Équations différentielles

Agrégation de mathématiques
Option modélisation

Benjamin BOUTIN
Septembre 2021

Extraits du programme du concours

9.2 Équations différentielles

(a) Équations différentielles de la forme $X' = f(t,X)$ sur $I \times \Omega$ avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Solutions maximales. Lemme de Grönwall. Théorème de sortie de tout compact (théorème « des bouts »).

(b) Cas des équations différentielles autonomes. Portrait de phase, comportement qualitatif. Stabilité des points d'équilibre (théorème de linéarisation).

(c) Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation des constantes (formule de Duhamel). Cas des coefficients constants. Application à la résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à 1.

13.5 Équations différentielles ordinaires

Aspects numériques du problème de Cauchy : méthode d'Euler explicite, consistance, stabilité, convergence, ordre.

Leçons d'analyse directement concernées

220. Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

221. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Programme spécifique de l'option B

(d) Équations différentielles ordinaires. Mise en évidence numérique de propriétés qualitatives des solutions. Aspects numériques du problème de Cauchy : mise en œuvre des méthodes d'Euler explicite et implicite, précision, consistance, stabilité, convergence, ordre. Utilisation de méthodes d'ordre élevé via les routines proposées par les logiciels.

AVANT-PROPOS. Ce document regroupe de façon synthétique les résultats les plus essentiels (en particulier pour l'épreuve d'option) avec toutefois des éléments de leurs démonstrations. Ces dernières seront parfois seulement esquissées et donc imprécises et méritent une reflexion approfondie durant votre travail personnel.

I. Fondamentaux théoriques et analyse qualitative

1. Cadre et vocabulaire

Définition 1 Problème de Cauchy

Étant donnés I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert connexe d'un espace de Banach E et $f : I \times \Omega \to E$ une application continue, on appelle problème de Cauchy la donnée d'un couple $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ et la recherche d'un couple (J, X) solution au sens suivant :

- $J \subset I$ est un intervalle ouvert contenant t_0,
- $X : J \to \Omega$ est dérivable sur J,
- le couple (J, x) vérifie :

$$\begin{cases} \forall t \in J, \quad X'(t) = f(t, X(t)) \\ X(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{$\mathfrak{C}$}$$

Remarque (Cadre topologique)

Dans ces notes, nous nous limiterons à une présentation du cas d'un espace vectoriel normé E de dimension finie, alors assimilé simplement à $E = \mathbb{R}^d$ (c'est le cadre du programme !). Dans le cas général, la complétude supposée sur E est d'importance car nombre de résultats d'existence et d'unicité reposent sur le théorème de point fixe contractant de Banach.

Définition 2 Notions de solutions

- (J, X) est appelée *solution locale* si J est un voisinage de t_0 dans I et que X est solution du problème de Cauchy sur J.
- Étant données deux solutions locales (J_1, X_1) et (J_2, X_2), on dit que (J_2, X_2) est un *prolongement* de (J_1, X_1) si $J_1 \subset J_2$ et si X_1 et X_2 coïncident sur J_1 ; on dit alors également que (J_1, X_1) est une *restriction* de (J_2, X_2) à l'intervalle J_1.
- Une solution locale (J, X) est dite *maximale* si elle n'a pas d'autre prolongement qu'elle-même.
- Une solution locale (J, X) est dite *globale* si $J = I$, elle est bien sûr maximale.

En premier lieu, nous rappelons l'outil incontournable pour étudier les équations différentielles.

Lemme 3 Grönwall (forme intégrale)

Soit I un intervalle réel contenant t_0 et $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue et telle que

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) \leqslant C + K \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\, ds \right|,$$

où C et K sont deux constantes réelles positives. Alors φ vérifie

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) \leqslant C e^{K|t - t_0|}.$$

Remarque

La forme traditionnelle des inégalités ne fait intervenir aucune des deux valeurs absolues et, en contrepartie, est limitée à des valeurs $t \geqslant t_0$. La démonstration qui suit est limitée à $t \geqslant t_0$ mais suffit à mettre en place les arguments importants.

