

---

## Compléments sur les équations différentielles

Miguel Rodrigues

---

On rappelle ici quelques éléments de théorie sur les équations différentielles, parfois dites *équations différentielles ordinaires* par opposition aux équations aux dérivées partielles. Elles permettent entre autres choses d'écrire des équations pour l'évolution de phénomènes ponctuels ou homogènes spatialement. Pour des traitements plus complets on pourra se reporter au poly de Mme Sylvie Benzoni-Gavage<sup>1</sup> sur <http://math.univ-lyon1.fr/~benzoni/ED0.pdf> ou vers des livres [BG14, Ber17].

## 1 Définitions

### 1.1 Réduction d'ordre

**Définition 1** Soit  $I$  intervalle,  $d \in \mathbf{N}^*$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^d$ ,  $\dots$ ,  $\Omega_{n-1} \subset \mathbf{R}^d$  et

$$f : I \times \Omega_0 \times \dots \times \Omega_{n-1} \rightarrow \mathbf{R}^d$$

continue. Soit  $J \subset I$  un intervalle. On dit qu'une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$   $u : J \rightarrow \mathbf{R}^d$  résout sur  $J$  l'équation différentielle d'ordre  $n$  associée à  $f$  si, pour tout  $(\ell, t) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \times J$ ,  $u^{(\ell)}(t) \in \Omega_\ell$  et

$$\forall t \in J, \quad u^{(n)}(t) = f(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t)).$$

**Remarque 2** Il existe d'autres formes d'équations différentielles. Celles présentées comme ci-dessus sont dites résolues, car la dérivée d'ordre le plus élevé est donnée explicitement comme fonctions des dérivées d'ordre inférieur. Grâce au théorème d'inversion locale, localement toute équation différentielle non dégénérée peut être réécrite sous forme résolue.

**Remarque 3** Quitte à augmenter  $d$  en  $nd$ , on peut toujours supposer  $n = 1$ . Il suffit de poser  $\Omega = \prod_{\ell=0}^{n-1} \Omega_\ell$  et de remplacer  $u$  par  $v : J \rightarrow (\mathbf{R}^d)^n$ ,  $t \mapsto (u(t), \dots, u^{(n-1)}(t))$  et  $f$  par

$$g : I \times \Omega \rightarrow (\mathbf{R}^d)^n, \quad (t, v) \mapsto (v_2, \dots, v_n, f(t, v)).$$

On se focalisera désormais en conséquence sur l'ordre 1.

**Exemple 4** Ainsi l'équation de Newton

$$m x''(t) = F(t, x(t), m x'(t))$$

se réécrit

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} p(t) \\ F(t, (x, p)(t)) \end{pmatrix}.$$

---

1. Signalons au passage que sa page d'enseignement contient beaucoup d'autres textes intéressants.

## 1.2 Réduction au cas autonome

**Définition 5** On dit qu'une équation est autonome lorsque la famille de champ de vecteurs qui la définit ne dépend pas du temps, sa première variable. On dit qu'une équation d'ordre 1 est affine ou linéaire avec second membre si les champs de vecteurs sont affines en leur seconde variable<sup>2</sup>, et qu'elle est linéaire ou linéaire homogène s'ils sont linéaires en leur seconde variable. On dit qu'elle est scalaire si  $d = 1$ .

**Remarque 6** Quitte à augmenter  $d$  en  $d + 1$ , on peut toujours supposer que l'équation est autonome. Il suffit de poser  $\Omega' = I \times \Omega$  et de remplacer  $u$  par  $v : J \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ ,  $t \mapsto (t, u(t))$  et  $f$  par

$$g : I \times \Omega' \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d, \quad (t, v) \mapsto (1, f(v)).$$

Cependant cette réduction ne préserve pas toutes les simplifications usuelles de la théorie (linéarité,...). Aussi nous n'en ferons pas usage.

## 1.3 Solutions maximales

**Définition 7** Soit  $I$  intervalle,  $d \in \mathbf{N}^*$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  et  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$  continue. Soit  $J \subset I$  un intervalle. On dit qu'une solution  $u : J \rightarrow \mathbf{R}^d$  de l'équation associée à  $f$  est globale si  $J = I$ . On dit qu'une autre solution  $v : K \rightarrow \mathbf{R}^d$ , avec  $K \subset I$  intervalle, est un prolongement de  $u$  si  $J \subset K$  et  $v|_J = u$ . On dira qu'une solution  $u$  est maximale si elle ne possède pas de prolongement non trivial.

**Remarque 8** Toute solution globale est évidemment maximale. Nous allons voir que toute solution possède un prolongement maximal mais que ce prolongement n'est en général pas global. Donnons-en deux exemples.

**Exemple 9** Pour le champ de vecteurs  $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$ ,  $(t, x) \mapsto -1/x$  et tout  $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$  la fonction

$$] -\infty, \frac{1}{2} x_0^2 [ \rightarrow \mathbf{R}, \quad t \mapsto \sqrt{x_0^2 - 2t}$$

est une solution maximale.

**Exemple 10** Pour le champ de vecteurs  $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $(t, x) \mapsto x^2$  et tout  $x_0 \in \mathbf{R}$  la fonction

$$I_{x_0} \rightarrow \mathbf{R}, \quad t \mapsto \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

est une solution maximale si

$$I_{x_0} = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{si } x_0 = 0 \\ ] -\infty, \frac{1}{x_0} [ & \text{si } x_0 > 0. \\ ] \frac{1}{x_0}, \infty [ & \text{si } x_0 < 0 \end{cases}$$

**Remarque 11** Les exemples ci-dessus ont été choisis dans l'une des rares classes d'équations que l'on peut résoudre de manière essentiellement explicite : les équations scalaires tensorisées, c'est-à-dire celles où  $d = 1$  et  $f(t, u) = \alpha(t) \beta(u)$  pour certaines fonctions  $\alpha, \beta$ . Une solution partant en  $t_0$  de  $u_0$  tel que  $\beta(u_0) \neq 0$ , s'obtient par

$$u(t) = B_{u_0} \left( \int_{t_0}^t \alpha \right)$$

---

2. Attention la terminologie première/seconde variable n'a rien d'universelle, rien n'empêche d'écrire plutôt  $f(x, t)$ . Nous avons fait un certain choix au début de ce texte.

où  $B_{u_0}$  est l'inverse de

$$v \mapsto \int_{u_0}^v \frac{1}{\beta}$$

prenant la valeur  $u_0$  en 0.

L'existence d'un prolongement maximal est entre autres choses liée au fait que l'on puisse recoller des solutions.

**Lemme 12** *Pour une famille continue de champs de vecteurs continus, si  $u$  résout l'équation différentielle sur un intervalle  $J$ , que  $v$  résout l'équation différentielle sur un intervalle  $K$  et qu'il existe  $t_0 \in J \cap K$  tel que  $u(t_0) = v(t_0)$  alors*

$$(J \cap ]-\infty, t_0]) \cup (K \cap [t_0, \infty[) \rightarrow \mathbf{R}^d, \quad t \mapsto \begin{cases} u(t) & \text{si } t \leq t_0 \\ v(t) & \text{sinon} \end{cases}$$

est une solution.

## 2 Formulation intégrale et théorie locale

Soit  $I$  une intervalle,  $d \in \mathbf{N}^*$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  ouvert et  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$  continue.

