

Méthodes itératives

Agrégation de mathématiques Option modélisation – Tronc commun

Benjamin BOUTIN
Septembre 2026

Extraits du programme du concours

12.2 Méthodes itératives de résolution approchée d'équations réelles et vectorielles

(...) Problèmes non linéaires réels et vectoriels : méthode de dichotomie, méthode de Picard, méthode de Newton, vitesse de convergence et estimation de l'erreur.

Leçons d'analyse et d'algèbre concernées

- 226.** Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
- 219.** Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
- 205.** Espaces complets. Exemples et applications.
- 153.** Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

L'étude des systèmes itératifs en dimension supérieure requiert une bonne compréhension de certains outils d'algèbre linéaire et du calcul différentiel, par exemple les propriétés spectrales des matrices carrées en dimension finie et les formules de Taylor en dimension supérieure. Les références proposées ci-dessous pourront utilement compléter le travail amorcé par la lecture du présent document.

Les démonstrations sont parfois seulement ébauchées et il est important de savoir les détailler.

Le document n'aborde pas les questions d'extremums et les algorithmes pour les approcher.

Lectures proposées

- [1] P. G. CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 2006.
- [2] F. FILBET, *Analyse numérique – Algorithme et étude mathématique*, Dunod, 2013.
- [3] M. SCHATZMAN, *Analyse numérique : une approche mathématique : cours et exercices*, Dunod, 2001.
- [4] F. ROUVIÈRE, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 2003.
- [5] S. BENZONI-GAVAGE, *Calcul différentiel et équations différentielles*, Dunod, 2010.



Table des matières

I. Itérations géométriques en algèbre linéaire	2
1. Rayon spectral	2
2. Suites linéaires récurrentes	2
3. Résolution d'équations linéaires par méthodes itératives	3
II. Équations non-linéaires	4
1. Méthode de la dichotomie	4
2. Point fixe contractant	4
3. Résultats de convergence globale ou locale en dimension un	5
4. Vitesse de convergence	7
5. Critère d'attractivité en dimension n	8
III. Méthode de Newton	9
1. Présentation géométrique en dimension un	9
2. Étude générale de la méthode de Newton	10

I. Itérations géométriques en algèbre linéaire

1. Rayon spectral

Définition 1

Le rayon spectral d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ désigne le réel positif $\rho(M) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{spec}_{\mathbb{C}}(M)\}$.

Le rayon spectral est d'abord ici une notion algébrique. Il informe cependant sur des propriétés métriques puisqu'il quantifie la proximité du spectre à 0.

- $\rho(M) = 0$ équivaut à la nilpotence de la matrice M (sans pour autant que M soit nécessairement nulle).
- Pour toute norme $\|\cdot\|$ subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$, $\rho(M) \leq \|M\|$.

Lemme 2

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Considérant un infimum sur les normes subordonnées sur $M_n(\mathbb{C})$: $\rho(M) = \inf_{\|\cdot\|} \|M\|$.

Démonstration. Si M est diagonalisable, on construit une norme explicite à partir des coordonnées dans la base de vecteurs propres : $M = PDP^{-1}$, $\|x\| := \|P^{-1}x\|_1$, on trouve $\|M\| = \|D\|_1 = \rho(M)$.

Dans le cas général, $T = PMP^{-1}$ étant une réduite triangulaire supérieure de M , on procède à un changement de base paramétré par un réel $\delta > 0$ afin de rendre la contribution sur-diagonale de T arbitrairement petite lorsque δ tend vers 0 : $S_\delta = D_\delta^{-1}TD_\delta = (T_{i,j}\delta^{j-i})_{i,j}$ avec $D_\delta = \text{diag}(\delta, \delta^2, \dots, \delta^n)$. À l'aide de la norme $\|x\| := \|D_\delta^{-1}P^{-1}x\|_1$, on trouve $\|M\| = \|S_\delta\|_1 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \rho(M)$. ■

Exemple. $A = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cette matrice vérifie : $\rho(A) = \frac{2}{3} < 1$ mais $\|A\|_1 = \|A\|_\infty = \frac{4}{3} > 1$. On peut vérifier que la norme $\|(x, y)\| := |x| + 3|y|$ induit par exemple la norme subordonnée $\|A\| = \frac{8}{9} < 1$, puis que la norme $\|(x, y)\|_{(\epsilon)} := |x| + |y|/\epsilon$ permet d'obtenir $\|A\|_{(\epsilon)} = \frac{2}{3}(1 + \epsilon) \rightarrow \frac{2}{3}$.

2. Suites linéaires récurrentes

Une question. Considérons la suite (x_k) d'éléments de $\mathbb{C}^n$ définis par la récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: $x_{k+1} = Mx_k + b$, où $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $b \in \mathbb{C}^n$ sont donnés. Elle se résout par : $x_k = M^k x_0 + \sum_{\ell=0}^{k-1} M^\ell b$.