Démonstration. En introduisant la fonction $\tilde{\varphi} : t \mapsto (C + K\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,ds)e^{-K(t-t_0)}$ l'hypothèse équivaut à l'inégalité

$$\forall t \in I,\ t \geqslant t_0, \quad \varphi(t) \leqslant \tilde{\varphi}(t)e^{K(t-t_0)}.$$

La fonction $\tilde{\varphi}$ est dérivable sur I et l'inégalité précédente nous apprend que pour tout $t \in I$, $t \geqslant t_0$:

$$\tilde{\varphi}'(t) = -K\tilde{\varphi}(t) + Ke^{-K(t-t_0)}\varphi(t) \leqslant 0.$$

$\tilde{\phi}$ est donc décroissante et pour tout $t \geqslant t_0$, $\tilde{\varphi}(t) \leqslant \tilde{\varphi}(t_0) = C$ qui permet de conclure. ■

Remarque

Le lemme de Grönwall admet des généralisations pour le cas de "coefficients variables". Elles se démontrent de façon analogue. Par exemple, étant données une fonction K sur I continue et positive et une constante $C \geqslant 0$,

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) \leqslant C + \int_{t_0}^{t} K(s)\varphi(s)\,ds$$
$$\Longrightarrow \quad \forall t \in I,\ t \geqslant t_0, \quad \varphi(t) \leqslant Ce^{\int_{t_0}^{t} K(s)\,ds}.$$

2. Résultats d'existence et d'unicité

Le résultat fondamental de ce cours est le théorème suivant. Une connaissance précise de ses hypothèses et du vocabulaire engagé est explicitement au programme. Plus encore, il est important de savoir l'appliquer convenablement à une situation donnée, ce pourquoi nous donnerons aussitôt un exemple.

Théorème 4 Cauchy-Lipschitz – existence et unicité d'une solution maximale

On se place sous les hypothèses suivantes :

$$\left|\begin{array}{l} f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d \text{ est continue et localement lipschitzienne par rapport à } x : \\ \quad \text{tout point } (t_0, x_0) \in I \times \Omega \text{ admet dans } I \times \Omega \text{ un voisinage } V \text{ tel que} \\ \quad \exists L > 0,\ \forall (t,x),(t,y) \in V, \quad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x - y\|. \end{array}\right. \qquad (\mathfrak{H})$$

Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, le problème $(\mathfrak{C})$ admet une unique solution maximale (J, X).

Démonstration admise. Pour une preuve complète, nous renvoyons aux ouvrages de référence. Dans [3, pp.121–126] ou [4, pp.142–147], la preuve du théorème précédent s'appuie sur la construction d'une suite d'approximations de la solution recherchée, obtenues à l'aide de la méthode d'Euler explicite.
Une autre approche (par exemple [3, pp.130–131] ou [1, pp.142–145]) repose sur un principe d'itération de Picard (argument de point fixe de Banach), comparable à la preuve qui suivra concernant le cas d'une fonction globalement lipschitzienne en x. ■

Un premier outil essentiel est un résultat d'unicité locale, conséquence du Lemme de Grönwall.

Lemme 5 Unicité locale

Sous les hypothèses ($\mathfrak{H}$), deux solutions locales distinctes de ($\mathfrak{C}$) ne peuvent pas se croiser.

Démonstration. Ce résultat d'unicité locale se déduit directement du lemme de Grönwall.

