 par morceaux, pour tout $t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$ on a

$$x_n(t) = x_n(t_0) + \int_{t_0}^t x_n'(s)\, ds$$

et donc

$$\|x_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x_n(s))\, ds\| \leqslant \varepsilon_0 \varepsilon.$$

A la limite $n \to +\infty$ puis $\varepsilon \to 0$, on trouve que pour tout $t \in [t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]$ on a

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds,$$

montrant que x est C^1 et solution du problème de Cauchy.

□

3. Tension

Théorème 12 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)**.** *Soient $d \geqslant 1$, $1 \leqslant p < +\infty$, et $(f_n) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ une suite bornée telle que*

(1) Uniformément en n, on a

$$\lim_{|h| \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x+h) - f_n(x)|^p\, dx = 0;$$

(2) Uniformément en n, on a

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{|x| \geqslant R} |f_n(x)|^p\, dx = 0.$$

Alors, il existe une sous-suite de (f_n) qui converge dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 13. L'hypothèse (1) est une version L^p de l'hypothèse d'équicontinuité dans le théorème d'Ascoli. L'hypothèse (2) n'a pas d'équivalent dans le théorème d'Ascoli, et provient du caractère non-compact de $\mathbb{R}^d$ (alors que dans le théorème d'Ascoli, le domaine des fonctions considérées est compact). Sans l'hypothèse (2), la conclusion du théorème n'est plus nécessairement vérifiée comme le montre l'exemple $f_n(x) = f(x + ne_1)$ avec $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$. L'hypothèse (2) s'appelle hypothèse de *tension* (on dit que la suite (f_n) est *tendue*).

Remarque 14. Dans le cas $p = 2$, on peut utiliser la transformée de Fourier pour obtenir une condition suffisante pour avoir (1). En effet, si uniformément en n on a

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{|\xi| \geqslant R} |\widehat{f_n}(\xi)|^2\, d\xi = 0,$$

alors (1) est vérifiée. En effet, grâce au théorème de Plancherel on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x+h) - f_n(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} |e^{ih\cdot\xi} - 1|^2 |\widehat{f}_n(\xi)|^2\,d\xi.$$

Pour $|\xi| \leqslant R$ on utilise l'estimée $|e^{ih\cdot\xi} - 1| \leqslant R|h|$ et le caractère borné des (f_n) dans L^2, alors que pour $|\xi| \geqslant R$ on peut utiliser $|e^{ih\cdot\xi} - 1| \leqslant 2$ et notre nouvelle hypothèse pour déduire (1). Pour $p = 2$, les hypothèses (1) et (2) peuvent donc se réécrire de manière symétrique comme

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{|x|\geqslant R} |f_n(x)|^2\,dx = 0 = \lim_{R\to+\infty} \int_{|\xi|\geqslant R} |\widehat{f}_n(\xi)|^2\,d\xi,$$

uniformément en n.

Démonstration du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov. Par complétude de $L^p(\mathbb{R}^d)$, il suffit de montrer qu'il existe une sous-suite de (f_n) qui est de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. En premier lieu, il suffit de montrer que pour tout $R > 0$ il existe une sous-suite de (f_n) qui est de Cauchy dans $L^p(B(0,R))$. En effet, si c'est le cas, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on désigne par $(f_{\varphi_k(n)})_n$ une sous-suite de (f_n) qui est de Cauchy dans $L^p(B(0,k))$. En construisant les φ_k de manière itérative, on peut même supposer que φ_{k+1} est une extraction de φ_k pour tout k. On montre alors que $\psi(n) := \varphi_n(n)$ vérifie que $(f_{\psi(n)})_n$ est de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Par l'hypothèse (2), soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, m' \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_{|x|\geqslant N} |f_m(x) - f_{m'}(x)|^p\,dx \leqslant \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Pour $n, n' \geqslant N$, φ_n et $\varphi_{n'}$ sont des extractions de φ_N. On peut donc écrire $\varphi_n = \varphi_N \circ \widetilde{\varphi}_{n,N}$ et $\varphi_{n'} = \varphi_N \circ \widetilde{\varphi}_{n',N}$. Par hypothèse, la suite $(f_{\varphi_N(m)})_m$ est de Cauchy dans $L^p(B(0,N))$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, m' \geqslant N'$ on a

$$\|f_{\varphi_N(m)} - f_{\varphi_N(m')}\|_{L^p(B(0,N))} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{1/p}}.$$

