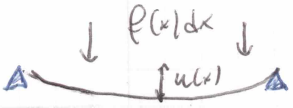
§2. Méthode des différences finies en dim. 1.

TD2

Problème modèle : pour une poutre.



$$(E)\quad \begin{cases} -u'' + c(x)u = f & 0 < x < 1 \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta. \end{cases}$$

a) Éléments analytiques.

- Conditions de Dirichlet homogènes.

Soit $g(x) = (\beta - \alpha)x + \alpha$. $\quad g(0) = \alpha$, $g(1) = \beta$.

$\underset{\sim}{u}(x) := u(x) - g(x)$.

$\underset{\sim}{u}$ est solution de :

$$(\underset{\sim}{P}) \begin{cases} -\underset{\sim}{u}''(x) + c(x)\,\underset{\sim}{u}(x) = f(x) - c(x)g(x) = \underset{\sim}{f}(x). \\ \underset{\sim}{u}(0) = \underset{\sim}{u}(1) = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ Condition Dirichlet homogène.

- <u>Solution de $(\underset{\sim}{P})$ par point fixe.</u>

$$G : (x, \xi) \in [0,1]^2 \longrightarrow G(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi) & \text{si } x \leq \xi \\ \xi(1-x) & \text{si } \xi < x. \end{cases}$$

<u>Théorème:</u> Soit $\underset{\sim}{u} \in \mathcal{C}^2$.

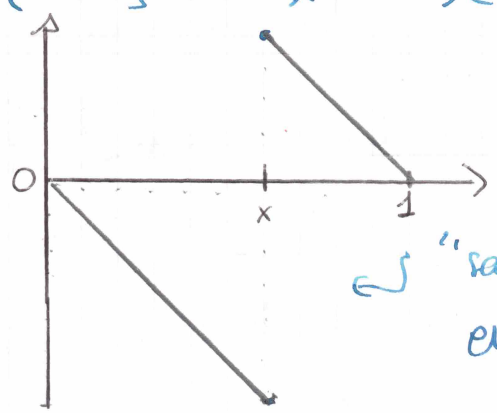
$\underset{\sim}{u}$ solution de $(\underset{\sim}{P}) \Leftrightarrow \forall x \in [0,1]$,

$$\underset{\sim}{u}(x) = -\int_0^1 G(x,\xi)\left[c(\xi)\underset{\sim}{u}(\xi) - \underset{\sim}{f}(\xi)\right] d\xi \quad \blacksquare$$

<u>Dem:</u> $\underset{\sim}{u}'' = -\int_0^1 G_x''(x,\xi)\left[c(\xi)\underset{\sim}{u}(\xi) - f(\xi)\right] d\xi$

à Calculer : $\frac{\partial^2}{\partial x^2} G$.

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \begin{cases} 1-\xi & \text{si } x \leq \xi \\ -\xi & \text{si } \xi < x. \end{cases}$$



$\hookleftarrow$ "saut" $= 1 > 0$ et pente < 0 $\Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\delta_x$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{u}''(x) = c(x)\,\underset{\sim}{u}(x) - \underset{\sim}{f}(x). \quad \blacksquare$$

<u>Itérations.</u>

$$(IH) : \begin{cases} \underset{\sim}{u}_{n+1}(x) = -\int_0^1 G(x,\xi)\left[c(\xi)\,\underset{\sim}{u}_n(\xi) - \underset{\sim}{f}(\xi)\right] d\xi \\ \underset{\sim}{u}_0 = 0 \end{cases}$$

Rappel (Thm. de point fixe, Picard) :

$F : X \to X$ espace "Complet"

$\|F(x) - F(y)\| \leq k \|x-y\|$, $k \in]0,1[$

$\Rightarrow$ $\exists!\ x_0 \in X$ / $F(x_0) = x_0$ et

$\begin{cases} u_{n+1} = F(u_n) \longrightarrow x_0. \\ u_0 \in X \end{cases}$

Dans le cas présent :

$X = \mathcal{E}^0$, $\|\cdot\|_\infty$ (par ex.)

$F(u) = -\int_0^1 G(x,s)\,[c(s)u(s) - f(s)]\,ds$

On a : $F(u) - F(v) = \int_0^1 G(x,s)\,[c(s)(v-u)]\,ds$

$x \in [0,1]$, $s \in [0,1]$ et, $\|G\|_\infty \leq 2$

$\Rightarrow$

$\|F(u) - F(v)\|_\infty \leq 2\|u-v\|_\infty \int_0^1 |c(s)|\,ds$

<u>Théorème</u> : On suppose $\underline{2\int_0^1 |c(s)|\,ds < 1}$.

