

# THÉORÈMES CLASSIQUES D'INVERSION

JULIEN SABIN

## 1. LES THÉORÈMES FONDAMENTAUX

Dans toute cette partie, on considère  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré ; c'est-à-dire que  $\mathcal{A}$  est une tribu (ou  $\sigma$ -algèbre) sur  $X$  et  $\mu$  est une mesure (positive) sur  $\mathcal{A}$ .

On rappelle que toute fonction mesurable  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  admet une intégrale définie par

$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X g d\mu, g \text{ étagée}, 0 \leq g \leq f \right\},$$

où l'on rappelle que si  $g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  est étagée (c'est-à-dire si  $g$  est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs non-nulles  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ ), on a

$$\int_X g d\mu := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(g^{-1}(\{\alpha_j\})).$$

**Théorème 1** (Théorème de convergence monotone). *Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables sur  $X$ , à valeurs dans  $[0, +\infty]$ . On suppose que  $(f_n)$  est croissante, dans le sens où pour tout  $x \in X$ , la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante dans  $[0, +\infty]$ . Alors, en définissant pour tout  $x \in X$ ,*

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \in [0, +\infty],$$

la fonction  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  est mesurable et satisfait

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

*Démonstration.* Pour  $x \in X$ ,  $f(x)$  est défini comme limite croissante d'une suite de réels positifs "étendus" (c'est-à-dire qu'on autorise la valeur  $+\infty$ ). Ainsi, si  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) > a$  si et seulement si il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f_n(x) > a$ . Autrement dit,

$$f^{-1}(]a, +\infty[) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(]a, +\infty[)$$

et donc  $f$  est bien mesurable, car tous les  $f_n$  sont mesurables et qu'une tribu est stable par union dénombrable.

Par croissance de l'intégrale, la suite  $(\int_X f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et admet donc une limite  $I \in [0, +\infty]$ . Comme  $f_n \leq f$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on en déduit que  $I \leq \int_X f d\mu$  et il reste donc à montrer que  $I \geq \int_X f d\mu$ . Pour cela, on revient à la définition de l'intégrale et on se donne

une fonction étagée  $0 \leq g \leq f$  ainsi que  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Alors, pour tout  $x \in X$  il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f_n(x) \geq (1 - \varepsilon)g(x)$ . En notation ensembliste, on a

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

où  $X_n = (f_n - (1 - \varepsilon)g)^{-1}([0, +\infty]) \in \mathcal{A}$ . Par croissance de  $(f_n)$ , la suite  $(X_n)$  est également croissante. En écrivant  $g = \sum_{j=1}^J \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ , on déduit que pour tout  $j$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(X_n \cap A_j) = \mu(A_j)$ . Comme de plus  $\int_{X_n} g d\mu = \sum_{j=1}^J \alpha_j \mu(A_j \cap X_n)$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{X_n} g d\mu = \int_X g d\mu.$$

En utilisant que sur  $X_n$  on a  $f_n \geq (1 - \varepsilon)g$ , on a

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{X_n} f_n d\mu \geq (1 - \varepsilon) \int_{X_n} g d\mu,$$

et en passant à la limite  $n \rightarrow +\infty$  dans cette inégalité on obtient

$$I \geq (1 - \varepsilon) \int_X g d\mu.$$

En prenant la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  puis le supremum sur tous les  $g$  étagées telles que  $0 \leq g \leq f$ , on déduit