Si $n, n' \geqslant \max(N, N')$, on sait que $\widetilde{\varphi}_{n,N}(n) \geqslant N'$ et que $\widetilde{\varphi}_{n',N}(n') \geqslant N'$, donc

$$\|f_{\psi(n)} - f_{\psi(n')}\|_{L^p(B(0,N))} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{1/p}}.$$

Ainsi, pour $n, n' \geqslant \max(N, N')$ on trouve que

$$\|f_{\psi(n)} - f_{\psi(n')}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|f_{\psi(n)} - f_{\psi(n')}\|^p_{L^p(B(0,N))} + \int_{|x|\geqslant N} |f_{\psi(n)}(x) - f_{\psi(n')}(x)|^p\,dx \leqslant \varepsilon^p,$$

et $(f_{\psi(n)})_n$ est bien de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Fixons donc à présent $R > 0$ et montrons que (f_n) admet une sous-suite de Cauchy dans $L^p(B(0,R))$. Pour cela, soit $\rho(x) = c(1 - |x|)_+$ avec $c > 0$ choisi tel que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on définit $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\rho(x/\varepsilon)$. Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $(\rho_\varepsilon * f_n)_n$ admet une sous-suite de Cauchy dans $L^p(B(0,R))$. En effet, si c'est le cas, pour $k \in \mathbb{N}^*$ soit $(\rho_{1/k} * f_{\varphi_k(n)})_n$ une telle sous-suite. Là encore, on peut supposer que φ_{k+1} est une extraction de φ_k pour tout k. On montre alors que pour $\psi(n) = \varphi_n(n)$, $(\rho_{1/n} * f_{\psi(n)})_n$ est de Cauchy dans $L^p(B(0,R))$. Soit donc $\varepsilon > 0$. On commence par remarquer qu'uniformément en n, on a

$$\lim_{\delta\to 0} \|\rho_\delta * f_n - f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

En effet, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(\rho_\delta * f_n)(x) - f_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\delta(y)(f_n(x-y) - f_n(x))\, dx,$$

d'où

$$\|\rho_\delta * f_n - f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\delta(y) \|f_n(\cdot - y) - f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\, dy.$$

Ainsi, pour tout $r > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|\rho_\delta * f_n - f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2 \sup_k \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \int_{|y| \geqslant r} \rho_\delta(y)\, dy + \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{|y| \leqslant r} \|f_k(\cdot - y) - f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

En prenant d'abord $\delta \to 0$ puis $r \to 0$ et utilisant l'hypothèse (1), on trouve le résultat. Soit donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\|\rho_{1/N} * f_m - f_m\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Comme $(\rho_{1/N} * f_{\varphi_N(m)})_m$ est de Cauchy dans $L^p(B(0,R))$, soit $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, m' \geqslant N'$ on a

$$\|\rho_{1/N} * f_{\varphi_N(m)} - \rho_{1/N} * f_{\varphi_N(m')}\|_{L^p(B(0,R))} \leqslant \varepsilon.$$

Pour $n, n' \geqslant \max(N, N')$ on trouve donc que

$$\begin{aligned} \|f_{\psi(n)} - f_{\psi(n')}\|_{L^p(B(0,R))} \leqslant \|f_{\psi(n)} - \rho_{1/N} * f_{\psi(n)}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|\rho_{1/N} * f_{\psi(n)} - \rho_{1/N} * f_{\psi(n')}\|_{L^p(B(0,R))} \\ + \|f_{\psi(n')} - \rho_{1/N} * f_{\psi(n')}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