Supposons que deux solutions locales (J_1, X_1) et (J_2, X_2) vérifient $X_1(t_0) = X_2(t_0)$ pour un certain $t_0 \in J_1 \cap J_2$. On note $J = J_1 \cap J_2$. Pour tout t voisin de t_0 :

$$\|X_2(t) - X_1(t)\| \leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} \|X_2(\tau) - X_1(\tau)\| d\tau \right|,$$

où L est une constante de Lipschitz locale de f, issue dans un premier temps du choix d'un voisinage compact de t_0 dans J, prenant la forme $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ avec $\delta > 0$, tenant compte de la continuité des deux trajectoires voisines autour de t_0, et de l'hypothèse ($\mathfrak{H}$). Le lemme de Grönwall permet d'en déduire que pour tout t ainsi considéré :

$$\|X_2(t) - X_1(t)\| \leqslant e^{L|t-t_0|} \|X_2(t_0) - X_1(t_0)\| = 0.$$

Ainsi X_1 et X_2 coïncident sur le voisinage considéré de t_0.

En vue de démontrer que les solutions coïncident sur tout l'intervalle commun de définition J, on introduit l'ensemble $A = \{t \in J_1 \cap J_2,\ X_1(t) = X_2(t)\}$. Par l'hypothèse précédente $A \neq \emptyset$ car contient t_0 et même, on l'a vu tout un voisinage d'intérieur non-vide de t_0. Par ailleurs A est un fermé de J, en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application $X_1 - X_2$ continue sur J, et un ouvert de J, en conséquence du raisonnement précédent en chaque point de A. Ainsi $A = J$, d'où la coïncidence des deux solutions sur leur domaine commun de définition. ■

Le théorème suivant est un résultat d'existence et d'unicité globale (sur l'intervalle I tout entier) mais ses hypothèses sont plus fortes que ($\mathfrak{H}$).

Théorème 6 Cauchy-Lipschitz global

Soit $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue, globalement lipschitzienne par rapport à x :

$$\exists L > 0,\ \forall t \in I,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^d, \quad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x - y\|. \qquad (\mathfrak{H}_{\text{glob}})$$

Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$, le problème ($\mathfrak{C}$) admet une unique solution globale $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Démonstration.

Existence et unicité locale par point fixe. Soit $J \Subset I$ un intervalle compact contenant t_0. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R}^d)$ complet pour la norme $\|X\|_L = \max_{t \in J} \left(e^{-2L|t-t_0|} \|X(t)\| \right)$. Sur cet espace, on considère l'application suivante :

$$\Phi : E \to E$$
$$X \mapsto \Phi(X) : t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds.$$

La raison d'être de cette fonctionnelle est que $X \in E$ est un point fixe de Φ si et seulement si X est solution sur J de ($\mathfrak{C}$). Il s'agit à présent de démontrer que l'application Φ est contractante sur E.

Soient $X, Y \in E$ et $t \in J$, on a successivement

$$\begin{aligned}
\|\Phi(X)(t)-\Phi(Y)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s,X(s)) - f(s,Y(s))\,ds \right\| \\
&\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s,X(s)) - f(s,Y(s))\|\,ds \right| \quad \text{(croissance de l'intégrale)} \\
&\leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} \|X(s)-Y(s)\|\,ds \right| \quad \text{(par la propriété global-Lipschitz)} \\
&\leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} e^{2L|s-t_0|}\,ds \right| \|X-Y\|_L \\
&\leqslant \frac{L}{2L} e^{2L|t-t_0|} \|X-Y\|_L
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\|\Phi(X)-\Phi(Y)\|_L \leqslant \frac{1}{2}\|X-Y\|_L$. En conséquence du théorème de point fixe de Banach, il existe un unique point fixe $X \in E$ de l'application Φ.

Existence et unicité globale par prolongement. Afin de couvrir globalement l'intervalle I, on considère une suite exhaustive (croissante) de compacts $J_n \Subset I$ contenant chacun t_0, avec $I = \bigcup_{n\geqslant 0} J_n$. Le raisonnement précédent s'applique sur chacun de ces intervalles et l'argument d'**unicité locale** (Lemme 5 ou raisonnement précédent) garantit alors que les solutions ainsi définies coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition, se prolongeant donc récursivement de sorte à définir à la limite une solution sur I (procédé de **prolongement**). L'unicité de cette solution définie globalement sur I découle de l'unicité "sur tout compact de I" obtenue soit à travers le processus de point fixe, soit directement du Lemme 5. ■