Sous quelles conditions sur la matrice M la convergence de (x_k) est-elle garantie indépendamment de x_0



pour toute donnée b ? Toute limite x^* vérifie de fait $x^* = Mx^* + b$, i.e. $(I_n - M)x^* = b$. Il apparaît alors nécessaire que $I_n - M$ doit être surjective, donc inversible : $1 \notin \text{spec } M$, mais cela ne suffit pas...

Proposition 3 Caractérisation des récurrences convergentes

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Les suites à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ définies par la récurrence $x_{k+1} = Mx_k$ pour $k \in \mathbb{N}$, convergent toutes vers 0 si et seulement si $\rho(M) < 1$.

Démonstration.

Si $\rho(M) \geq 1$, on peut alors considérer un vecteur propre $e \in \mathbb{C}^n$ associé à une valeur propre λ t.q. $|\lambda| = \rho(M) \geq 1$. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$ et on peut supposer e unitaire pour cette norme. La suite récurrente initialisée en $x_0 = e$ vérifie alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|x_k\| = \|\lambda^k e\| = \rho(M)^k$. Cette quantité ne pouvant pas converger vers 0, la suite récurrente (x_k) ne converge pas vers 0.

Si $\rho(M) < 1$, alors il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$ dont la norme subordonnée vérifie $\|M\| \leq \frac{1}{2}(\rho(M) + 1) < 1$. Pour toute initialisation x_0 , la suite récurrente (x_k) vérifie alors $\|x_k\| \leq \|M\|^k \|x_0\|$ qui tend vers 0. ■

Remarque (Condition nécessaire ?)

Bien entendu, si $\rho(M) \geq 1$ ou pour certaines initialisations x_0 (relativement à la structure spectrale de M), les suites récurrentes $(x_k)_{k \geq 0}$ peuvent tout de même converger vers 0, ou vers d'autres éléments de $\text{Ker}(I_n - M)$.

Remarque (Vitesse de convergence)

Lorsque $\rho(M) < 1$, la convergence est toujours au plus géométrique. On peut plus précisément examiner le comportement asymptotique des puissances de blocs de Jordan.

- Si $x_0 \in \text{Ker } M^n$, alors la convergence a lieu en un nombre fini d'itérations.
- Si des valeurs propres de module $\rho(M)$ sont défectives, alors la convergence est au plus comme $O(k^{d-1} \rho(M)^k)$, où $d > 1$ est la taille du plus grand bloc de Jordan concerné. Par croissance comparée, ce majorant est négligeable devant toutes les suites géométriques $(\rho(M) + \epsilon)^k$ pour $\epsilon > 0$.

Corollaire 4

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\rho(M) < 1$ et soit $b \in \mathbb{C}^n$. La suite récurrente $x_{k+1} = Mx_k + b$ est convergente, de limite $x^* = (I_n - M)^{-1}b$.

Démonstration. La matrice $I_n - M$ est clairement inversible et le point x^* vérifie $x^* = Mx^* + b$. En conséquence on peut se ramener à la récurrence homogène : $x_{k+1} - x^* = M(x_k - x^*)$ traitée dans la Proposition précédente. ■

3. Résolution d'équations linéaires par méthodes itératives

Nous évoquons l'exemple de la **méthode de Jacobi** pour les matrices à **diagonale strictement dominante**. Il s'agit d'une méthode itérative pour résoudre un système linéaire $Ax = b$ pour lequel $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie pour tout indice i , $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Dans ce cadre, par le théorème de Hadamard (ou celui équivalent des disques de Gershgorin), A est nécessairement inversible. L'objectif est d'approcher la solution $x = A^{-1}b$ avec $b \in \mathbb{C}^n$ donné quelconque.

Notons que A s'écrit $A = D - R$ avec D la matrice diagonale extraite de A , elle aussi inversible. L'itération de Jacobi est la suivante : $Dx_{k+1} = Rx_k + b$ pour $k \in \mathbb{N}$, de sorte que l'inversion à chaque étape est celle d'un système linéaire diagonal (très peu coûteuse algorithmiquement en comparaison d'un pivot de Gauss). Si A est diagonale, $D = A$ et une unique itération suffit.

Lemme 5 Convergence de la méthode de Jacobi

Soit $A = D - R$ à diagonale strictement dominante avec $D = \text{diag } A$. On a alors : $\rho(D^{-1}R) < 1$.



Démonstration. Soit e un vecteur propre de $D^{-1}R$ pour la valeur propre λ : $D^{-1}Re = \lambda e$. On a alors pour tout i :

$$\lambda d_{ii}e_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}e_j$$

En particulier pour un indice i tel que $|e_i| = \|e\|_\infty \neq 0$, on obtient par inégalité triangulaire :

$$|\lambda| |a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Dès lors $\rho(D^{-1}R) \leq \max_i \frac{\sum_{j \neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$. ■

On observe que la vitesse de convergence est d'autant plus rapide que la diagonale est dominante.