En utilisant comme dans l'argument ci-dessus que $\psi(n) = \varphi_N(m)$ et $\psi(n') = \varphi_N(m')$ avec $m, m' \geqslant N'$, on obtient que pour $n, n' \geqslant \max(N, N')$,

$$\|f_{\psi(n)} - f_{\psi(n')}\|_{L^p(B(0,R))} \leqslant 3\varepsilon,$$

ce qui démontre que $(f_{\psi(n)})_n$ est de Cauchy dans $L^p(B(0,R))$. On se fixe donc $\varepsilon > 0$, et montrons que $(\rho_\varepsilon * f_n)_n$ admet une sous-suite de Cauchy dans $L^p(B(0,R))$. Pour cela, on va appliquer le théorème d'Ascoli à la suite $(\rho_\varepsilon * f_n)_n$. Il s'agit bien d'une famille équicontinue sur le compact $\overline{B}(0,R)$, car sa différentielle y est uniformément bornée. En effet, par l'inégalité de Hölder,

$$\|D(\rho_\varepsilon * f_n)\|_{L^\infty(\overline{B}(0,R))} = \|(D\rho_\varepsilon) * f_n\|_{L^\infty(\overline{B}(0,R))} \leqslant \|D\rho_\varepsilon\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

qui est bien uniformément bornée en n. Les $\rho_\varepsilon * f_n$ sont également ponctuellement uniformément bornées car

$$\|\rho_\varepsilon * f_n\|_{L^\infty(\overline{B}(0,R))} \leqslant \|\rho_\varepsilon\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

qui est aussi uniformément borné en n. Par le théorème d'Ascoli, $(\rho_\varepsilon * f_n)_n$ admet donc une sous-suite qui converge uniformément sur $\overline{B}(0,R)$, et donc dans $L^p(B(0,R))$ car $B(0,R)$ est de mesure finie. Ceci achève la preuve du théorème.

$\square$

Corollaire 15. *Soient $d \geqslant 1$, $1 \leqslant p < +\infty$, et $(f_n) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ une suite bornée telle que, uniformément en n on a*

$$\lim_{|h|\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x+h) - f_n(x)|^p \, dx = 0.$$

Alors, pour tout $R > 0$, il existe une sous-suite de (f_n) qui converge dans $L^p(B(0,R))$.

Démonstration. On applique le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov à la suite $g_n := \mathbb{1}_{B(0,R)} f_n$ avec $R > 0$ fixé. La condition (2) étant clairement vérifiée, vérifions la condition (1) sur la suite (g_n). Pour cela, on se donne $\varepsilon > 0$ et $\eta \in (0, R/2)$. Soit $h \in \mathbb{R}^d$ avec $|h| \leqslant \eta$. Sur $B(0, R-\eta)$, on remarque que $g_n(\cdot + h) - g_n = f_n(\cdot + h) - f_n$ et donc il existe $\eta' > 0$ tel que pour tout $|h| \leqslant \eta'$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|g_n(\cdot + h) - g_n\|_{L^p(B(0,R-\eta))} \leqslant \varepsilon.$$

Ensuite, on estime

$$\|g_n(\cdot + h) - g_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d \setminus B(0,R-\eta))} \leqslant 2\|f_n\|_{L^p(B(0,R+\eta)\setminus B(0,R-2\eta))},$$

puis pour $\delta > 0$ on a

$$\|f_n\|_{L^p(B(0,R+\eta)\setminus B(0,R-2\eta))} \leqslant \|\rho_\delta * f_n\|_{L^p(B(0,R+\eta)\setminus B(0,R-2\eta))} + \|\rho_\delta * f_n - f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

où ρ_δ est l'approximation de l'unité définie dans la preuve précédente. On fixe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|\rho_\delta * f_n - f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

On estime l'autre partie par

$$\|\rho_\delta * f_n\|_{L^p(B(0,R+\eta)\setminus B(0,R-2\eta))} \leqslant \|\rho_\delta\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |B(0,R+\eta) \setminus B(0,R-2\eta)|^{1/p},$$