### 2.1 Problème de Cauchy

Pour espérer une unique solution il nous faut compléter l'équation par une donnée initiale  $u_0 \in \Omega$  en un temps  $t_0 \in I$ . On parle de *problème de Cauchy*. Il est crucial ici que  $I$  soit un intervalle sinon il faudrait prescrire une contrainte de valeur sur chaque composante connexe de  $I$  pour espérer assurer l'unicité. Il est également important que  $u_0$  appartienne à l'intérieur de  $\Omega$  pour espérer qu'une solution existe, d'où l'hypothèse  $\Omega$  ouvert.

**Remarque 13** *Le lemme de recollement des solutions montre que, quitte à découper  $I = (I \cap [\inf I, t_0]) \cup (I \cap [t_0, \sup I]) =: I_1 \cup I_2$ , on pourrait se ramener aux cas  $t_0 = \min I$  ou  $t_0 = \max I$ . Par ailleurs le second cas se ramène au premier quitte à inverser la flèche du temps, c'est-à-dire quitte à changer  $t_0$  en  $-t_0$ ,  $I$  en  $-I$ ,  $u$  en  $v : -I \rightarrow \mathbf{R}^d$ ,  $s \mapsto u(-s)$  et  $f$  en  $(-I) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ ,  $(s, v) \mapsto -f(-s, v)$ .*

**Remarque 14** *Par ailleurs on pourrait également supposer — sans perdre en généralité — que  $t_0 = 0$  quitte à translater en temps c'est-à-dire quitte à changer  $I$  en  $-t_0 + I$ ,  $u$  en  $v : -t_0 + I \rightarrow \mathbf{R}^d$ ,  $s \mapsto u(t_0 + s)$  et  $f$  en  $(-t_0 + I) \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ ,  $(s, v) \mapsto f(t_0 + s, v)$ .*

Un point-clé de la théorie est que le problème de Cauchy possède une *formulation intégrale* qui se présente comme un problème de point fixe.

**Proposition 15** *Soit  $J \subset I$  un intervalle,  $t_0 \in J$  et  $u_0 \in \mathbf{R}^d$ .*

*Pour toute fonction  $u : J \rightarrow \Omega$  sont équivalents*

1.  *$u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et vérifie*

$$u(t_0) = u_0 \quad \text{et} \quad \forall t \in J, \quad u'(t) = f(t, u(t));$$

2.  *$u$  est continue et vérifie*

$$\forall t \in J, \quad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

## 2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Sous les hypothèses de la proposition le problème se réécrit comme la recherche d'un point fixe pour

$$\Phi : \mathcal{C}^0(J, \Omega) \rightarrow \mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d), \quad u \mapsto (J \rightarrow \mathbf{R}^d, t \mapsto u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds).$$

Si  $J$  est un segment, l'espace  $\mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d)$  est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme  $\| \cdot \|_\infty$  définie par

$$\forall u \in \mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d), \quad \|u\|_\infty = \max_{t \in J} \|u(t)\|.$$

On montre alors également que si  $f$  est lipschitzienne en sa seconde variable,  $\Phi$  l'est également. En travaillant dans un sous-espace fermé convenable de  $\mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d)$ , on peut ainsi s'appuyer sur le théorème de point fixe de Banach pour obtenir le théorème qui suit.

### Théorème 16 Théorème de Cauchy-Lipschitz.

*On suppose comme ci-dessus que  $I$  est un intervalle,  $\Omega$  est ouvert,  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$  est continue. On suppose de plus que  $f$  est localement lipschitzienne en sa seconde variable. Soit  $t_0 \in I$  et  $u_0 \in \mathbf{R}^d$ .*

*Alors le problème de Cauchy associé possède une unique solution maximale  $u : I_* \rightarrow \Omega$ .*

*L'intervalle maximal d'existence  $I_* \subset I$  est ouvert dans  $I$  et contient  $t_0$ .*

*De plus,  $u$  est un prolongement de toute solution du problème de Cauchy associé à  $(t_0, x_0)$ .*

*Par ailleurs, on a*

- **cas globalement lipschitzien** : si  $\Omega = \mathbf{R}^d$  et  $f$  est globalement lipschitzienne en sa seconde variable, alors  $u$  est globale,  $I_* = I$  ;
- **régularité** : si  $f$  est de plus  $\mathcal{C}^m$ ,  $m \in \mathbf{N}$ , alors  $u$  est  $\mathcal{C}^{m+1}$  ;
- **explosion en temps fini/sortie de tout compact** : si  $\sup I_* < \sup I$ , alors  $u(t)$  sort définitivement de tout compact dans la limite  $t \rightarrow \sup I_*$  ou plus explicitement

$$\|u(t)\| + \frac{1}{d(u(t), \partial\Omega)} \xrightarrow{t \rightarrow \sup I_*} +\infty$$

*et si  $\inf I_* > \inf I$ , alors  $u(t)$  sort définitivement de tout compact dans la limite  $t \rightarrow \inf I_*$  ou plus explicitement*

$$\|u(t)\| + \frac{1}{d(u(t), \partial\Omega)} \xrightarrow{t \rightarrow \inf I_*} +\infty$$

- **continuité par rapport à la donnée initiale** : si  $J \subset I_*$  est un segment contenant  $t_0$ , alors il existe un voisinage  $U \subset \Omega$  de  $u_0$  tel que l'application

$$U \rightarrow \mathcal{C}^0(J, \mathbf{R}^d), \quad v_0 \mapsto v|_J \text{ où } v \text{ est la solution maximale associée à } v_0$$

*soit bien définie et lipschitzienne.*

**Remarque 17** Dès que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $f$  est bien continue et localement lipschitzienne.

**Remarque 18** La simple continuité ne suffit pas à assurer l'unicité. L'exemple qui suit montre que la condition Lipschitz est proche d'être optimale. On peut néanmoins généraliser l'analyse par exemple au cas où au voisinage de tout point il existe  $(\alpha, \omega)$  tel que  $\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq \alpha(t) \omega(\|u_1 - u_2\|)$  avec  $\alpha$  intégrable et  $1/\omega$  non intégrable au voisinage de 0.

**Exemple 19** Pour  $0 < \alpha < 1$ , la fonction

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad (t, v) \mapsto \frac{1}{1-\alpha} |v|^\alpha,$$

est localement  $\alpha$ -höldérienne en  $v$  mais le problème de Cauchy associé en  $(t_0, u_0) = (0, 0)$  possède comme solution à la fois la fonction nulle et, pour tout  $\tau \geq 0$

$$u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} (t - \tau)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{si } t \geq \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Remarque 20** La continuité de  $f$  suffit en revanche à montrer l'existence d'une solution par un argument de compacité plutôt que de contraction. Il suffit par exemple de montrer que l'on peut extraire une suite convergente des fonctions construites en interpolant les valeurs provenant du schéma d'Euler explicite. Le théorème correspondant est appelé théorème de Cauchy-Peano.

**Remarque 21** L'équivalence explosion/sortie de tout compact est liée au fait que les

$$K_n := \left\{ x \in \Omega \mid \|x\| + \frac{1}{d(x, \partial\Omega)} \leq n \right\}$$

indexés par  $n \in \mathbf{N}^*$  donnent une exhaustion de  $\Omega$  par des compacts.