$$I \geq \int_X f d\mu.$$

□

*Remarque 2.* On a vu dans sa preuve que le théorème de convergence monotone découle essentiellement de la propriété fondamentale de limite croissante des mesures : si  $(A_n)$  est une suite croissante d'ensembles mesurables, alors  $\mu(\cup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$ . Cet énoncé n'est autre que le théorème de convergence monotone pour les fonctions indicatrices. On peut alors se demander s'il existe un énoncé similaire pour les suites décroissantes ; en effet on sait que si  $(A_n)$  est une suite décroissante d'ensembles mesurables, alors  $\mu(\cap_n A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$  si on suppose de plus que  $\mu(A_{n_0}) < +\infty$  pour un certain  $n_0$ . C'est bien le cas : si l'on considère une suite  $(f_n)$  décroissante de fonctions de  $X$  à valeurs dans  $[0, +\infty]$ , et si  $\int_X f_{n_0} d\mu < +\infty$  pour un certain  $f_{n_0}$ , alors  $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$  où  $f(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  (en tant que limite décroissante d'éléments de  $[0, +\infty]$ ). Pour le démontrer, on considère  $g_n := f_{n_0} - f_n$  qui est une suite croissante à valeurs dans  $[0, +\infty]$  (dans le cas où  $f_n(x) = +\infty$  pour tout  $n \geq n_0$ , on peut définir  $g_n(x) = 0$  ; cela ne change pas les valeurs des intégrales puisque de tels  $x$  forment un ensemble de mesure nulle). On peut alors appliquer le théorème de convergence monotone à  $(g_n)$ . Reste à remarquer que puisque  $\int_X f_n d\mu < +\infty$  pour  $n \geq n_0$ , on a bien  $\int_X g_n d\mu = \int_X f_{n_0} d\mu - \int_X f_n d\mu$  et on peut conclure. De la même manière que pour les ensembles où l'hypothèse  $\mu(A_{n_0}) < +\infty$  est nécessaire pour obtenir le résultat, ici on ne peut pas non plus s'affranchir de l'hypothèse  $\int_X f_{n_0} d\mu < +\infty$ . Il suffit de se ramener au cas des ensembles, en prenant  $f_n := \mathbb{1}_{[n, +\infty[}$  pour  $X = \mathbb{R}$  et  $\mu$  la mesure de Lebesgue ; on a alors  $f \equiv 0$  et donc  $\int_X f d\mu = 0 \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = +\infty$ .

**Corollaire 3.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables sur  $X$  à valeurs dans  $[0, +\infty]$ . Alors, en définissant pour tout  $x \in X$ ,

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \in [0, +\infty],$$

la fonction  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  est mesurable et satisfait

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

*Démonstration.* On applique le théorème de convergence monotone à la suite  $(g_N)_{N \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $x \in X$  par

$$g_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x).$$

□

**Corollaire 4** (Lemme de Fatou). Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables sur  $X$  à valeurs dans  $[0, +\infty]$ . Alors, en définissant pour tout  $x \in X$ ,

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \in [0, +\infty],$$

la fonction  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  est mesurable et satisfait

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

*Démonstration.* On rappelle que pour toute suite  $(a_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} a_k.$$

Puisque pour tout  $n$ ,  $\inf_{k \geq n+1} a_k \geq \inf_{k \geq n} a_k$ , il s'agit d'une limite croissante. On applique donc le théorème de convergence monotone à  $g_n(x) := \inf_{k \geq n} f_k(x)$  (qui est bien mesurable puisque pour tout  $a > 0$ ,  $g_n(x) \geq a$  si et seulement si pour tout  $k \geq n$ ,  $f_k(x) \geq a$  et donc  $(g_n)^{-1}([a, +\infty[) = \bigcap_{k \geq n} (f_k)^{-1}([a, +\infty[))$ ). On obtient alors que

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu.$$

Comme de plus  $\int_X g_n d\mu = \int_X \inf_{k \geq n} f_k d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int_X f_k d\mu$  puisque pour tout  $k' \geq n$  et pour tout  $x \in X$ ,  $\inf_{k \geq n} f_k(x) \leq f_{k'}(x)$  et donc  $\int_X \inf_{k \geq n} f_k d\mu \leq \int_X f_{k'} d\mu$ , ce qui donne bien  $\int_X \inf_{k \geq n} f_k d\mu \leq \inf_{k' \geq n} \int_X f_{k'} d\mu$ . Ainsi, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X g_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} \int_X f_k d\mu = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu.$$