II. Équations non-linéaires

1. Méthode de la dichotomie

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$ une fonction à valeurs réelles telle que $f(a)f(b) < 0$. L'algorithme de dichotomie consiste à définir deux suites adjacentes $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

- Initialisation $a_0 = a$, $b_0 = b$
- Récurrence, pour tout $k \geq 0$, on pose $c_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$,
 - si $f(c_k)f(a_k) < 0$, alors on pose $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
 - si $f(c_k)f(a_k) \geq 0$, alors on pose $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

À noter que l'on pourrait, dans le cas $f(c_k)f(a_k) = 0$, poser $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = c_k$ et terminer ainsi l'algorithme mais les énoncés qui suivent perdraient en généralité.

La méthode ainsi définie converge systématiquement vers un zéro x^* de f dans l'intervalle $]a, b[$ (dont l'existence est préalablement garantie par le théorème des valeurs intermédiaire, et l'unicité n'est pas promise) au sens où

- $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = x^*$
- pour tout $k \geq 0$, on a $|b_k - a_k| = (b - a)2^{-k}$ et $x^* \in [a_k, b_k]$
- En notant (x_k) l'une quelconque des trois suites (a_k) , (b_k) ou (c_k) on a pour tout k : $|x_k - x^*| \leq \frac{b - a}{2^k}$.

2. Point fixe contractant

Définition 6 Application contractante

Soit (X, d) un espace métrique. Une application $\Phi : X \rightarrow X$ est dite contractante sur X si elle est L -lipschitzienne sur X avec $L \in [0, 1[$: $\forall x, y \in X, d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq Ld(x, y)$.

Théorème 7 Point fixe de Banach-Picard

Soit (X, d) un espace métrique complet non-vidé et $\Phi : X \rightarrow X$ contractante sur X . Alors :

- a) Φ possède un unique point fixe x^* dans X .
- b) Pour tout $x_0 \in X$, la suite (x_k) définie par la récurrence $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ converge vers x^* .

Démonstration.

On note L la constante de Lipschitz de Φ , $L \in [0, 1[$.

Unicité. Soient $x^*, y^* \in X$ deux points fixes de Φ . Par contraction, on a $d(\Phi(x^*), \Phi(y^*)) \leq L d(x^*, y^*)$ et donc $(1 - L)d(x^*, y^*) \leq 0$ ce qui n'est possible que si $d(x^*, y^*) = 0$. Ainsi $x^* = y^*$.



Existence constructive. On montre que la suite des itérées de Picard (x_k) est de Cauchy dans X . Bien entendu, la suite est à valeurs dans X car X est supposé stable par Φ . On obtient par récurrence que pour tout $k \geq 0$, $d(x_{k+1}, x_k) \leq L^k d(x_1, x_0)$. Alors, pour tout $p \geq 0$ et tout $k \geq 0$, par inégalité triangulaire et la propriété précédente reproduite p fois, on obtient :

$$d(x_{k+p}, x_k) \leq \sum_{i=1}^p d(x_{k+i}, x_{k+i-1}) \leq \sum_{i=1}^p L^{k+i-1} d(x_1, x_0) = L^k \frac{1-L^p}{1-L} d(x_1, x_0).$$

La suite (x_k) est donc de Cauchy. Par complétude de X , elle converge vers un élément $x^* \in X$. Maintenant, puisque Φ est continue en $x^* \in X$, en passant à la limite dans l'équation de récurrence on a $x^* = \Phi(x^*)$. La limite x^* est donc un point fixe de Φ . ■

Plusieurs estimations sont disponibles pour quantifier la convergence.

- En faisant tendre p vers l'infini dans la caractérisation de Cauchy, on obtient pour tout $k \geq 0$,

$$d(x^*, x_k) \leq \frac{L^k}{1-L} d(x_1, x_0) \quad (\text{estimation a priori}).$$

- Par une récurrence élémentaire, on a également pour tout $k \geq 0$,

$$d(x^*, x_k) \leq L^k d(x^*, x_0) \quad (\text{estimation de contraction}).$$

3. Résultats de convergence globale ou locale en dimension un

Par le théorème des accroissements finis, on peut caractériser localement ou globalement les applications Φ contractantes sur des intervalles réels. Cela donne lieu à des méthodes itératives simples pour résoudre certaines équations scalaires.

Proposition 8 Critère $\mathcal{C}^1$ global

Soit $\Phi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ telle que

- $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$
- $\exists L \in [0, 1[, \forall x \in [a, b], |\Phi'(x)| \leq L$.