En utilisant le fait que (f_n) est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et que $|B(0,R+\eta) \setminus B(0,R-2\eta)| \to 0$ lorsque $\eta \to 0$, on choisit $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|\rho_\delta\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} |B(0,R+\eta) \setminus B(0,R-2\eta)|^{1/p} \leqslant \varepsilon,$$

et on conclut que pour tout $|h| \leqslant \min(\eta, \eta')$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|g_n(\cdot + h) - g_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant 3\varepsilon.$$

Ceci démontre que (g_n) satisfait l'hypothèse (1), et on peut donc lui appliquer le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

$\square$

Corollaire 16. *Soit $d \geqslant 1$ et $s > 0$. Soit $(f_n) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ une suite telle qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}_n(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant C.$$

Alors, pour tout $R > 0$, il existe une sous-suite de (f_n) qui converge dans $L^2(B(0,R))$.

Démonstration. D'après le corollaire ci-dessus et la remarque dans le cas $p = 2$, il suffit de montrer que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{|\xi|\geqslant R} |\widehat{f}_n(\xi)|^2 \, d\xi = 0,$$

uniformément en n. Cela découle de l'estimée

$$\int_{|\xi|\geqslant R} |\widehat{f}_n(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant \frac{1}{(1+R^2)^s} \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}_n(\xi)|^2 \, d\xi.$$

□

Remarque 17. Le résultat ci-dessus s'appelle le *théorème de Rellich-Kondrachov*, d'une importance déterminante dans la théorie des espaces de Sobolev. Une autre manière de l'énoncer est de dire que l'injection $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ est localement compacte, c'est-à-dire que de toute suite bornée de $H^s(\mathbb{R}^d)$ on peut extraire une sous-suite qui converge fortement localement dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

4. Exercices sur le théorème d'Ascoli

Exercice 1.

On considère $E = C^0([0,1], \mathbb{C})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_{L^\infty([0,1])}$, et l'opérateur de Volterra

$$\begin{array}{rccc} V: & E & \to & E \\ & f & \mapsto & V(f), \end{array}$$

donné par

$$\forall x \in [0,1], \quad [V(f)](x) = \int_0^x f(t)dt.$$

(1) *Montrer que $V \in \mathcal{L}_c(E)$ et calculer sa norme $\|V\|_{\mathcal{L}_c(E)}$.*

(2) *Montrer que l'application V est injective mais pas surjective.*

(3) *Montrer que V est une application compacte, i.e, que $V(\overline{B_E(0,1)})$ est une partie relativement compacte de E.*

Exercice 2.

On considère $E = C^0([0,1], \mathbb{C})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_{L^\infty([0,1])}$, $K \in C^0([0,1]^2, \mathbb{C})$ et l'opérateur intégral de noyau K,

$$\begin{array}{rccc} T_K: & E & \to & E \\ & f & \mapsto & T_K(f), \end{array}$$

donné par

$$\forall x \in [0,1], \quad [T_K(f)](x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

(1) *Montrer que $T_K \in \mathcal{L}_c(E)$ et que $\|T_K\|_{\mathcal{L}_c(E)} \leq \|K\|_{L^\infty([0,1]^2)}$.*

(2) *Montrer que T_K est une application compacte, i.e, que $T_K(\overline{B_E(0,1)})$ est une partie relativement compacte de E.*

Exercice 3.

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0} \in L^2([0,1],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ *vérifiant*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = M < +\infty.$$

On définit la suite

$$\forall n \geq 0, \forall x \in [0,1], \quad g_n(x) = 1 + \int_0^x f_n(t)dt.$$

(1) Montrer que $g_n \in C^0([0,1],\mathbb{R})$.

(2) Montrer

$$\forall n \geq 0, \forall x, y \in [0,1], \quad |g_n(x) - g_n(y)| \leq M^{\frac{1}{2}} |x-y|^{\frac{1}{2}}.$$

(3) Vérifier que la famille $(g_n)_{n\geq 0}$ *est équicontinue dans* $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^\infty([0,1])})$.

(4) Montrer qu'il existe une sous-suite de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge uniformément sur* $[0,1]$.

Exercice 4.