Remarque

Au vu de la preuve, l'hypothèse de globale lipschitziannité ($\mathfrak{H}_{glob}$) précédente peut être affaiblie sans affecter la démonstration pour prendre la forme suivante :

$$\forall J \Subset I,\ \exists L_J > 0,\ \forall t \in J,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^d, \quad \|f(t,x)-f(t,y)\| \leqslant L_J \|x-y\|.$$

Malgré la possible dépendance de la constante L_J dans la partie compacte J de I considérée, la solution alors obtenue demeure globale sur I car globale sur chaque sous-intervalle J_n considéré puis prolongée à I tout entier.

Si nous renonçons aux hypothèses ($\mathfrak{H}_{glob}$) pour nous contenter du cadre ($\mathfrak{H}$), comment peut-on obtenir existence et unicité ? Sur quel intervalle procéder alors à un prolongement ?

Corollaire 7 Existence (et unicité) locale

Sous les hypothèses ($\mathfrak{H}$), pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ et tout voisinage V de ce point dans $I \times \Omega$ il existe $\alpha > 0$ vérifiant $J = [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \subset I$ et une (unique) solution (J, X) du problème ($\mathfrak{C}$), à valeurs dans V.

Démonstration (Partie technique). Le réel $\alpha > 0$ est choisi selon l'approche dite des *cylindres de sécurité*, dont le détail est laissé à la curiosité du lecteur [1, p.143]. Il s'agit grosso modo d'ajuster l'espace de Banach E précédent de sorte à reproduire la preuve au prix d'une réduction de l'intervalle de temps tenant compte de l'amplitude des variations de toute éventuelle solution. ■

Corollaire 8 Domaine de définition d'une solution maximale

Sous les hypothèses ($\mathfrak{H}$), une solution maximale de ($\mathfrak{C}$) est toujours définie sur un ouvert.

Démonstration. Le résultat d'existence locale précédent témoigne du fait que le procédé de prolongement peut être

opéré au plus sur un intervalle qui est un voisinage de chacun de ses points, donc un ouvert. ■

Remarque (Cadre d'hypothèses plus faibles)

Il est à noter que si f est seulement supposée continue mais E de dimension finie, on est tout de même en mesure d'obtenir un résultat d'existence (théorème de Cauchy-Peano) qui découle du théorème d'équicontinuité d'Arzéla-Ascoli et de la construction d'une suite approchante de solutions, [2, p.59]. Dans ce cas, on perd généralement l'unicité comme en témoigne l'exemple de l'équation $x' = -\sqrt{x}$, pour des données initiales $x(0) > 0$.

Une solution maximale est-elle globale ?

Lemme 9 Sortie de tout compact

Sous les hypothèses ($\mathfrak{H}$), on note (J, X) une solution maximale du problème de Cauchy ($\mathfrak{C}$) et pour les besoins de l'énoncé $J =]T_\star, T^\star[\subset I$.
Si $T^\star < \sup I$, alors X sort de tout compact de Ω au voisinage de $T^{\star -}$, c'est-à-dire :

$$\forall K \Subset \Omega,\ \exists T_K \in J, \forall t \in [T_K, T^\star[, \qquad X(t) \in \Omega \setminus K.$$

Un résultat analogue est valable si $T_\star > \inf I$ au voisinage de $T_\star^+$.

Démonstration. Le résultat se démontre par l'absurde. Voir [1, p.145]. ■

Remarque

En dimension finie et lorsque $\Omega = \mathbb{R}^d$ est l'espace tout entier, on parle d'**explosion en temps fini** car dire que X sort de tout compact de $\mathbb{R}^d$ signifie ni plus ni moins que $\lim_{t \to T^{\star -}} \|X(t)\| = +\infty$.