Alors Φ admet un unique point fixe $x^* \in [a, b]$ et pour toute donnée $x_0 \in [a, b]$ la suite d'itérées $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ converge vers x^* . De plus, si elle n'est pas stationnaire, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = \Phi'(x^*).$$

Démonstration. C'est une application directe du théorème de point fixe sur $E = [a, b]$ complet, utilisant le caractère contractant de Φ , de rapport L par le théorème des accroissements finis (Φ' étant continue sur le fermé $[a, b]$). Le dernier point est obtenu en observant que si la suite n'est pas stationnaire, alors pour tout $k \geq 0$ on a $x_k \neq x^*$, dès lors le rapport considéré s'écrit également

$$\frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = \frac{\Phi(x_k) - \Phi(x^*)}{x_k - x^*}$$

qui tend vers $\Phi'(x^*)$ puisque x_k tend vers x^* . ■

Corollaire 9 Critère $\mathcal{C}^1$ local

Soit $\Phi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et $x^* \in]a, b[$ un point fixe de Φ vérifiant $|\Phi'(x^*)| < 1$.

Alors il existe $\delta > 0$ tel que $I_\delta := [x^* - \delta, x^* + \delta] \subset]a, b[$ et tel que pour tout $x_0 \in I_\delta$, la suite $(x_k)_{k \geq 0}$ est bien définie, à valeurs dans I_δ et converge vers x^* .



Démonstration. Par continuité de Φ' et le caractère ouvert de $]a, b[$, il existe un voisinage $I_\delta = [x^* - \delta, x^* + \delta]$ de x^* dans $[a, b]$, tel que $\sup_{I_\delta} |\Phi'| < 1$. Par suite, on peut appliquer le critère $\mathcal{C}^1$ global précédent sur I_δ , sous réserve de bien s'assurer que $\Phi(I_\delta) \subset I_\delta$. Ce dernier point est vérifié car pour tout $x \in I_\delta$, $|\Phi(x) - x^*| = |\Phi(x) - \Phi(x^*)| \leq \sup_{I_\delta} |\Phi'| |x - x^*| < |x - x^*|$. L'intervalle I_δ étant symétrique autour de x^* on peut conclure. ■

Remarque

- Si $|\Phi'(x^*)| < 1$, le point fixe x^* est dit **attractif** : il y a convergence locale des itérées au voisinage de x^* , plus précisément, la convergence est monotone si $\Phi'(x^*) > 0$, et de monotonie alternante si $\Phi'(x^*) < 0$.
- Si $|\Phi'(x^*)| > 1$, le point fixe x^* est dit **répulsif** : aucun (suffisamment) petit voisinage de x^* n'est stable par Φ ce qui limite les possibilités de convergence à des situations exceptionnelles et, disons, en pratique inutilisables.
- Si $|\Phi'(x^*)| = 1$, on ne peut pas conclure, tout peut arriver ! On peut s'en convaincre en considérant par exemple les suites récurrentes définies par les fonctions $\Phi_+(x) = x + x^3$ d'une part, et $\Phi_-(x) = x - x^3$ d'autre part, ceci au voisinage de leur point fixe $x = 0$.

Discussion sur la méthode de la corde Soit $[a, b]$ un segment de la droite réelle et f définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Observons que sous l'hypothèse $f(a) \neq f(b)$, la corde de f passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ n'est pas horizontale et intersecte donc l'axe des abscisses en un unique point, tout autant que les parallèles à cette unique corde. La pente commune à toutes ces droites est $q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq 0$. La méthode de la corde consiste à choisir $x_0 \in [a, b]$ convenablement puis à définir l'itération (x_k) par :

$$f(x_k) + q(x_{k+1} - x_k) = 0.$$

Autrement dit, on conduit la parallèle à la corde passant par le point $(x_k, f(x_k))$ et l'itéré suivant x_{k+1} désigne son intersection avec l'axe des abscisses. L'itération prend la forme $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, où Φ est la fonction

$$\Phi(x) = x - f(x)/q.$$

Observons que Φ est définie sur le segment $[a, b]$ et bénéficie de la même régularité que f . À ce stade néanmoins, rien ne garantit la bonne définition de la suite (x_k) dans la mesure où l'intervalle $[a, b]$ n'a pas lieu d'être stable par Φ . Par ailleurs, aucune hypothèse ne garantit a priori l'existence, ni l'unicité d'un zéro de f dans $[a, b]$. Si un tel zéro x^* existe cependant, et nous ferons cette hypothèse, alors puisque $\Phi(x^*) = x^*$, on peut s'attendre à pouvoir trouver un voisinage stable. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x^* , alors $\Phi'(x) = 1 - f'(x)/q$. Cette quantité est voisine de 0 si l'intervalle $[a, b]$ est choisi suffisamment proche du point x^* . En effet, on aura alors (ici "avec les mains") $q \simeq f'(x^*)$ et donc $\Phi'(x) \simeq 1 - f'(x)/f'(x^*) \simeq 0$.