□

*Remarque 5.* Existe-t-il un lemme de Fatou pour la limsup? Comme pour le théorème de convergence monotone, il faut faire attention : on a toujours le contre-exemple  $f_n := \mathbf{1}_{[n, +\infty[}$  avec  $X = \mathbb{R}$  et  $\mu$  la mesure de Lebesgue, pour lequel  $f \equiv 0$  et  $\int_X f_n d\mu = +\infty$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$  est faux. Cependant, si l'on suppose que

$\int_X \sup_{k \geq n_0} f_k d\mu < +\infty$  pour un certain  $n_0$ , on peut démontrer que  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\mu$  en utilisant la version “décroissante” du théorème de convergence monotone.

*Remarque 6.* Contrairement au théorème de convergence monotone, le lemme de Fatou ne donne qu’une inégalité sur la valeur d’une intégrale. On ne peut pas faire “mieux” en général : il existe des situations où  $\int_X f d\mu < \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$ . Un exemple est donné par  $f_n = \mathbb{1}_A$  si  $n$  est pair et  $f_n = \mathbb{1}_{X \setminus A}$  si  $n$  est impair, où  $A \subset X$  est mesurable. Comme  $\inf_{k \geq n_0} f_k(x) = 0$  pour tout  $x \in X$  (en effet, l’inf est toujours  $\geq 0$  car  $f_k \geq 0$  et si  $x \in A$ , on a  $f_k(x) = 0$  si  $k$  est impair et si  $x \notin A$ ,  $f_k(x) = 0$  si  $k$  est pair), on déduit que  $f \equiv 0$ . De plus,  $\int_X f_n d\mu = \mu(A)$  si  $n$  est pair et  $\int_X f_n d\mu = \mu(X \setminus A)$  si  $n$  est impair. Ainsi,  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \min(\mu(A), \mu(X \setminus A))$  et donc si  $\mu(A)$  et  $\mu(X \setminus A)$  sont tous deux non-nuls, on a bien  $\int_X f d\mu = 0 < \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$ .

A partir de l’intégrale des fonctions positives, on peut également définir l’intégrale d’une fonction mesurable  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\int_X |f| d\mu < +\infty$  (on dit que  $f$  est *intégrable*) par la formule

$$\int_X f d\mu := \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu \in \mathbb{R},$$

où  $f_{\pm}(x) = \max(\pm f(x), 0)$ .

**Théorème 7** (Théorème de convergence dominée). *Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . Supposons qu’il existe une fonction mesurable  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in X$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

*Supposons également qu’il existe une fonction mesurable  $g : X \rightarrow [0, +\infty]$  avec  $\int_X g d\mu < +\infty$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in X$  on a*

$$|f_n(x)| \leq g(x).$$

*Alors,  $f$  et  $f_n$  sont intégrables pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

*Démonstration.* L’intégrabilité des  $f_n$  découle de l’hypothèse de domination et de l’intégrabilité de  $g$ . De même, comme  $f_n \rightarrow f$  ponctuellement et que  $|f_n| \leq g$  pour tout  $n$ , on déduit que  $|f| \leq g$  et donc que  $f$  est intégrable. Pour déterminer la limite des intégrales, il suffit de considérer le cas où les  $f_n$  sont positives, en appliquant alors le résultat aux fonctions  $(f_n)_+$  et  $(f_n)_-$  qui satisfont les mêmes hypothèses. Lorsque  $f_n \geq 0$  pour tout  $n$ , on a alors par le lemme de Fatou appliqué aux fonctions positives  $f_n$  et  $g - f_n$ ,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X (g - f_n) d\mu \geq \int_X (g - f) d\mu = \int_X g d\mu - \int_X f d\mu.$$

Comme de plus  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X (g - f_n) d\mu = \int_X g d\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$ , on déduit que

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu,$$

démontrant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ .

□

*Remarque 8.* L'hypothèse de domination est bien sûr cruciale ; on a déjà vu un contre-exemple si elle est absente ( $f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty[}$  avec  $X = \mathbb{R}$  et  $\mu$  la mesure de Lebesgue). On peut même obtenir un contre-exemple avec des fonctions intégrables, par exemple  $f_n = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$ . Dans cet exemple,  $f_n$  représente une bosse qui se translate vers l'infini. Un autre scénario typique où la domination n'est pas vérifiée et où la conclusion du théorème est également fautive est celui d'une suite de fonctions qui se concentre en un point ; par exemple  $f_n = n\mathbb{1}_{[0, 1/n]}$ .

*Remarque 9.* On peut relâcher les hypothèses du théorème en considérant que la limite ponctuelle  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  et la borne uniforme  $|f_n| \leq g$  n'ont lieu que *presque partout* (c'est-à-dire sur le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle). Une subtilité à mentionner dans ce cas est sur la façon dont la fonction  $f$  est introduite : la solution "facile" est de supposer que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable et que  $f_n \rightarrow f$  presque partout. Cependant, on peut rencontrer un autre énoncé, qui suppose que la suite  $(f_n)$  converge *presque partout*. Dans ce cas, la fonction  $f$  n'est a priori définie que sur le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle. On peut alors la prolonger par zéro sur cet ensemble de mesure nulle, et remarquer que la fonction obtenue est bien mesurable. Lorsque la convergence a lieu partout (et pas seulement presque partout), la mesurabilité de  $f$  découle du fait qu'une limite simple de fonctions mesurables est bien mesurable.

*Remarque 10.* Pour appliquer ce théorème en pratique, il faut déterminer les fonctions  $f$  et  $g$ . Pour déterminer  $f$ , il "suffit" de trouver la limite des  $f_n(x)$  à  $x$  fixé (en enlevant éventuellement un ensemble de  $x$  de mesure nulle), cela revient donc à trouver la limite d'une suite de nombre réels (ce qui peut être pénible, certes). L'hypothèse de domination revient elle à majorer  $|f_n(x)|$  uniformément en  $n$ , par un nombre positif  $g(x)$  qui est donc indépendant de  $n$ . Bien sûr, il y a de nombreux choix pour  $g$  mais il faut en trouver un tel que  $g$  est intégrable (et c'est souvent là la difficulté). Il peut arriver qu'on soit perdu pour trouver un tel  $g$  et que les  $g$  qu'on "essaye" ne soit pas intégrables... Une manière utile est d'essayer de déterminer le meilleur  $g$  possible qui est simplement  $g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|$ .

*Remarque 11.* Il est important de comprendre pourquoi les hypothèses du théorème de convergence dominée ne s'appliquent pas aux suites  $\mathbb{1}_{[n, n+1]}$  et  $n\mathbb{1}_{[0, 1/n]}$ . Si elles convergent bien entendu vers la fonction nulle presque partout, c'est donc l'hypothèse de domination qui doit faillir. C'est bien le cas puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x) = \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x), \quad \sup_{n \in \mathbb{N}^*} n\mathbb{1}_{[0, 1/n]}(x) = \sum_{n \geq 1} n\mathbb{1}_{]1/(n+1), 1/n]}(x),$$

qui sont bien des fonctions non-intégrables sur  $\mathbb{R}$ .

*Remarque 12.* On peut enfin se poser la question étrange suivante : si  $f_n \rightarrow f$  presque partout et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n = \int f$  (en supposant que les  $f_n$  et  $f$  sont intégrables), est-ce vrai que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n|$  est intégrable ? Ce serait une sorte de réciproque du théorème de convergence dominée. Comme on peut s'y attendre, la réponse est non : on peut considérer  $f_n = (n/\log(n))\mathbb{1}_{[0, 1/n]}$ , qui converge vers 0 presque partout et telle que  $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \rightarrow 0$

lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Par un calcul similaire à celui de la remarque précédente, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sup_{n \geq 2} (n/\log(n)) \mathbb{1}_{[0,1/n]}(x) = \sum_{n \geq 2} n/(\log(n)) \mathbb{1}_{]1/(n+1),1/n]}(x),$$

qui n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}$  car la série  $\sum_{n \geq 2} 1/(n \log(n))$  diverge.