**Remarque 22** Il est instructif de savoir traiter directement le cas globalement lipschitzien. Il existe au moins trois manières naturelles :

1. La première est de remarquer que dans ce cas le temps d'existence  $T$  de l'argument de point fixe n'est contraint que par la constante de Lipschitz  $L$  (par  $LT < 1$ ) et pas par la donnée initiale. En appliquant récursivement le résultat d'existence locale on peut aller arbitrairement loin.
2. La deuxième est de noter que sur un segment  $J$  de longueur  $T$  la constante de Lipschitz de la  $k$ -ième itérée de  $\Phi$  est majorée par  $(LT)^k/k!$  où  $L$  désigne la constante de Lipschitz de  $f$  en sa seconde variable. Ainsi pour tout  $J$  il existe une itérée qui est strictement contractante.
3. La troisième consiste à directement écrire un point fixe sur le sous-espace de  $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R}^d)$  des fonctions  $u$  telles que

$$\sup_I e^{-\omega|t|} \|u(t)\| < +\infty$$

muni de la norme associée, avec  $\omega$  suffisamment grand. La constante de Lipschitz est alors majorée par  $L/\omega$  où  $L$  désigne la constante de Lipschitz de  $f$  en sa seconde variable.

**Remarque 23** Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure la semi-continuité inférieure (respectivement supérieure) de la borne supérieure (resp. inférieure) des intervalles maximaux d'existence. Ceux-ci ne sont en revanche pas continus comme l'illustre l'exemple suivant.

**Exemple 24** Pour le champ de vecteur

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad (t, (x, y)) \mapsto \left( \frac{x^2}{1+x^2y^2}, y \right)$$

l'intervalle d'existence de la solution maximale partant de  $(x_0, y_0)$  en  $t = 0$  est

$$I_{(x_0, y_0)} = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{si } y_0 \neq 0 \text{ ou } (x_0, y_0) = (0, 0) \\ ] -\infty, \frac{1}{x_0}[ & \text{si } x_0 > 0 \text{ et } y_0 = 0 \\ ] \frac{1}{x_0}, \infty[ & \text{si } x_0 < 0 \text{ et } y_0 = 0 \end{cases}.$$

### 2.3 Lemme de Grönwall

L'existence globale n'implique pas ni que la solution maximale est bornée ni qu'elle ne s'approche pas du bord de  $\Omega$  mais qu'elle ne peut pas le faire *avant* le bord de  $I$ .

Réciproquement, pour montrer qu'une solution maximale est globale il suffit de montrer que  $u$  ne peut pas exploser avant le bord de  $I$ . L'équation donne souvent directement une borne sur  $u$  en fonction d'elle-même. Le lemme qui suit (et plus encore ses nombreuses variantes) appliqué par exemple à  $y : I_* \rightarrow \mathbf{R}_+$ ,  $t \mapsto \|u(t)\|$  permet parfois de rendre ce cercle vertueux.

**Lemme 25 Lemme de Grönwall.** *Si  $J = [t_0, t_1]$  est un segment,  $A \in \mathbf{R}_+$ ,  $B : J \rightarrow \mathbf{R}_+$  est continue et  $y : J \rightarrow \mathbf{R}_+$  est une fonction continue telle que*

$$\forall t \in J, \quad y(t) \leq A + \int_{t_0}^t B(s) y(s) \, ds,$$

alors

$$\forall t \in J, \quad y(t) \leq A \exp\left(\int_{t_0}^t B(s) \, ds\right).$$

Ce lemme permet de montrer que si  $f$  croît au plus linéairement en sa seconde variable alors les solutions maximales sont globales. On prendra garde cependant de croire que seule la taille de  $f$  joue un rôle dans la détermination du caractère global des solutions. Cette question peut dépendre crucialement d'une annulation ou d'un signe favorable.

**Exemple 26** *Le champ de vecteurs*

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad (t, u) \mapsto -u^3$$

*génère des solutions maximales globales. Pour le champ de vecteurs*

$$f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad (t, u) \mapsto u^3,$$

*toutes les solutions maximales non nulles explosent en temps fini.*

Il existe des formes beaucoup plus générales du lemme de Grönwall. Ce qu'il faut retenir c'est que lorsque l'on vérifie une inégalité différentielle dont le second membre est croissant en la fonction que l'on cherche à majorer alors celle-ci est majorée par la solution de l'égalité différentielle. On pourrait aussi relaxer les hypothèses de continuité parce qu'il suffit de majorer le second membre qui lui est plus régulier et vérifie la même inégalité différentielle.

Fournissons une démonstration qui s'adapte aux généralisations et qui illustre un principe général de démonstration, l'*argument de continuité*.

*Démonstration.* Pour  $\varepsilon > 0$ , on définit  $z_\varepsilon : J \rightarrow \mathbf{R}_+$  par, pour  $t \in J$ ,

$$z_\varepsilon(t) = (A + \varepsilon) \exp\left(\int_{t_0}^t B(s) \, ds\right).$$

Si  $t \in [t_0, t_1]$  est tel que pour tout  $t_0 \leq s \leq t$ ,  $y(s) \leq z_\varepsilon(s)$ , alors on déduit de l'inégalité différentielle que  $y(t) \leq z_\varepsilon(t) - \varepsilon$ . Grâce à la continuité de  $z_\varepsilon - y$ , cela implique que l'ensemble des  $t \in [t_0, t_1]$  tel que pour tout  $t_0 \leq s \leq t$ ,  $y(s) \leq z_\varepsilon(s)$  est à la fois ouvert et fermé dans  $[t_0, t_1]$ . Puisque cet ensemble contient  $t_0$ , par convexité nécessairement il est égal à  $[t_0, t_1]$ .

On termine en prenant la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ■

## 2.4 Flot différentiel

On peut aussi vouloir exprimer la régularité de la solution par rapport à toutes ses variables de manière jointe. On peut le faire de la manière qui suit.

**Définition 27** *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, on peut définir un flot*

$$\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \Omega, \quad (t, t_0, u_0) \mapsto u(t) \quad \text{où } u \text{ est la solution maximale partant de } u_0 \text{ en } t_0$$

avec

$$\mathcal{D} = \{ (t, t_0, u_0) \in I^2 \times \Omega \mid t \text{ appartient à l'intervalle maximale d'existence en partant de } u_0 \text{ en } t_0 \}.$$

**Proposition 28** *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz,  $\mathcal{D}$  est ouvert dans  $I^2 \times \Omega$  et  $\Phi$  est localement lipschitzien. Si, de plus, pour un certain  $p \in \mathbf{N}$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  et  $d^p f$  est différentiable en sa seconde variable avec une différentielle continue, alors  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^{p+1}$ .*

Quand  $p = 1$  on montre également que

$$d\Phi(t, t_0, u_0)(h, h_0, \eta_0) = h f(t, \Phi(t, t_0, u_0)) + \Psi(t, t_0, \eta_0 - h_0 f(t_0, u_0))$$

où  $\Psi$  est le flot associé à la linéarisation de l'équation autour de  $t \mapsto \Phi(t, t_0, u_0)$ , correspondant donc à la famille de champs de vecteurs

$$g : I_* \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d, \quad (t, u) \mapsto d_u f(t, \Phi(t, t_0, u_0))(u)$$

avec  $I_*$  le temps maximal d'existence de la solution partant de  $u_0$  en  $t_0$ .

## 3 Théorie linéaire

Pour une équation linéaire,  $f : I \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ ,  $(t, u) \mapsto A(t) u$  où  $A : I \rightarrow \mathcal{L}_d(\mathbf{R})$ , toutes les solutions sont globales et le flot est linéaire en sa dernière variable  $\Phi : I^2 \times \mathbf{R}^d$ ,  $(t, t_0, u_0) \mapsto R(t, t_0) u_0$ , pour un  $R(t, t_0) \in \mathcal{L}_d(\mathbf{R})$ .