Si $M > 0$ *et* $1 < p < +\infty$, *montrer que*

$$L_{M,p} = \left\{ f \in C^1([0,1],\mathbb{C}) : \int_0^1 |f(t)| \; \mathrm{d}t + \int_0^1 |f'(t)|^p \; \mathrm{d}t \leqslant M \right\}$$

est une partie relativement compacte de $(C^0([0,1],\mathbb{C}), \|\cdot\|_{L^\infty([0,1])})$.

Exercice 5.

Soit F *un sous-espace vectoriel de* $C^1([0,1],\mathbb{R})$. *On suppose que* F *est un sous-espace vectoriel fermé de* $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^\infty([0,1])})$.

(1) Montrer que F *est un sous-espace vectoriel fermé de* $(C^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, *où*

$$\forall f \in F, \quad \|f\|_1 = \|f\|_{L^\infty([0,1])} + \|f'\|_{L^\infty([0,1])}.$$

(2) En admettant que $(C^1([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ *est un espace de Banach, justifier que* $(F, \|\cdot\|_{L^\infty([0,1])})$ *et* $(F, \|\cdot\|_1)$ *sont des espaces de Banach.*

(3) En admettant le théorème d'isomorphisme de Banach (qui sera démontré ultérieurement dans le cours) qui assure que si $T \in \mathcal{L}_c(E_1, E_2)$ *est un isomorphisme entre deux espaces de Banach* E_1 *et* E_2, *alors son inverse* $T^{-1} \in \mathcal{L}_c(E_2, E_1)$ *est nécessairement continue, montrer*

$$\exists C > 0, \forall f \in F, \quad \|f\|_{L^\infty([0,1])} + \|f'\|_{L^\infty([0,1])} \leq C\|f\|_{L^\infty([0,1])}.$$

(4) Montrer que la boule unité fermée de $(F, \|\cdot\|_{L^\infty([0,1])})$ *est compacte.*

(5) Conclure.

Exercice 6.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite bornée de fonctions convexes sur* $[0,1]$. *Montrer que l'on peut extraire une sous-suite* $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ *convergeant uniformément sur tout compact de* $(0,1)$ *et ponctuellement sur* $[0,1]$. *Vérifier que la limite est convexe. Trouver une suite bornée* $(f_n)_{n\geq 0}$ *de fonctions convexes sur* $[0,1]$ *ne possédant aucune sous-suite convergeant uniformément sur* $[0,1]$.

5. Bonus : Compacité faible

Théorème 18 (Banach-Alaoglu, version séquentielle)**.** *Soit E un espace vectoriel normé séparable. Soit $(\ell_n) \subset E^*$ une suite bornée. Alors il existe une sous-suite $(\ell_{\varphi(n)})$ de (ℓ_n) et $\ell \in E^*$ telle que pour tout $x \in E$, on a $\ell_{\varphi(n)}(x) \to \ell(x)$ lorsque $n \to +\infty$.*

Remarque 19. Si E est de dimension infinie, on a déjà vu qu'il n'est pas automatique qu'une suite bornée dans E^* admette des sous-suites convergentes (pour la topologie d'espace vectoriel normé de E^*). Le résultat ci-dessus donne une alternative plus faible à la convergence d'une sous-suite ; on appelle d'ailleurs cette notion de convergence la *convergence faible-$*$ de $(\ell_{\varphi(n)})$ vers ℓ.*

Démonstration. Soit $(x_k) \subset E$ une suite dense. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(\ell_n(x_k))_n \subset \mathbb{R}$ est bornée donc admet une sous-suite convergente. Par un argument diagonal, on peut trouver une sous-suite $(\ell_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(\ell_{\varphi(n)}(x_k))_n$ converge dans $\mathbb{R}$; on en appelle la limite $\ell(x_k)$. Soit à présent $x \in E$ et, par densité de (x_k), $(y_m) \subset (x_k)$ telle que $y_m \to x$ dans E lorsque $m \to +\infty$. Montrons alors que la suite $(\ell(y_m))_m$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Comme la suite (y_m) converge dans E, elle est de Cauchy et comme $(\ell_n) \subset E^*$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, m' \geqslant M$ on a