Exemple

- On considère $X' = X^2$ avec la donnée de Cauchy $(t_0, x_0) = (0, 1)$. On obtient par résolution explicite la solution maximale $X(t) = \frac{1}{1-t}$ sur l'ouvert $]-\infty, 1[$, de limite infinie en 1^-.
- On considère $X' = -1/X$ avec la donnée de Cauchy $(t_0, x_0) = (0, 1)$. On obtient par résolution explicite la solution maximale $X(t) = \sqrt{1-2t}$ définie sur l'ouvert $]-\infty, 1/2[$. La fonction f est définie sur $\Omega =]0, +\infty[$ et la solution sort de tout compact au voisinage de $t = 1/2^-$. Bien qu'elle admette un prolongement par continuité, elle n'est pas prolongeable en une fonction continuement dérivable.

Corollaire 10 Quelques conséquences directes de l'unicité locale

- Pour un système différentiel posé sur $\Omega = \mathbb{R}$, les trajectoires sont ordonnées.
- Pour un système différentiel autonome, toute trajectoire non-injective est périodique.
- Dans le plan $\Omega = \mathbb{R}^2$, toute trajectoire périodique d'un système différentiel autonome partitionne le plan en deux bassins invariants par le flot.
- Pour un système différentiel à coefficients périodiques (non-autonome) : $X' = f(t, X)$ avec pour tout (t, x), $f(t + T, x) = f(t, x)$, toute trajectoire X vérifiant pour un certain t_0 et un entier non-nul k, $X(t_0) = X(t_0 + kT)$ est kT-périodique.

3. Exemples à l'étude

Exemple (Équation d'ordre 1 en dimension 1)

$$x' = x(1-x) \tag{A}$$

Étude en séance

Exemple (Système d'ordre 1 en dimension 2)

$$\begin{cases} x' = y - x - 2 \\ y' = x^2 - y \end{cases} \tag{B}$$

Étude en séance

Exemple (Équation d'ordre 2 en dimension 1)

$$\theta'' = \sin\theta - \alpha\theta'. \tag{C}$$

Étude laissée en exercice

Les exemples (**B**) et (**C**) sont ou se reformulent comme des systèmes autonomes dans le plan $\Omega = \mathbb{R}^2$. L'étude qualitative de tels systèmes est facilitée par le tracé du portrait de phase.

Définition 11 Vocabulaire : portrait de phase

Pour un système différentiel plan ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$), on appelle portrait de phase l'ensemble des projections des solutions dans le plan $\mathbb{R}^2$, c'est à dire l'ensemble des courbes paramétrées $X(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$ solutions de ($\mathcal{C}$).

Le résultat d'unicité conjointement au caractère autonome des équations considérées implique que dans le portrait de phase les trajectoires ne peuvent pas se croiser (excepté d'une certaine manière en des points "atteints" asymptotiquement, donc par leur adhérence).

Les courbes décrivant le lieu d'annulation de chacune des composantes de $f(x,y)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ (dites *nullcline*) permettent de partitionner le plan selon l'orientation des vecteurs tangents aux courbes. Les points d'équilibres se retrouvent à l'intersection de ces courbes. Le comportement local aux points d'équilibres peut être approfondi par l'étude du système linéarisé (à voir dans la section suivante).

4. Équilibres d'un système dynamique

Définition 12 Équilibre

Un équilibre d'un système différentiel autonome $X' = f(X)$ posé sur $\mathbb{R} \times \Omega$ est un point $x_0 \in \Omega$ tel que $f(x_0) = 0$.

En conséquence des discussions précédentes, tout équilibre détermine une solution globale constante et réciproquement. Il est donc fréquent d'assimiler le point d'équilibre à sa trajectoire.