L'application  $R : I^2 \rightarrow \mathcal{L}_d(\mathbf{R})$  est appelée application *résolvante*<sup>3</sup>. Elle est  $\mathcal{C}^1$  et peut être caractérisée par l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. pour tout  $t_0 \in I$ ,  $R(t_0, t_0) = \text{Id}$  et pour tout  $(t, t_0) \in I^2$ ,

$$\partial_t R(t, t_0) = A(t) \circ R(t, t_0);$$

2. pour tout  $t_0 \in I$ ,  $R(t_0, t_0) = \text{Id}$  et pour tout  $(t, t_0) \in I^2$ ,

$$\partial_{t_0} R(t, t_0) = -R(t, t_0) \circ A(t_0);$$

3. pour tout  $(t, t_0) \in I^2$ ,

$$R(t, t_0) = \text{Id} + \sum_{n=1}^{+\infty} (t - t_0)^n \int_{\Delta_n} A(t_0 + \tau_1(t - t_0)) \circ \cdots \circ A(t_0 + \tau_n(t - t_0)) d\tau$$

où  $\Delta_n$  désigne le simplexe

$$\Delta_n := \{ \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \mid 0 \leq \tau_n \leq \tau_{n-1} \leq \cdots \leq \tau_2 \leq \tau_1 \leq 1 \}.$$

---

3. Attention à l'homonymie avec les résolvantes de la théorie spectrale.

En général la formule explicite ci-dessus ne coïncide pas avec les formules exponentielles des cas particuliers mieux connus.

**Proposition 29** *Sont équivalents.*

1. Pour tout  $(t, t_0) \in I^2$ ,

$$R(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right).$$

2. Pour tout  $(t, t_0) \in I^2$ ,

$$A(t)A(t_0) = A(t_0)A(t).$$

C'est le cas si l'équation est autonome ou scalaire.

**Remarque 30** *Les exponentielles des blocs de Jordan étant explicites, puisque si  $\lambda \in \mathbf{C}$*

$$\forall t \in \mathbf{R}, \forall (i_0, j_0) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2, \quad (\exp(t[\lambda\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j}]_{i,j}))_{i_0, j_0} = \begin{cases} e^{\lambda t} \frac{t^{j_0-i_0}}{(j_0-i_0)!} & \text{si } j_0 \geq i_0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

dans le cas homogène, disposer d'une décomposition de Jordan explicite donnerait un caractère complètement explicite au résultat qui précède. On en déduit au moins la proposition qui suit.

**Proposition 31** *Soit  $d \in \mathbf{N}^*$  et  $A_0 \in \mathcal{L}_d(\mathbf{R})$  de valeurs propres<sup>4</sup>  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  de multiplicités<sup>5</sup>  $m_1, \dots, m_r$ .*

*Il existe des opérateurs  $C_j^k \in \mathcal{L}_d(\mathbf{R})$ ,  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $k \in \llbracket 0, m_j - 1 \rrbracket$  tels que pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,*

$$\exp(tA_0) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} e^{t\lambda_j} t^k C_j^k$$

**Corollaire 32** *Soit  $d \in \mathbf{N}^*$  et  $(a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbf{R}^d$  Les solutions de*

$$u^{(d)} = a_{d-1}u^{(d-1)} + \dots + a_0 u$$

*sont les fonctions de la forme<sup>6</sup>*

$$t \mapsto \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^{m_j-1} \operatorname{Re}(e^{t\lambda_j} t^k \gamma_j^k)$$

*pour certains  $C_j^k \in \mathcal{L}_d(\mathbf{R})$ ,  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $k \in \llbracket 0, m_j - 1 \rrbracket$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont les racines du polynôme  $X^d - \sum_{p=0}^{d-1} a_p X^p$  et  $m_1, \dots, m_r$  désignent leurs multiplicités.*

Par linéarité, connaître la résolvante est équivalent à connaître une base de solutions. Ainsi si l'on connaît une base de solutions  $(u_1, \dots, u_d)$ , on déduit

$$R(t, t_0) = [u_1(t) \cdots u_d(t)] [u_1(t_0) \cdots u_d(t_0)]^{-1}$$

en identifiant les vecteurs de  $\mathbf{R}^d$  à des vecteurs colonnes et les éléments de  $\mathcal{L}_d(\mathbf{R})$  à des matrices carrées. Par ailleurs les résultats ci-dessus peuvent être étendus aux cas affines.

4. Au sens complexe.

5. Algébriques.

6. La présence d'une partie réelle est simplement liée au fait que nous avons décidé de nous restreindre aux solutions réelles.



**Proposition 33** *Variation de la constante ou formulation de Duhamel*<sup>7</sup>.

Soit  $I$  un intervalle,  $A : I \rightarrow \mathcal{L}_d(\mathbf{R})$  continue de résolvante et  $b : I \rightarrow \mathbf{R}^d$  continue.

On considère  $f : I \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ ,  $(t, u) \mapsto A(t)u + b(t)$ .

Alors la solution maximale associée au problème de Cauchy est globale et donnée par

$$I \rightarrow \mathbf{R}^d, \quad t \mapsto R(t, t_0) u_0 + \int_{t_0}^t R(t, s) b(s) \, ds.$$

## 4 Dynamique des équations autonomes

### 4.1 Généralités

Nous nous focaliserons dorénavant sur le cas autonome où l'on suit constamment un seul champ de vecteur Lipschitz  $V : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ , de sorte que  $f : \mathbf{R} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ ,  $x \mapsto V(x)$ .

L'étude des solutions de telles équations,  $u' = V(u)$ , peut être vue comme un analogue continu de l'étude des suites définies par itérations  $z_{n+1} = F(z_n)$ . Notons par exemple que si  $\Phi$  désigne le flot associé, quand cela a un sens, on a bien  $\Phi((n+1)t, 0, u_0) = \Phi(t, 0, \Phi(nt, 0, u_0))$ . La principale différence est que la continuité des trajectoires et la connexité des intervalles permet l'utilisation d'arguments de barrière comme l'illustre le lemme suivant.

**Lemme 34** *Soit  $B : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$   $\mathcal{C}^1$  et  $b \in \mathbf{R}$  tel que si  $y \in \Omega$  est tel que  $B(y) = b$ , alors  $dB(y)(V(y)) < 0$ . Si  $u : I_* \rightarrow \mathbf{R}^d$  est une solution de  $u' = V(u)$  et  $t_0 \in I_*$  est tel que  $B(u(t_0)) > b$  alors pour tout  $t \in I_*$ ,  $t \geq t_0$ , on a  $B(u(t)) > b$ .*

Comme pour les suites d'itérées on peut caractériser les limites possibles de solutions.

**Lemme 35** *Si  $u : I_* \rightarrow \mathbf{R}^d$  est une solution de  $u' = V(u)$  telle que  $I_*$  soit un voisinage de  $+\infty$  et  $u_* \in \Omega$  est tel que  $\lim_{+\infty} u = u_*$ , alors  $u_*$  est un zéro de  $V$ .*

*Réciproquement si  $u_*$  est un zéro de  $V$ , alors  $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^d$ ,  $t \mapsto u_*$  résout  $u' = V(u)$ . Un tel  $u_*$  est appelé point d'équilibre de la dynamique générée par  $V$ .*

*Démonstration.* Seul le premier point mérite discussion. Par continuité du flot en  $u_*$ , on déduit de  $u(s+t) = \Phi(t, 0, u(s))$  (valable quand  $s$  et  $t+s$  sont suffisamment grands) que pour tout  $t$  suffisamment petit,  $u_*$  est un point fixe de  $\Phi(t, 0, \cdot)$ . On déduit le résultat en dérivant par rapport au temps. ■

Une partie significative de l'information est contenue dans les images des solutions, appelées *orbites*. Le lemme suivant sert entre autres choses à justifier que les orbites forment une partition de  $\Omega$ .