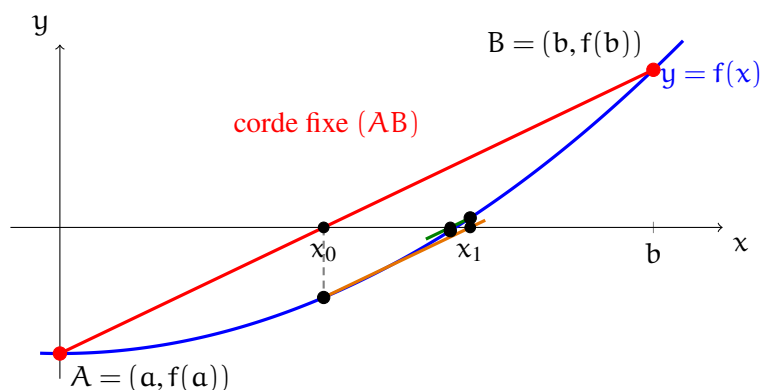


FIGURE 1 – Méthode de la corde.



4. Vitesse de convergence

Définition 10

Soit $(x_k)_{k \geq 0}$ une suite de réels de limite x^* et $p \in [1, +\infty[$.

1. On dit que la suite $(x_k)_{k \geq 0}$ converge à l'**ordre au moins** p si

$$\exists C > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, |x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|^p.$$

2. On dit qu'elle converge à l'**ordre exactement** p si elle converge à l'ordre au moins p mais jamais pour $q > p$. On appelle alors **taux de convergence** la plus petite constante C vérifiant l'inégalité.

En pratique, l'ordre de convergence quantifie le taux de croissance du nombre des premières décimales communes entre x^* et x_k , qui peuvent à chaque itération doubler ou tripler si la méthode est d'ordre deux, trois respectivement. Une suite géométrique converge à l'ordre 1, une convergence d'ordre deux est dite quadratique.

Concrètement pour une convergence quadratique, on obtient une estimation du type suivant, pour $k > \ell > k_0$,

$$|x_k - x^*| \leq \frac{1}{C} (C|x_\ell - x^*|)^{2^{k-\ell}}.$$

Proposition 11 Convergence locale à l'ordre p

Soient $p \geq 1$ et $\Phi \in \mathcal{C}^p([a, b])$, $x^* \in]a, b[$ un point fixe de Φ . On suppose que

$$\Phi^{(j)}(x^*) = 0, \forall j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket,$$

$$\Phi^{(p)}(x^*) \neq 0.$$

Alors il y a convergence locale des itérées au voisinage de x^* et la convergence est d'ordre exactement p et de taux $\Phi^{(p)}(x^*)/p!$.

Démonstration. Puisque $\Phi'(x^*) = 0$, on a en particulier $|\Phi'(x^*)| < 1$. D'après les énoncés précédents, il y a donc convergence locale des itérées au voisinage de x^* . La formule de Taylor assure que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe η_k dans l'intervalle ouvert séparant x^* et x_k tel que

$$\Phi(x_k) = \Phi(x^*) + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\Phi^{(j)}(x^*)}{j!} (x_k - x^*)^j + \frac{\Phi^{(p)}(\eta_k)}{p!} (x_k - x^*)^p.$$

La somme est nulle et puisque $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ et $x^* = \Phi(x^*)$, on a : $x_{k+1} - x^* = \frac{1}{p!} \Phi^{(p)}(\eta_k) (x_k - x^*)^p$. Ainsi, pourvu que la suite ne soit pas stationnaire et, puisque $(\eta_k)_{k \geq 0}$ converge aussi vers x^* , on a finalement

$$\frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^p} \sim \frac{\Phi^{(p)}(x^*)}{p!}.$$

■

Discussion sur la méthode de la sécante Cette méthode est une variante de la méthode de la corde, qui consiste à faire dépendre la corde de k . À chaque étape $k \geq 0$, le nouvel itéré x_{k+1} est obtenu par intersection avec l'axe des abscisses de la corde passant par les points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$. La récurrence nécessite donc deux initialisations x_0 et x_1 et prend la forme

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

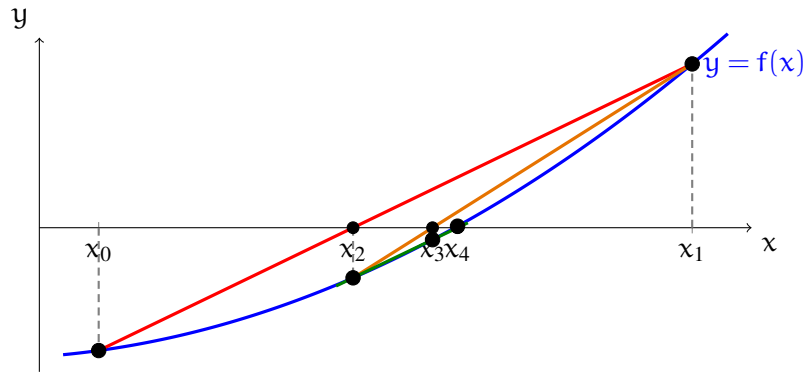


FIGURE 2 – Méthode de la sécante.