Alors $\exists!$ sol. $\mathcal{E}^0$ [et dc. C^2...] au pb. $(\mathcal{E})$, limite des itérés. (IT). ∎

TD : Discuter l'existence et l'unicité de la sol. de $(\mathcal{E})$ quand $c(x) = \lambda = $ cte, $f(x) = \mu = $ cte. ∎

<u>NB</u> : Dans ce résultat "formel", la fonction c peut changer de signe

- Dans toute la suite, $c \geq 0$.

TD : Principe du maximum.

- Approximation des dérivées secondes.

Théorème : Soit u de classe C^4 sur $[0,1]$,

$h = \frac{1}{N+1}$, $x_i = ih$, $0 \leq i \leq N+1$.

Alors, pour $1 \leq i \leq N$,

$$-u''(x_i) = \frac{1}{h^2}\left[-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})\right] + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_i + \theta_i h),$$

$|\theta_i| < 1$. ∎

dem: Formule de Taylor à l'ordre 4 :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h u'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x_i + \theta_i^+ h)$$

$$u(x_{i-1}) = \dots\dots\dots + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(x_i + \theta_i^- h).$$

$-1 < \theta_i^- < 0 < \theta_i^+ < 1$

On fait la somme :

$$-u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1}) = -h^2 u''(x_i) - \frac{h^4}{24}\underbrace{\left[u^{(4)}(x_i + \theta_i^+ h) + u^{(4)}(x_i + \theta_i^- h)\right]}_{2\, u^{(4)}(x_i + \theta_i h)}$$

et Tvi $\Rightarrow$ $|\theta_i| \leq \max(\theta_i^+, -\theta_i^-)$. ∎

$u^i := u(x_i)$, $U_h = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^N \end{pmatrix}$.

. Ecriture d'un système linéaire

On suppose que u est "la" solution du problème (C). Alors :

$$A_h U_h = b_h + \varepsilon_h(u) \quad , \quad \text{avec}$$

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+c_1h^2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2+c_2h^2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$b_h = \begin{pmatrix} f_1 + \alpha/h^2 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N + \beta/h^2 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_h(u) = \begin{pmatrix} \varphi^{(4)}(x_1 + \theta_1 h) \\ \vdots \\ \varphi^{(4)}(x_N + \theta_N h) \end{pmatrix} \frac{h^2}{12}$$

$$\|\varepsilon(u)\|_1 = O(h) \qquad \|\varepsilon(u)\|_\infty = O(h^2).$$

$$\|\varepsilon(u)\|_2 = O(h^{3/2})$$

Soit $\bar{u}$ résoudre le problème approché :

$$A_h u_h = b_h .$$

Alors :

i) le pb. $A_h U_h = b_h$ admet une unique solution. ↳ Cf page 6. : "A_h est inversible"

ii) La méthode cv. $h \to 0$ i.e. $(U_h - u_h) \to 0$ pour une bonne norme.

Def: . A est une matrice positive si tous ses el$^{\pm}$ sont positifs (id pour les vect.).

. Une matrice A est <u>monotone</u> si elle est inversible et si A^{-1} est positive.

Thm: On suppose $c \geq 0$. Alors, la matrice A_h est monotone.

Lemme: Une matrice réelle A d'ordre N est monotone $\Leftrightarrow$

$$\{ v \in \mathbb{R}^N \; ; \; Av \geq 0 \} \subseteq \{ v \in \mathbb{R}^N ; \; v \geq 0 \}$$

Dem:

. A monotone et $Av \geq 0$. $\Rightarrow$

$$v = A^{-1}(Av) \geq 0 .$$

. $Av = 0 \Rightarrow A(\pm v) \geq 0 \Rightarrow \pm v \geq 0$ et $v = 0$

Donc A est inversible. Le j ème vecteur colonne de A^{-1} est $b_j = A^{-1} e_j$.

$Ab_j = e_j \geq 0 \Rightarrow b_j \geq 0$ et la matrice A^{-1} est ≥ 0.

dem. du thm.

Il suffit de prouver que

$$A_h v \geq 0 \Rightarrow v \geq 0 .$$

Soit v / $A_h v \geq 0$, $r \in \{1 \ldots N\}$ /

$v_r \leq v_i$, $\forall i = 1 \ldots N$.

$0 \leq (2 + c_1 h^2) v_1 - v_2 \leq (2 + c_1 h^2) v_1$ si $r = 1$.