**Lemme 36** *Si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions maximales de  $u' = V(u)$  et  $t_1, t_2$  sont tels que  $u_1(t_1) = u_2(t_2)$ , alors  $u_2 = u_1(\cdot + t_1 - t_2)$ . En particulier si  $u_1 = u_2$  et  $t_1 \neq t_2$ ,  $u_1$  est globale et périodique de période  $|t_2 - t_1|$ .*

*Par comparaison avec une solution constante on en déduit que les solutions des équations scalaires autonomes sont soit constante soit strictement monotones.*

<sup>7</sup>. Signalons incidemment que l'une des rues menant à la gare de Rennes porte le nom de ce mathématicien.

L'ensemble des orbites munies de l'orientation marquant le sens de parcours est appelé *portrait de phase*. Il est particulièrement éclairant d'essayer de le<sup>8</sup> tracer en dimension 1 et 2. On notera cependant qu'en passant des solutions aux orbites on a perdu toute notion du temps de parcours : on ne sait rien des périodes des orbites périodiques, ni de si les orbites qui s'approchent des bords de  $\Omega$  correspondent à des solutions explosant en temps fini.

Dans le cas scalaire, connaître le portrait de phase est équivalent à tracer le tableau de signe de  $V$ . Pour s'exercer on pourra déterminer le portrait de phases de  $u' = u(1-u)(u-a)$  et de  $u' = \varepsilon(u^2 - a)u$  en fonction de  $a \in \mathbf{R}$  et de  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ .

On notera aussi qu'en dimension 2 s'il existe une quantité  $H : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  constante sur chaque orbite alors tracer le portrait de phases est presque équivalent à tracer les lignes de niveau de  $H$ . Plus généralement on peut essayer d'utiliser des quantités conservées pour réduire au moins localement la dimension de l'équation. Par ailleurs, il existe un théorème, le théorème de Poincaré-Bendixon, qui s'appuie sur la rigidité de la dimension 2 pour classifier la structure de l'ensemble des valeurs d'adhérence possibles dans le plan.

Dans le cas linéaire, en utilisant des coordonnées adaptées à la forme de Jordan, on obtient une bonne idée du portrait de phase. Elle justifie la terminologie suivante en dimension 2 quand les valeurs propres sont toutes non nulles : on dit que l'origine est un col ou un point-selle si les valeurs propres sont de signe distincts (donc réelles), un nœud (attractif ou répulsif) si elles sont réelles de même signe, un foyer (attractif ou répulsif) si elles sont complexes conjuguées de partie réelle non nulle, un centre si elles sont imaginaires pures. Attention : seul le caractère col/attractif/répulsif persiste sous perturbation non linéaire.

En général on essaie de se faire une idée du portrait de phases en

1. identifiant les zones de monotonie des coordonnées, c'est-à-dire en étudiant les signes des coordonnées de  $V$  ;
2. marquant les points d'équilibre ;
3. déterminant le comportement de  $V$  proche des bords de  $\Omega$ .

## 4.2 Stabilité des points d'équilibre

Comme pour les points fixes d'itération, les équilibres jouent un rôle différent selon leur stabilité.

**Définition 37** *On dit qu'un équilibre  $u_*$  de  $u' = V(u)$  est stable au sens de Liapounov<sup>9</sup> si pour tout  $\delta > 0$ , il existe un voisinage  $\Omega_\delta$  de  $u_*$  tel que toute solution maximale  $u$  telle que  $u(0) \in \Omega_\delta$  est définie sur  $\mathbf{R}^+$  et vérifie pour tout  $t \geq 0$ ,  $\|u(t) - u_*\| \leq \delta$ .*

*On dit qu'il est asymptotiquement stable s'il est stable et que un voisinage  $\Omega_*$  de  $u_*$  tel que toute solution maximale  $u$  telle que  $u(0) \in \Omega_*$  est définie sur  $\mathbf{R}^+$  et converge vers  $u_*$  en  $+\infty$ .*

*On dit qu'un équilibre est instable s'il n'est pas stable.*

**Remarque 38** *La stabilité de Liapounov est globale en temps positif. Elle doit être contrastée avec celle sur des segments de temps donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz, appelée stabilité de Hadamard. C'est cette dernière que l'on généralise et cherche à rendre uniforme en les pas de discrétisation quand*

8. Ou plutôt d'en tracer une partie bien choisie.

9. On utilise ici la translittération française des caractères cyrilliques. On trouve aussi Lyapunov dans la littérature, la translittération anglophone.

on analyse les schémas numériques pour les équations différentielles. Pour gagner en concision, par la suite on omettra de préciser au sens de Liapounov mais il faut se garder de confondre.

Commençons par considérer le cas linéaire.

**Théorème 39** *Supposons  $V$  linéaire.*

*L'origine est un équilibre asymptotiquement stable si et seulement toutes les valeurs propres de  $V$  (au sens complexe) sont de partie réelle strictement négative. Dans ce cas la convergence est exponentiellement rapide.*

*L'origine est un équilibre stable si et seulement toutes les valeurs propres de  $V$  (au sens complexe) sont de partie réelle négative et celles de partie réelle nulle sont semi-simples<sup>10</sup>.*

On peut démontrer ce résultat soit avec la décomposition de Jordan soit avec des formules de Cauchy. La deuxième partie du résultat est plus pénible à démontrer mais inutile pour le principe de linéarisation. On a déjà vu que la linéarisation du flot était obtenue en résolvant la linéarisation de l'équation. Puisque quand on linéarise une équation autonome autour d'une solution constante en temps on récupère une équation linéaire autonome on va pouvoir s'appuyer sur le théorème précédent. Le théorème suivant, connu comme théorème de Liapounov, montre quand le principe de linéarisation permet de trancher la question de la stabilité.

**Théorème 40** *Soit  $u_*$  un équilibre de  $V$ . Supposons  $V$  de classe  $C^2$  au voisinage de  $u_*$ .*

*Si l'origine est asymptotiquement stable pour l'équation linéarisée autour de  $u_*$ ,  $y' = dV(u_*)(y)$  alors l'équilibre  $u_*$  est asymptotiquement stable pour  $u' = V(u)$ .*

*Si  $dV(u_*)$  possède une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'équilibre  $u_*$  est instable pour  $u' = V(u)$ .*

Il existe un résultat plus fort, appelé théorème d'Hartman-Grobman, qui montre que si  $dV(u_*)$  ne possède pas de valeur propre de partie réelle nulle, alors il existe un homéomorphisme d'un voisinage de  $u_*$  vers un voisinage de l'origine qui conjugue les dynamiques non linéaire et linéarisée (en respectant le temps). Attention : seul la dimension des espaces propres stables/instables est préservée par homéomorphisme.