$$\left(\sup_n \|\ell_n\|_{E^*}\right) \|y_m - y_{m'}\|_E \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$|\ell_{\varphi(n)}(y_m) - \ell_{\varphi(n)}(y_{m'})| \leqslant \varepsilon,$$

et à la limite $n \to +\infty$ on trouve bien

$$|\ell(y_m) - \ell(y_{m'})| \leqslant \varepsilon,$$

démontrant que la suite $(\ell(y_m))_m$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge. On peut démontrer comme dans la preuve du théorème d'Ascoli que la limite obtenue est indépendante du choix de la suite $(y_m) \subset (x_k)$ approchant x, on la note donc $\ell(x)$. Comme ℓ est la limite simple de $(\ell_{\varphi(n)})$ qui est une suite bornée dans E^*, on déduit que $\ell \in E^*$. Par construction, on a bien $\ell_{\varphi(n)}(x) \to \ell(x)$ quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in E$.

□

Remarque 20. Il existe une version plus forte du théorème de Banach-Alaoglu, qui dit que si E est un espace vectoriel normé (pas nécessairement séparable), la boule unité fermée de E^* est compacte pour la topologie faible-$*$ (qui est par définition la plus petite topologie sur E^* rendant les applications $\ell \mapsto \ell(x)$, pour $x \in E$, continues). La subtilité réside dans le fait que la compacité et la compacité séquencielle du théorème énoncé ci-dessus sont deux notions distinctes ; qui ne coïncident que lorsque la topologie est métrisable. Il se trouve que dans le cas où E est séparable, la topologie faible-$*$ sur la boule unité fermée est métrisable et on peut donc déduire le théorème séquentiel du théorème non-séquentiel. Cependant, on a vu que la preuve du théorème séquentiel découle d'un simple argument diagonal.

Remarque 21. Dans le cas où l'espace vectoriel normé E est *réfléxif*, ce qui veut dire que l'isométrie linéaire

$$\Phi : \begin{cases} E & \to (E^*)^* \\ x & \mapsto \begin{cases} E^* \to \mathbb{R} \\ \ell \mapsto \ell(x) \end{cases} \end{cases}$$

est un isomorphisme, et si E^* est séparable, on peut également trouver des sous-suites convergentes dans E (et non pas dans E^*). En effet, si $(x_n) \subset E$ est une suite bornée, alors $(\Phi(x_n))$ est une suite bornée de $(E^*)^*$ donc elle admet une sous-suite $(\Phi(x_{\varphi(n)}))$ telle qu'il existe $X \in (E^*)^*$ telle que pour tout $\ell \in E^*$, $\ell(x_{\varphi(n)}) = \Phi(x_{\varphi(n)})(\ell) \to X(\ell)$ lorsque $n \to +\infty$. Comme Φ est un isomorphisme, il existe $x \in E$ tel que $X = \Phi(x)$. Autrement dit, la sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ est telle qu'il existe $x \in E$ tel que pour tout $\ell \in E^*$, on a $\ell(x_{\varphi(n)}) \to \ell(x)$ lorsque $n \to +\infty$: on dit que $(x_{\varphi(n)})$ *converge faiblement vers* x. On a donc démontré le résultat suivant : soit E un espace vectoriel normé réfléxif tel que E^* est séparable. Alors, de toute suite bornée de E on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement. Remarquons que comme $(E^*)^*$ est un espace de Banach isométrique à E, E est nécessairement un espace de Banach dans ce cas.