## 2. QUELQUES EXEMPLES

- Une application importante du théorème de convergence dominée est la continuité/dérivabilité des intégrales à paramètres, qui est traitée dans un autre cours donc on ne va pas en parler ici.

- Une autre remarque importante est qu'il y a des cas où on n'a pas besoin d'appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir la convergence des intégrales : un cas typique est celui où la suite  $(f_n)$  converge *uniformément* vers  $f$  sur  $X$ , avec  $X$  qui est *de mesure finie*. En effet, dans ce cas

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu \leq \mu(X) \|f_n - f\|_{L^\infty(X)},$$

qui converge bien vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Evidemment, l'hypothèse  $\mu(X) < +\infty$  est cruciale, sans celle-ci la convergence uniforme n'implique pas nécessairement la convergence des intégrales. Par exemple, penser à  $f_n = (1/n) \mathbb{1}_{[n,2n]}$  qui converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$ , mais  $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et les intégrales ne convergent pas vers zéro.

- Pour montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ , on peut essayer d'employer le théorème de convergence monotone ou celui de convergence dominée. Le théorème de convergence monotone est parfois plus agréable à utiliser car seules les propriétés de  $f_n(x)$  à  $x$  fixé interviennent (positivité, croissance), alors que pour appliquer le théorème de convergence dominée, il y a une hypothèse d'intégrabilité à vérifier. Bien sûr, la positivité et la croissance ne sont pas vérifiées à tous les coups mais il peut être pratique de vérifier si c'est le cas... Un exemple pas évident est celui de

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$$

sur  $\mathbb{R}_+$ , qui converge ponctuellement vers  $e^{-x}$  et pour calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\infty f_n(x) dx$  il est naturel d'appliquer le théorème de convergence dominée et donc de trouver un majorant intégrable des  $f_n$ ... En fait, cette suite converge de manière croissante et on peut appliquer le théorème de convergence monotone (pas besoin de domination)! Réfléchir donc à comment montrer la croissance...

- On a déjà dit qu'une manière de trouver un majorant uniforme en  $n$  des  $|f_n|$  est de prendre le sup sur  $n$ . En pratique, on ne s'embête pas forcément à calculer ce sup, seule une borne intégrable suffit. Pour trouver une telle borne, il faut garder en tête deux principes fondamentaux : 1) bien sûr, la borne doit être uniforme en  $n$  donc il faut "se débarrasser"

des  $n$  dans  $|f_n(x)|$  mais... 2) il faut s'en débarrasser sans sacrifier l'intégrabilité : le majorant obtenu doit être intégrable ! Par exemple, ça serait bête de majorer pour  $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{1 + x^2 + 1/n}$$

par 1 (même si c'est vrai) puisque la fonction constante égale à 1 n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Idem, majorer cette fonction par  $1/x^2$  n'est pas une bonne idée : ce n'est pas intégrable en 0... Ici, on s'est bien débarrassé du  $n$  mais de manière trop brutale : on a perdu au passage l'intégrabilité. Avant donc de majorer en  $n$ , il faut donc se poser la question de pourquoi la fonction  $f_n$  est intégrable (même à  $n$  fixé), et essayer de préserver cette intégrabilité lorsqu'on se débarrasse de  $n$ . Ici, c'est le fait que la fonction est bornée sur  $\mathbb{R}$  et qu'elle décroît comme  $1/x^2$  à l'infini qui donne son intégrabilité ; et on va essayer de trouver une borne qui préserve ces propriétés. Il est donc plus malin de borner

$$\frac{1}{1 + x^2 + 1/n} \leq \frac{1}{1 + x^2},$$

qui est bien un majorant indépendant de  $n$  et intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