**Exemple 41** *Les exemples ci-dessous montrent que, concernant le principe de linéarisation, tout ce qui n'est pas énoncé ci-dessus est faux.*

1.  $0$  est asymptotiquement stable pour  $u' = -u^3$  mais pas pour sa linéarisation autour de  $0$ .
2.  $0$  est instable pour  $u' = u^3$  alors qu'il est stable pour sa linéarisation autour de  $0$ .
3. L'origine est asymptotiquement stable pour

$$\begin{cases} x' &= y - \frac{1}{16}x^5 \\ y' &= -x^3 - \frac{1}{4}y^3 - \frac{1}{4}x^4y \end{cases}$$

*mais instable pour l'équation linéarisée autour de lui. La partie stabilité découle du fait que le système non linéaire implique*

$$\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2\right)' = -\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2\right)^2.$$

---

10. C'est-à-dire que leurs multiplicités algébrique et géométrique coïncident, ou encore que tous les blocs de Jordan associés sont triviaux.

*Démonstration.* On ne fait qu'esquisser les arguments. Posons  $A_0 := dV(u_*)$ .

Commençons par la partie stabilité. Il existe alors  $C$  et  $\omega$  strictement positifs tels que, pour tout  $t \geq 0$ ,  $\|e^{tA_0}\| \leq C e^{-\omega t}$ . Il existe aussi  $\delta_0 > 0$  tel que la boule fermée centrée en  $u_*$  de rayon  $\delta_0$  soit incluse dans  $\Omega$  et que  $V$  soit  $\mathcal{C}^2$  sur cette boule. On note  $M$  un majorant de  $d^2V$  sur cette boule. La formule de Duhamel donne la représentation

$$u(t) - u_* = e^{tA_0}(u(0) - u_*) + \int_0^t e^{(t-s)A_0}(V(u(s)) - V(u_*) - dV(u_*)(u(s) - u_*))ds.$$

On en déduit que si  $\|u(0) - u_*\| \leq \delta_0/2C$  et  $t$  est tel que  $u$  soit défini sur  $[0, t]$  et pour tout  $0 \leq s \leq t$ ,  $\|u(s) - u_*\| \leq 2C e^{-\omega s} \|u(0) - u_*\|$ , alors, pour tout  $0 \leq s \leq t$ ,

$$e^{\omega s} \|u(s) - u_*\| \leq C \|u(0) - u_*\| + C^2 M \|u(0) - u_*\| \int_0^s e^{-\omega \tau} e^{\omega \tau} \|u(\tau) - u_*\| d\tau,$$

donc par le lemme de Gronwäll, pour tout  $0 \leq s \leq t$ ,

$$\|u(s) - u_*\| \leq C e^{\frac{C^2 M}{\omega} \|u(0) - u_*\|} \|u(0) - u_*\| e^{-\omega s}.$$

On conclut par un argument de continuité<sup>11</sup> (comme dans la démonstration du lemme de Gronwäll) quand

$$\frac{C^2 M}{\omega} \|u(0) - u_*\| < \ln 2,$$

que  $u$  est définie sur  $\mathbf{R}^+$  et que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\|u(s) - u_*\| \leq 2C e^{-\omega t} \|u(0) - u_*\|$ .

Passons à l'instabilité. Choisissons  $\omega > 0$ , un vecteur  $y_0$  et une norme<sup>12</sup>  $\|\cdot\|_*$  tels que  $\|y_0\|_* = 1$  et, pour tout  $t \geq 0$ ,  $\|e^{tA_0} y_0\|_* = e^{\omega t}$ . Supposons par ailleurs que l'instabilité choisie est suffisamment proche d'être la plus forte pour qu'il existe  $C'$  et  $\omega'$  strictement positifs tels que  $\omega' < 2\omega$  et, pour tout  $t \geq 0$ ,  $\|e^{tA_0}\|_* \leq C' e^{\omega' t}$ . Comme ci-dessus, par un argument de continuité, on montre qu'il existe  $C > 0$  tel que si  $\delta > 0$  est assez petit et  $0 < \varepsilon < \delta$ ,  $u_* + \varepsilon y_0$  génère une solution  $u$  définie sur  $[0, \omega^{-1} \ln(2\delta/\varepsilon)]$  telle que pour tout  $t$  dans cet intervalle

$$\|u(t) - (u_* + \varepsilon e^{tA_0} y_0)\|_* \leq C \varepsilon^2 e^{2\omega t}$$

de sorte que

$$\|u(\omega^{-1} \ln(2\delta/\varepsilon)) - u_*\|_* \geq 2\delta(1 - 2\delta C).$$

Cela conclut quand  $\delta < 1/(4C)$ . ■

### 4.3 Cas hamiltonien

Il existe une classe importante d'équations qui ne peuvent pas être traitées par le théorème ci-dessus. Nous les discutons maintenant.

Une *équation hamiltonienne* autonome est une équation de la forme<sup>13</sup>  $u' = V(u)$  où

$$V : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d, \quad u \mapsto J\nabla H(u)$$

11. Pour écrire les détails il est utile de traiter séparément le cas trivial où  $u(0) = u_*$ .

12. Cela ne demande une discussion que dans le cas où la valeur propre instable n'est pas réelle et parce que  $y_0$  est choisi réel.

13. En réalité, on ne discute ici qu'une sous-classe.

avec  $J$  un opérateur linéaire inversible et anti-symétrique et  $H : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Notons que l'existence d'un tel  $J$  implique que  $d$  est pair. Par ailleurs, l'équation implique la conservation de  $H$  le long des orbites

$$(H(u))'(t) = dH(u(t))(u'(t)) = \langle \nabla H(u(t)), J\nabla H(u(t)) \rangle = 0.$$

On peut aussi montrer que  $V$  est à divergence nulle de sorte que<sup>14</sup> le flot préserve les volumes.

La mécanique de Newton avec des forces provenant de potentiels entre dans ce formalisme. En effet, un système

$$m x'' = -\nabla W(x)$$

avec  $m > 0$  une masse et  $W : \Omega_0 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^N$ , une énergie potentielle se réécrit pour  $u = (x, p) = (x, m x')$  sous la forme ci-dessus avec  $d = 2N$ ,  $\Omega = \Omega_0 \rightarrow \mathbf{R}^N$ ,

$$J(u) = (p, -x), \quad H(u) = \frac{1}{2m} \|p\|^2 + W(x).$$

Ici les points d'équilibres sont les points critiques de  $H$  et en tout point  $u_*$ ,  $A_0 := dV(u_*)$  vérifie  $A_0^* = -J^{-1}A_0J$  de sorte que le spectre (au sens complexe) de  $A_0$  est symétrique par rapport aux axes réel et imaginaire pur. Cela empêche l'origine d'être asymptotiquement stable pour le linéarisé.

On peut cependant parfois utiliser la conservation de  $H$  comme substitut.

**Théorème 42** *Si  $u_*$  est un point critique de  $H$  tel que  $d^2H(u_*)$  soit définie positive ou définie négative, alors  $u_*$  est un équilibre stable.*

*Si  $u_*$  est un point critique de  $H$  tel que  $d^2H(u_*)$  soit définie avec un nombre impair de directions négatives<sup>15</sup> alors  $u_*$  est instable.*

Dans les cas laissés de côté par le théorème la stabilité ne dépend pas que de  $H$ , elle fait intervenir  $J$  de manière fine.