Exemple 22. Ces résultats sont particulièrement utiles dans les espaces vectoriels normés dont on connaît bien le dual. Par exemple, si $E = L^p(X,\mu)$ avec $1 < p < +\infty$ et (X,μ) un espace mesuré, on sait que E est réfléxif et que E^* s'identifie à $L^{p'}(X,\mu)$ (et donc est séparable) via l'isomorphisme isométrique

$$\begin{cases} L^{p'}(X,\mu) \to (L^p(X,\mu))^* \\ g \mapsto \begin{cases} L^p(X,\mu) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_X fg\,d\mu. \end{cases} \end{cases}$$

On en déduit que de toute suite bornée $(f_n) \subset L^p(X,\mu)$, on peut extraire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $g \in L^{p'}(X,\mu)$ on a $\int_X f_{\varphi(n)} g\,d\mu \to \int_X fg\,d\mu$ lorsque $n \to +\infty$. Dans le cas où $p = +\infty$, L^∞ n'est pas réfléxif mais si (X,μ) est σ-fini, on sait que $L^\infty(X,\mu)$ s'identifie au dual de $L^1(X,\mu)$ par la même application ci-dessus. On peut donc utiliser le théorème de Banach-Alaoglu pour s'assurer que de toute suite bornée (f_n) dans $L^\infty(X,\mu)$, on peut extraire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $g \in L^1(X,\mu)$ on a $\int_X f_{\varphi(n)} g\,d\mu \to \int_X fg\,d\mu$ lorsque $n \to +\infty$. Enfin, le cas $p = 1$ est particulier car L^1 n'est pas réfléxif et n'est pas le dual d'un espace vectoriel normé connu. Néanmoins on peut voir une fonction de $L^1(\mathbb{R}^d)$ comme une mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}^d$ via la relation $\mu(A) = \int_A f(x)\,dx$; et ces mesures de Radon s'identifient (via le théorème de représentation de Riesz) au dual des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ qui tendent vers 0 à l'infini. Ainsi, d'une suite bornée $(f_n) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on peut extraire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ et une mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour toute fonction continue g tendant vers 0 à l'infini, on a $\int_{\mathbb{R}^d} f_{\varphi(n)}(x)g(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,d\mu(x)$ lorsque $n \to +\infty$.

Un autre cas typique où ce genre de résultat s'applique est celui où E est un espace de Hilbert séparable ; et dans ce cas E est bien sûr réfléxif. On obtient le résultat suivant (qu'on peut encore montrer directement via un argument diagonal) : soit H un espace de Hilbert séparable. Si $(x_n) \subset H$ est une suite bornée, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle qu'il existe $x \in H$ tel que pour tout $u \in H$ on a $\langle x_{\varphi(n)}, u\rangle \to \langle x, u\rangle$ lorsque $n \to +\infty$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur H.

Remarque 23. Extraire des sous-suites qui convergent faiblement (ou faiblement-$*$) est important pour des problèmes d'optimisation : si on veut trouver $x^* \in X$ tel que $f(x^*) = \inf_{x\in X} f(x)$ pour un certain espace X et une certaine fonction $f : X \to \mathbb{R}$, on peut essayer de montrer que les suites minimisantes (ie les suites $(x_n) \subset X$ telle que $f(x_n) \to \inf_{x\in X} f(x)$ lorsque $n \to +\infty$) sont bornées et en utilisant les résultats ci-dessus, on trouve une limite faible (ou faible-$*$) x^* à sous-suite près. Cette limite faible est un candidat pour être un minimiseur ; reste à montrer que $f(x_n) \to f(x^*)$. lorsque $n \to +\infty$. Ceci correspond à une propriété de continuité (séquentielle) de f pour la topologie faible, qui n'est pas une conséquence automatique de la continuité pour la topologie forte... Dans ce cas, d'autres propriétés de f peuvent relier ces deux notions de continuité, comme la convexité.

6. Un dernier exercice : le cube de Hilbert

On termine par un cas où la compacité peut se montrer "à la main" : soit $\alpha \in \ell^2(\mathbb{N})$. Montrer que

$$\{u \in \ell^2(\mathbb{N}) \;:\; \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant |v_n|\}$$

est compact (pour la topologie ℓ^2).

7. bibliographie

Un excellent cours de topologie est celui de Dominique Hulin, disponible sur ce lien ou à l'adresse

`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~dominique.hulin/poly-topo.pdf`

Pour les questions de tension dans les L^p, on pourra consulter la Section 4.5 du livre de H. Brézis *Functional analysis, Sobolev spaces, and partial differential equations.* Les questions de convergence faible y sont également abordées dans le Chapitre 3.