$0 \leq -v_{r+1} + (2 + c_r h^2) v_r - v_{r-1} \leq c_r h^2 v_r$,

$0 \leq -v_{N-1} + (2 + c_N h^2) v_N \leq (1 + c_N h^2) v_N$ si $r = N$, $2 \leq r \leq N-1$

Donc $\min_{1\le i\le N} v_i \ge 0$ si $c_i > 0$, $2 \le i \le N-1$.

Il reste à traiter le cas où un des nb. c_i est $=0$ si $i = 2, \dots, N-1$.

La matrice $A_h + \varepsilon I$ est monotone, $\forall \varepsilon > 0$.

<u>Lemme:</u> On suppose $c \ge 0$. A_h est def. ≥ 0.

<u>Dem:</u> On note que:

$$v^t A_h v = \sum_{i=1}^{N} c_i v_i^2 + \frac{1}{h^2}\left(v_1^2 + v_N^2 + \sum_{i=2}^{N} (v_i - v_{i-1})^2\right)$$

- Donc: $v^t A_h v \ge 0$.
- $v^t A_h v = 0 \Rightarrow v_1 = v_N = 0$, et $v_i = 0$ pour $c_i = 0$. On considère le cas $c_2 = \dots = c_N = 0$.

Si $v_1^2 + v_N^2 + \sum_{i=2}^{N} (v_i - v_{i-1})^2 = 0$,

$v_1 = v_N = 0$.

et puis, $v_i - v_{i-1} = 0$ $\forall i = 2 \dots N$. Donc par rec. $v_i = 0$ $\forall i \ge 2$. $\Rightarrow v = 0$. ∎

<u>retour à la monotone:</u>

$(A_h + \varepsilon I)$ est monotone >0

$(A_h + \varepsilon I)^{-1}$ a des coef. >0.

puis $\varepsilon \to 0 \Rightarrow A_h^{-1}$ a des coef. >0. ∎

- <u>Convergence de la méthode.</u>

Le but de ce qui suit est la preuve du thm. suivant:

<u>Théorème:</u> On suppose $c \ge 0$, u la sol. de (C) et $u \in \mathcal{C}^4([0,1])$

On a la majoration :

$$\max_{1\le i\le N} |u_i - u(x_i)| = \| u_h - U_h \|_\infty \le$$

$$\frac{1}{96} \|\varphi^4\|_{L^\infty([0,1])} \cdot h^2 . \quad \blacksquare$$

<u>Lemme</u> : $\underline{\|A_h^{-1}\|_\infty \le 1/8}$, $\|(b_{ij})\|_\infty = \max_i \sum_j |b_{ij}|$. $\blacksquare$

<u>dem</u> :

$$A_{0h} := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & \ddots & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_h^{-1} \ge 0$ et $A_{0h}^{-1} \ge 0$

$A_h - A_{0h} = \mathrm{diag}(c_i) \ge 0$ et :

$A_{0h}^{-1} - A_h^{-1} = A_{0h}^{-1} (A_h - A_{0h}) A_h^{-1} \ge 0$

donc : $\|A_h^{-1}\|_\infty \le \|A_{0h}^{-1}\|_\infty$ ← vecteur,

or : $A_{0h}^{-1} \ge 0 \Rightarrow \|A_{0h}^{-1}\|_\infty = \|A_{0h}^{-1} e\|_\infty$

$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $A_{0h}^{-1} e$ est la solution du problème discret associé :

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

dont la solution $\varphi(x) = \frac{x(1-x)}{2}$ admet une dérivée troisième nulle.

Donc : $(A_{0h}^{-1} e)_i = \varphi(x_i)$ (ici $\varepsilon_h(\varphi) = 0$)

$$\Rightarrow \|A_{0h}^{-1} e\|_\infty = \max_{1\le i\le N} |\varphi(x_i)| \le \|\varphi\|_\infty = 1/8 . \quad \blacksquare$$

preuve du théorème.

On part de

$$A_h U_h = b_h + \varepsilon_h(u),$$

$$\varepsilon_h(u) = -\frac{h^2}{12}\left(u^{(4)}(x_i + \theta_i h)\right)_{i=1}^{N}$$

Donc :

$$\| U_h - u_h \| \leq \| A_h^{-1} \|_\infty \cdot \| \varepsilon_h(\ ) \|_\infty$$

Le résultat s'obtient en combinant $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq 1/8$ avec $\| \varepsilon_h(u) \|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \|u^{(4)}\|_\infty$.