*Démonstration.* Dans la première partie, on montre dans le premier cas qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que si  $\|u(0) - u_*\|$  est assez petit alors  $u$  est défini sur  $\mathbf{R}^+$  avec pour tout  $t \in \mathbf{R}^+$ ,

$$\|u(t) - u_*\| \leq \sqrt{\frac{H(u(t)) - H(u_*)}{C}} = \sqrt{\frac{H(u(0)) - H(u_*)}{C}}.$$

Dans la seconde partie, on observe que le polynôme caractéristique  $D(\lambda) := \det(\lambda \text{Id}_{\mathbf{R}^d} - A_0)$  est continu, réel sur l'axe réel, et que sous l'hypothèse de la seconde partie  $D(0)$  est négatif alors que  $D(\lambda) \stackrel{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^d$ . Ainsi, dans ce cas, par le théorème des valeurs intermédiaires,  $A_0$  possède une valeur propre réelle positive.

■

Dans le cas où  $d = 2$ ,  $H(x, p) = \frac{1}{2m} \|p\|^2 + W(x)$  (avec  $m > 0$ ), on déduit que les seuls équilibres sont les  $(x_*, 0)$  avec  $W'(x_*) = 0$  et qu'ils sont stables si  $W''(x_*) > 0$ , instables si  $W''(x_*) < 0$ .

14. En utilisant la propriété pas encore rappelée

$$\det(d\Phi(t, 0, u_0)) = \exp\left(\int_0^t \text{div}(V)(\Phi(s, 0, u_0)) ds\right),$$

analogue non linéaire de la formule de Liouville.

15. Donc aussi de directions positives

## 5 Étude d'exemples

Nous allons étudier quelques exemples en combinant différents types d'argument (résolutions explicites, portraits de phase, barrières, quantités conservées, principe de linéarisation,...).

### 5.1 Résonance

Commençons par répondre à la question suivante : à quelle condition un petit forçage périodique sur un système qui aurait, seul, tendance à osciller peut-il avoir un effet gigantesque.

On se donne deux fréquences d'oscillation  $(\omega, \omega_0) \in \mathbf{R}_+^2$ . Considérons le système

$$\begin{cases} x'(t) &= \omega y(t) \\ y'(t) &= -\omega x(t) + \cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

ou l'équation complexe

$$z'(t) = i\omega z(t) + e^{i\omega_0 t}.$$

On vérifie grâce à la formule de Duhamel que les solutions sont bornées si et seulement si  $\omega \neq \omega_0$  et que dans la limite  $\omega_0 \rightarrow \omega$  les solutions sont de taille  $\mathcal{O}(|\omega - \omega_0|^{-1})$ .

Cela illustre le phénomène de résonance que l'on utilise positivement sur les balançoires, mais que l'on cherche en général à éviter quand il concerne l'effet du vent ou de la marche cadencée sur les constructions, ou de la musique sur les organes.

### 5.2 Pendule

En prenant la composante orthogonal au fil rigide (de longueur  $\ell$ ) de l'équation de Newton pour un pendule de masse  $m$  soumis à une force de gravité (supposée constante), on obtient l'équation

$$m\ell\theta'' = -mg\sin(\theta)$$

pour une mesure  $\theta$  de l'angle entre le fil et la verticale orientée dans le sens de la gravitation  $g > 0$  étant une constante de gravitation. On notera que l'on a implicitement utilisé un théorème de relèvement.

Le champ de vecteur associé est globalement lipschitzien. On vérifie sans peine que les équilibres sont en  $(\theta, \theta') = (n\pi, 0)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Le principe de linéarisation donne que ceux avec  $n$  impair sont instables mais ne tranchent pas ceux avec  $n$  pair (parce que les valeurs propres du linéarisé sont imaginaires pures).

L'équation entre dans le formalisme hamiltonien avec  $u = (\theta, \theta')$ , et

$$H(u) = \frac{1}{2}(\theta')^2 - \frac{g}{\ell}\cos(\theta)$$

et l'on en déduit avec le théorème de stabilité associé la stabilité des autres équilibres.

Comme  $H$  est conservé par l'évolution, on déduit le portrait de phases de ses lignes de niveau. Voir [https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule\\_simple#/media/Fichier:PenduleEspaceDesPhases.png](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_simple#/media/Fichier:PenduleEspaceDesPhases.png)

### 5.3 Problème à deux corps

On s'intéresse à la dynamique d'un satellite autour d'un astre (planète-étoile, lune-planète,...). L'équation pour la position relative du petit objet par rapport au centre de gravité des deux corps (supposé à l'origine) est

$$m x'' = -m g \frac{x}{\|x\|^3}$$

où  $m$  est la masse de l'objet et  $g > 0$  est une constante effective de gravitation. Certaines des conclusions établies ici sont connues comme les lois de Kepler.

On est dans le cadre newtonien avec une énergie potentielle

$$W : \Omega_0 \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto -\frac{mg}{\|x\|}$$

avec  $\Omega_0 = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . En particulier pour  $u = (x, x')$ ,  $H$  défini par

$$H(u) = \frac{1}{2}\|x'\|^2 - \frac{g}{\|x\|}$$

est conservé par l'évolution.

Comme  $x''$  est toujours colinéaire à  $x$  on déduit aussi que  $x \wedge x'$  est également conservé par l'évolution<sup>16</sup>. Si  $x \wedge x'$  est nul on déduit par un calcul direct que  $x/\|x\|$  est constant et que  $r := \|x\|$  vérifie

$$r'' = -g \frac{1}{r^2}$$

qui vient avec la conservation de

$$\frac{1}{2}(r')^2 - \frac{g}{r}.$$

Dans ce cas de figure, à partir d'un portrait de phase en  $(r, r')$ , on peut déterminer en fonction de la valeur initiale de cette énergie et du signe initial de  $r'$  si le satellite fonce dans l'astre ou part à l'infini. Savoir si l'atteinte de l'infini ou de l'astre se fait en temps fini ou infini demanderait un calcul.

Si  $x \wedge x'$  est non nul, on peut choisir un repère dans lequel il est aligné avec  $(0, 0, 1)$  et déduire avec  $r = \|x\|$  que  $x = r(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$  pour une certaine mesure d'angle  $\theta$ . Alors  $x \wedge x' = (0, 0, r^2\theta')$  donc  $r^2\theta'$  est constant<sup>17</sup> non nul. Puisque  $\theta'$  ne s'annule pas il est naturel de vouloir faire le changement de variable  $t \mapsto \theta(t)$ , ou dit autrement de chercher à exprimer  $r$  en fonction de  $\theta$ . Ici l'équation que l'on obtient alors peut se résoudre explicitement et si l'on connaît bien les équations des coniques dans un repère polaire centré sur un foyer on reconnaît une conique dans  $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$  avec l'origine comme foyer. Plutôt que suivre ce chemin très calculatoire utilisons les conservations

$$r^2\theta' \equiv q_0, \quad \frac{1}{2}((r')^2 + r^2(\theta')^2) - \frac{g}{r} \equiv H_0,$$

pour certaines constantes  $(q_0, H_0)$  dépendant des données initiales afin de déduire

$$r'' = \frac{q_0^2}{r^3} - g \frac{1}{r^2}$$

accompagné de la conservation de

$$\frac{1}{2}(r')^2 + \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{r^2} - \frac{g}{r}.$$

On obtient alors en plus de trajectoires qui foncent dans l'astre ou partent à l'infini on obtient aussi des trajectoires avec  $r$  périodique et même une trajectoire avec  $r$  constant égal à  $g/q_0^2$  (et stable pour la dynamique en  $r$ ). On remarquera que quand  $r$  est constant  $\theta'$  l'est aussi et que réciproquement pour tout  $\omega \neq 0$  il existe une trajectoire avec  $\theta' \equiv \omega$ , et elle correspond au rayon  $(g/\omega^2)^{1/3}$ . Cette observation est utile pour concevoir des satellites géostationnaires.