Théorème 12 Convergence locale d'ordre doré

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ une fonction admettant un zéro $x^* \in]a, b[$ vérifiant $f'(x^*) \neq 0$. Alors il existe un voisinage $I_\delta =]x^* - \delta, x^* + \delta[$ de x^* dans $[a, b]$ tel que pour tous $x_0, x_1 \in I_\delta$ la suite (x_k) est bien définie, à valeurs dans I_δ , converge vers x^* . De plus la convergence est d'ordre $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in]1, 2[$.

Démonstration (Idée de la preuve). La convergence peut se démontrer par exemple en s'inspirant de la preuve de la méthode de Newton à venir. Essayez le moment venu ! L'estimation de la vitesse de convergence est plus délicate et repose sur la majoration suivante :

$$\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}, |x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*||x_{k-1} - x^*|.$$

Le passage au logarithme permet de reformuler avec une suite linéaire récurrente de Fibonacci, dont le comportement asymptotique fait intervenir le nombre φ . ■

5. Critère d'attractivité en dimension n

Dans cette section, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Φ un élément de $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|\cdot\|$. On note $d\Phi(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ l'application différentielle de Φ au point $x \in \Omega$ de sorte que pour $h \in \mathbb{R}^n$ suffisamment petit et tel que $x + h \in \Omega$

$$\Phi(x + h) = \Phi(x) + d\Phi(x)h + o(\|h\|).$$

Comme on l'a fait en dimension 1, la question se pose de caractériser le caractère contractant de l'application Φ selon les propriétés de sa différentielle $d\Phi$ sur Ω . On a le lemme suivant qui établit un premier résultat global.

Lemme 13

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|\cdot\|$.

1. Si Φ est L -lipschitzienne sur Ω relativement à la norme $\|\cdot\|$, alors pour tout $x \in \Omega$, la norme subordonnée de la différentielle vérifie $\|d\Phi(x)\| \leq L$.
2. Si Ω est supposé convexe et si il existe une constante $L \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall x \in \Omega, \|d\Phi(x)\| \leq L$, alors Φ est L -lipschitzienne sur Ω relativement à la norme $\|\cdot\|$.

Démonstration.

1. Soit $x \in \Omega$. L'ensemble Ω étant ouvert et Φ différentiable, pour tout $\delta > 0$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$ et tel que pour tout $h \in B(0, r)$ on ait

$$\|\Phi(x + h) - \Phi(x) - d\Phi(x)h\| \leq \delta\|h\|.$$



On en déduit par l'inégalité triangulaire puis par l'hypothèse de contraction

$$\|d\Phi(x)h\| \leq \delta \|h\| + \|\Phi(x+h) - \Phi(x)\| \leq (\delta + L)\|h\|.$$

Ainsi il vient pour la norme d'opérateur $\|d\Phi(x)\| \leq L + \delta$, ceci étant valable pour tout $\delta > 0$, d'où le résultat.

2. Considérons $(x, y) \in \Omega^2$. Puisque l'ensemble Ω est convexe, le segment qui joint les points x à y est entièrement contenu dans Ω , on a alors la formule intégrale de Taylor-Laplace suivante :

$$\Phi(y) - \Phi(x) = \int_0^1 d\Phi(x + t(y-x))(y-x) dt.$$

En considérant la norme de cette quantité vectorielle, et la majorant par l'intégrale de la norme (monotonie de l'intégrale), puis utilisant les inégalités de normes d'opérateur, il vient

$$\|\Phi(y) - \Phi(x)\| \leq \int_0^1 \|d\Phi(x + t(y-x))(y-x)\| dt \leq \int_0^1 \|d\Phi(x + t(y-x))\| \|y-x\| dt \leq L\|y-x\|.$$

Théorème 14

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $x^* \in \Omega$ un point fixe de Φ . Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. Il existe un voisinage fermé V de x^* dans Ω stable par Φ et une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ pour laquelle $\Phi|_V$ est contractante.
2. Le rayon spectral de la différentielle $d\Phi(x^*)$ vérifie $\rho(d\Phi(x^*)) < 1$.

De plus sous ces conditions, toute suite récurrente $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ initialisée en un point $x_0 \in V$ converge vers x^* .

Démonstration.