• Un autre cas où il ne faut pas se planter est le cas *oscillant* : par exemple  $f_n(x) = f(x) \cos(nx)$  où  $f$  est une fonction intégrable donnée sur  $\mathbb{R}$ . Dans ce cas,  $(f_n)$  ne converge pas presque partout (si  $f$  n'est pas nulle presque partout), et pourtant on a bien la domination par une fonction intégrable  $|f_n| \leq |f|$  et  $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ... Cet exemple n'est absolument pas une conséquence du théorème de convergence dominée ! C'est bien le fait qu'on prenne l'intégrale d'une quantité qui oscille beaucoup qui rend l'intégrale petite, et non pas le fait que  $f_n$  elle-même est petite. Cette propriété s'appelle le *lemme de Riemann-Lebesgue*, vu dans les séries de Fourier ou en transformation de Fourier. Si  $f$  est de classe  $C^1$  et telle que  $f'$  est aussi intégrable, le lemme découle d'une formule d'intégration par parties puisque

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(nx) dx = -\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} f'(x) \sin(nx) dx.$$

### 3. LE LEMME DE BRÉZIS-LIEB

**Lemme 13** (Lemme de Brézis-Lieb). *Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $(f_n)$  converge presque partout vers une fonction  $f$ , et que la suite  $(\int_X |f_n| d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Alors,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \left| |f_n| - |f_n - f| - |f| \right| d\mu = 0.$$

*Démonstration.* On applique le théorème de convergence dominée à la suite

$$g_n := \left| |f_n| - |f_n - f| - |f| \right|.$$

Par hypothèse, on a bien  $g_n \rightarrow 0$  presque partout. De plus, on a

$$0 \leq g_n \leq \left| |f_n| - |f_n - f| \right| + |f| \leq 2|f|,$$

qui est bien intégrable sur  $X$ . En effet, comme la suite  $(\int_X |f_n| d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, on déduit du lemme de Fatou que  $\int_X |f| d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n| d\mu$  qui est bien finie.  $\square$

*Remarque 14.* Le lemme de Brézis-Lieb possède une version  $L^p$ , un peu plus longue à démontrer. On pourra se référer au livre de Lieb-Loss donné dans la bibliographie plus bas.

*Remarque 15.* Une conséquence du lemme de Brézis-Lieb est la suivante. En posant  $R_n = |f_n| - |f_n - f| - |f|$ , le lemme de Brézis-Lieb dit que  $\int_X |R_n| d\mu \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et donc  $\int_X R_n d\mu \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Ainsi, on a

$$\int_X |f_n| d\mu - \int_X |f| d\mu = \int_X |f_n - f| d\mu + \int_X R_n d\mu$$

et donc

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X |f_n| d\mu - \int_X |f| d\mu \right) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu.$$

Comme le terme de droite est la liminf d'une suite positive, il est aussi positif : on "retrouve" l'énoncé du lemme de Fatou qui dit que le terme de gauche est bien positif. C'est pour ça que le lemme de Brézis-Lieb est parfois appelé "terme manquant dans le lemme de Fatou", puisqu'il décrit l'écart (positif) entre  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| d\mu$  et  $\int_X |f| d\mu$ .

On remarque d'ailleurs que cet écart est mesuré par  $\|f_n - f\|_{L^1}$  ; on obtient une autre conséquence intéressante du lemme de Brézis-Lieb : si  $f_n \rightarrow f$  presque partout et si  $\int_X |f_n| d\mu \rightarrow \int_X |f| d\mu$ , alors  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^1(X)$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ .

#### 4. BIBLIOGRAPHIE

Pour les théorèmes classiques et la théorie de la mesure, on peut se référer au livre *Analyse réelle et complexe* de W. Rudin.

Pour le lemme de Brézis-Lieb, on peut consulter la Section 1.9 du livre *Analysis* d'E. Lieb et M. Loss.