On pourra faire toutes sortes de remarques sur la monotonie des seuils en fonctions de  $g$ .

16. C'est en fait lié au fait que  $H$  soit invariant par rotation par le principe de Noether que l'on n'explicitera pas ici.

17. Cela dit que dans l'aire parcourue par  $x$  dans le plan  $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$  varie à vitesse constante.

## 5.4 Modèle SIR

On s'intéresse à un modèle classique d'épidémiologie, désormais malheureusement bien connu d'une large part de la population mondiale : le modèle SIR. Une présentation plus détaillée se trouve dans le premier volume de [Mur02, Mur03], la référence principale pour une première introduction aux modèles mathématiques de la biologie prise en un sens très large. On trouvera aussi une discussion des modèles proie-prédateurs de type Lotka-Volterra discutés ci-dessous.

Le modèle décrit l'évolution de la répartition d'une population entre une partie susceptible d'être infectée dont la proportion est notée  $S$ , une partie infectée dont la proportion est notée  $I$ , une partie qui ne peut plus être infectée, soit parce qu'elle a recouvré la santé et est immunisée soit parce qu'elle est morte. La proportion de cette dernière est notée  $R$ .

L'évolution est régie par

$$\begin{cases} S' &= -rSI \\ I' &= rSI - aI \\ R' &= aI \end{cases}$$

où  $a$  et  $r$  sont des constantes strictement positives, mesurant respectivement une vitesse de guérison/mort et une vitesse de contamination. Le paramètre  $r$  défend à la fois de l'infection et de la fréquence de croisement entre deux individus, on peut le diminuer par des mesures de confinement.

On va considérer le système comme posé sur des fonctions à valeurs dans  $\mathbf{R}^3$ , mais il n'est pertinent que quand  $S$ ,  $I$ , et  $R$  sont à valeurs positives et leur somme vaut 1. Commençons par vérifier que ces contraintes sont préservées par l'évolution. Le plus facile est de vérifier que le système implique bien  $(S + I + R)' = 0$ . Par ailleurs chaque point du plan  $I = 0$  est un équilibre, ce qui implique que la contrainte de positivité sur  $I$  est préservée. Cela implique que si l'on part avec  $I \geq 0$ ,  $R$  croît et  $S$  est compris entre 0 et sa valeur initiale. D'où les résultats de persistance espérés. On déduit qu'en partant avec ce type de contrainte les solutions sont globales.

Puisque  $S + I + R$  est constant, restreignons à l'étude de la dynamique réduite en  $(S, I)$  en partant avec  $S(0) \geq 0$ ,  $I(0) \geq 0$  et  $S(0) + I(0) \leq 1$ . Notons que les seuls équilibres sont les  $(S_0, 0)$  pour un  $0 \leq S_0 \leq 1$ . Le principe de linéarisation montre qu'ils sont instables quand  $rS_0 - a > 0$ . En particulier on sait déjà que quand on part avec  $r_0 := rS(0)/a > 1$  et  $I(0)$  petit, l'infection va se développer. Quand  $S(0) = 0$ , on a  $S \equiv 0$  et  $I$  décroît exponentiellement. Quand  $S(0) > 0$  et  $I(0) > 0$ , on a pour tout  $t > 0$ ,  $S(t) > 0$  et  $I(t) > 0$  donc  $S$  décroît strictement. En dressant un portrait de phase on obtient que si  $r/a \leq 1$  toutes ces solutions vérifient que  $I$  décroît vers zéro et vérifie  $0 < I(t) \leq I(0) \exp(-a(1 - r_0)t)$  : pas de développement de l'épidémie. Quand  $r/a > 1$ , c'est encore le cas quand  $S(0)$  est tel que  $r_0 \leq 1$ . En revanche quand  $r_0 > 1$ ,  $I$  commence par croître jusqu'à sa valeur maximale atteinte quand  $S$  prend la valeur  $a/r$  avant de décroître vers 0.

Dans le régime où  $r_0 > 1$ , on est également intéressé par la détermination de la valeur maximale de  $I$  et la limite de  $S$ . Cette dernière donne aussi la limite de  $R$ , qui est directement proportionnelle au nombre final de morts. Nous allons obtenir ces informations en trouvant une quantité conservée. Puisque  $S'$  ne s'annule pas, on peut la trouver en effectuant le changement de variable  $t \mapsto S(t)$  ou autrement dit en cherchant une relation  $I = \mathcal{I}(S)$  laissée invariante par la dynamique. La condition de persistance est

$$\mathcal{I}'(S) = -1 + \frac{a}{r} \frac{1}{S}$$



qui s'intègre en

$$\mathcal{I}(S) = -S + \frac{a}{r} \ln(S) + C_0$$

où  $C_0$  est une constante d'intégration. Ainsi  $I + S - \ln(S)a/r$  est une quantité conservée. La valeur maximale de  $I$  est donc

$$I(0) + S(0) \left(1 - \frac{\ln(r_0)}{r_0}\right)$$

et la valeur limite  $S_\infty$  de  $S$  est déterminée par

$$\frac{S_\infty}{S(0)} + \frac{1}{r_0} \ln\left(\frac{S(0)}{S_\infty}\right) = \frac{I(0)}{S(0)} + 1.$$

## 5.5 Modèle proie-prédateur

On s'intéresse pour finir à un modèle simple de dynamique des populations, appelés modèle de Lotka-Volterra. On y suit les effectifs d'une proie et de son prédateur, notés respectivement  $N$  et  $P$ . On suppose que sans prédateur la proie se reproduirait exponentiellement avec un taux constant  $a > 0$  et qu'elle ne meurt que par l'action des prédateurs dont la constante  $b > 0$  l'efficacité à tuer. À l'inverse sans proie le prédateur mourrait avec un taux exponentiel constant  $d > 0$  alors qu'il se reproduit proportionnellement au nombre de proies consommées avec une constante de proportionnalité  $c > 0$ .

Cela conduit au modèle

$$\begin{cases} N' &= aN - bNP \\ P' &= cNP - dP \end{cases}.$$

On vérifie aisément que les droites  $N = 0$  et  $P = 0$  sont invariantes par la dynamique de sorte que celle-ci préserve la positivité de  $N$  et  $P$ . On détermine facilement les zones de monotonie des coordonnées et le fait que les équilibres sont  $(0, 0)$  et  $(d/c, a/b)$ . L'équilibre  $(0, 0)$  est instable (par croissance des proies). Le principe de linéarisation ne permet pas de déterminer la stabilité de  $(d/c, a/b)$ .

Pour aller plus loin on cherche une quantité conservée. En la cherchant comme somme d'une fonction de  $N$  et d'une fonction de  $P$ , on trouve dans le quart de plan  $N > 0, P > 0$  que  $cN - d \ln(N) + bP - a \ln(P)$  est conservé. Puisque la fonction est coercive, les solutions sont globales. En étudiant les lignes de niveau on déduit que toutes les solutions partant avec  $N(0) > 0$  et  $P(0) > 0$  sont périodiques.

## Références

- [BG14] S. Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles*. Dunod, 2014.
- [Ber17] F. Berthelin. *Équations différentielles*. Cassini, 2017.
- [Mur02] J. D. Murray. *Mathematical biology. I*, volume 17 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002. An introduction.
- [Mur03] J. D. Murray. *Mathematical biology. II*, volume 18 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2003. Spatial models and biomedical applications.