1. $\Rightarrow$ 2. Si $\Phi|_V$ est contractante de rapport $L < 1$, alors d'après le lemme précédent, $\|d\Phi(x^*)\| \leq L$ puis $\rho(d\Phi(x^*)) \leq \|d\Phi(x^*)\| \leq L < 1$.
2. $\Rightarrow$ 1. Réciproquement supposons $\rho(d\Phi(x^*)) < 1$. L'inégalité étant stricte et par les propriétés du rayon spectral, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ telle que $\|d\Phi(x^*)\| < 1$, puis par continuité de $\|d\Phi\|$, il existe $r > 0$ tel que $V = \bar{B}(x^*, r) \subset \Omega$ et tel que pour tout $x \in V$ on ait $\|d\Phi(x)\| < 1$.
Le voisinage V étant fermé on pose $L := \max_{x \in V} \|d\Phi(x)\| < 1$ et le voisinage étant convexe, le lemme précédent s'applique pour en déduire que $\Phi|_V$ est finalement contractante sur V de rapport L pour la norme considérée. Par suite $\Phi(V) \subset B(x^*, Lr) \subset V$ car x^* est point fixe de Φ .

Remarque

Les méthodes itératives linéaires vues au chapitre précédent se plongent aisément dans tout ce formalisme. Rappelons que l'itération pour résoudre $(M - N)x = b$ prend la forme $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b) =: \Phi(x_k)$, et $d\Phi(x) : h \mapsto M^{-1}Nh$, qui ne dépend pas de x . L'application $x \in \mathbb{R}^n \mapsto d\Phi(x)$ est ainsi constante et l'itération considérée est (globalement) contractante sur $\mathbb{R}^n$ sitôt que $\rho(d\Phi(x^*)) < 1$, ce qui explique les résultats globaux de convergence que nous avons alors pu obtenir : aucune hypothèse sur la proximité de x_0 à la solution/limite x^* n'a été requise.

III. Méthode de Newton

1. Présentation géométrique en dimension un

La méthode numérique de Newton consiste à choisir $x_0 \in [a, b]$ et à définir à chaque étape $k \geq 0$ l'itération x_{k+1} comme l'intersection avec l'axe des abscisses de la tangente à la courbe représentative de f au point $(x_k, f(x_k))$, autrement dit solution de l'équation

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0.$$



Sous réserve de bonne définition l'itération prend alors la forme

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

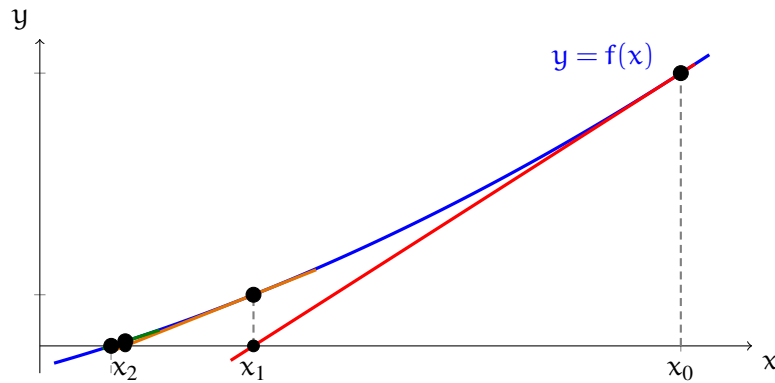


FIGURE 3 – Méthode de Newton.

2. Étude générale de la méthode de Newton

Tout comme en dimension 1, la méthode de Newton en dimension supérieure s'appuie sur le développement linéaire de Taylor de l'équation à résoudre, écrit au voisinage de l'itéré x_k . On se sépare de la non-linéarité contre un principe itératif appliqué à des équations linéaires :

$$f(x_k) + df(x_k)(x - x_k) = 0.$$

L'itération suivante est donc, dès lors que $df(x_k) \in GL_n(\mathbb{R})$, obtenue par la formule

$$x_{k+1} = x_k - df(x_k)^{-1}f(x_k).$$

En pratique, il faut ainsi à chaque itération calculer la différentielle puis résoudre le système linéaire $df(x_k)\delta_k = -f(x_k)$ et enfin poser $x_{k+1} = x_k + \delta_k$. La résolution de ce système linéaire peut être elle-même effectuée par des méthodes directes ou itératives.

Théorème 15 Convergence locale quadratique

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $x^* \in \Omega$ tels que

- $f(x^*) = 0$,
- $df(x^*)$ est inversible, on note alors $C > 0$ tel que $\|df(x^*)^{-1}\| \leq C$,
- la différentielle de f est localement lipschitzienne au voisinage de x^* :

$$\exists R, L > 0 \text{ t.q. } B(x^*, R) \subset \Omega \text{ et } \forall x, y \in B(x^*, R), \|df(x) - df(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Alors il existe r , avec $0 < r < R$ tel que pour tout $x_0 \in B(x^*, r)$ la suite $(x_k)_{k \geq 0}$ est bien définie, à valeurs dans $B(x^*, r)$ et converge vers x^* avec de plus

$$\forall k \geq 0, \|x_{k+1} - x^*\| \leq CL\|x_k - x^*\|^2.$$

Les propriétés de f peuvent être plus restrictives et confortables, si par exemple on suppose $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ auquel cas le caractère lipschitzien de df au voisinage de x^* est automatique. Ici cependant, comme on le



verra dans la preuve, le voisinage dans lequel la convergence est garantie peut être explicité en fonctions des données.

Démonstration. Soit $x \in \Omega$. Déterminons dans un premier temps si $df(x)$ est inversible en nous appuyant sur la proximité de x au point x^* . On a l'égalité d'endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ suivante

$$df(x) = df(x^*) - df(x^*) + df(x) = df(x^*) \left[\text{id} - \underbrace{df(x^*)^{-1}(df(x^*) - df(x))}_{=:A(x)} \right].$$

On est en mesure d'étudier l'endomorphisme $A(x)$:

$$\|A(x)\| \leq \|df(x^*)^{-1}\| \|df(x^*) - df(x)\| \leq CL\|x^* - x\|.$$

Posons $r = \min(R, (2CL)^{-1})$.

Ainsi on a les inclusions $B(x^*, r) \subset B(x^*, R) \subset \Omega$.

De plus pour tout $x \in B(x^*, r)$, par ce qui précède $\|A(x)\| \leq 1/2$ et donc $df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$.

On peut alors estimer également la norme de son inverse $df(x)^{-1} = (\text{id} - A(x))^{-1}df(x^*)^{-1}$:

$$\|df(x)^{-1}\| \leq \|(\text{id} - A(x))^{-1}\| \|df(x^*)^{-1}\| \leq C \frac{1}{1-1/2} = 2C.$$

Cette estimation va permettre de localiser l'itération suivante y au voisinage de x^* . On a $f(x^*) = 0$ et $y = x - df(x)^{-1}f(x)$, d'où en utilisant la formule de Taylor-Laplace, puis la monotonie de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \|y - x^*\| &= \|x - x^* - df(x)^{-1}(f(x) - f(x^*))\| \\ &= \left\| df(x)^{-1} \left[f(x^*) - f(x) - df(x)(x^* - x) \right] \right\| \\ &\leq \|df(x)^{-1}\| \left\| \int_0^1 df(x + t(x^* - x))(x^* - x) dt - df(x)(x^* - x) \right\| \\ &\leq 2C \left\| \int_0^1 [df(x + t(x^* - x)) - df(x)](x^* - x) dt \right\| \\ &\leq 2CL \int_0^1 t \|x - x^*\|^2 dt \leq CL\|x - x^*\|^2. \end{aligned}$$

Cette inégalité est la clef de la preuve et nous apprend deux choses.

- D'abord, puisque $x \in B(x^*, r)$ avec $r \leq (2CL)^{-1}$, on obtient :

$$\|y - x^*\| \leq CLr\|x - x^*\| \leq \frac{1}{2}\|x - x^*\| \leq r/2,$$

et donc $y \in B(x^*, r/2)$. On peut dès lors, en choisissant l'initialisation $x_0 \in B(x^*, r)$, par récurrence définir la suite (x_k) à valeurs dans ce même voisinage, puisque stable par l'itération. On voit que $\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{1}{2}\|x_k - x^*\|$ pour tout k et donc la suite converge vers x^* au moins géométriquement de raison $\frac{1}{2}$, et vérifie la majoration attendue.

- On trouve en réalité beaucoup mieux à partir de cette majoration quadratique. Il faut comprendre qu'au fil de la convergence, la raison géométrique peut être améliorée. On obtient pour tout entier $k \geq 0$

$$(CL\|x_{k+1} - x^*\|) \leq (CL\|x_k - x^*\|)^2,$$

et donc par récurrence :

$$CL\|x_k - x^*\| \leq (CL\|x_0 - x^*\|)^{2^k} \leq (CLr)^{2^k} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}.$$

■



Variantes usuelles (quasi-Newton) Différentes difficultés pratiques peuvent survenir et on peut tenter d'y remédier, sachant que la robustesse ou l'efficacité (vitesse de convergence) s'en trouvent alors généralement dégradées.

- La différentielle df est parfois coûteuse ou impossible à évaluer.
Plusieurs stratégies sont envisageables : calcul périodique de la différentielle par exemple toutes les 10 itérations seulement, calcul approché de la différentielle par l'intermédiaire d'approximations locales directionnelles.
- Si le système linéaire est jugé trop coûteux à résoudre à chaque étape.
On peut se contenter d'une version approchée de l'itération suivante à chaque étape.