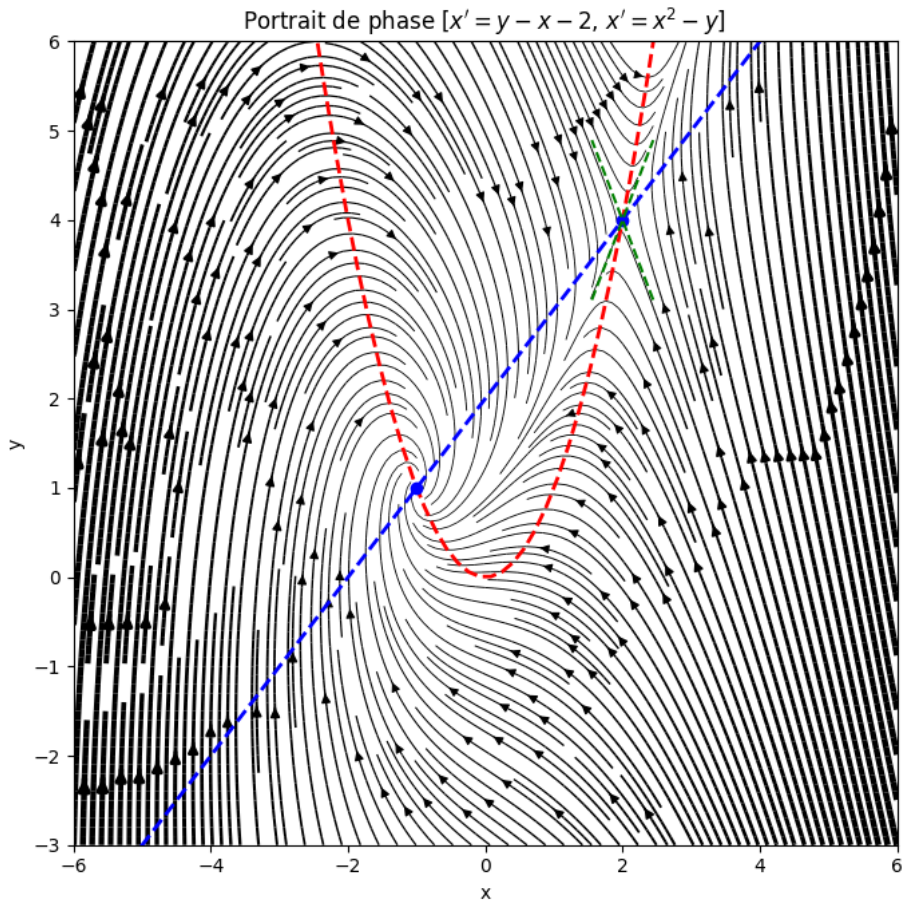


FIGURE 1 – Portrait de phase pour l'exemple (**B**)

Définition 13 Solution positivement globale

Pour un système différentiel autonome $X' = f(X)$ et une donnée de Cauchy $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, la solution maximale associée (I, X) (solution de ($\mathcal{C}$)) est dite positivement globale lorsque $\sup I = +\infty$.
Elle est dite négativement globale lorsque $\inf I = -\infty$.

Remarque

Étant donné que dans ce contexte, f ne dépend qu'artificiellement de la variable de temps (on peut décréter que $I = \mathbb{R}$) une solution maximale est alors globale si et seulement si elle est positivement et négativement globale. Les notions qui suivent ne font cependant pas cette hypothèse.

Définition 14 Stabilité — Stabilité asymptotique

Soit $x_0 \in \Omega$ un point d'équilibre d'une équation différentielle $X' = f(X)$.

- x_0 est dit **stable** si pour tout voisinage W de x_0 dans Ω, il existe un voisinage V de x_0 dans Ω tel que toute donnée de Cauchy $(t_0, \tilde{x})$ avec $\tilde{x} \in V$ émette une solution maximale positivement globale et à valeurs dans W.
- x_0 est dit **instable** s'il n'est pas stable.
- x_0 est dit **asymptotiquement stable**, s'il est stable et vérifie de plus l'existence d'un voisinage V' de x_0 tel que toute donnée de Cauchy $(t_0, \tilde{x})$ avec $\tilde{x} \in V'$ émette une solution maximale qui converge vers x_0 lorsque t tend vers l'infini.

Remarque

La notion de stabilité envisagée ici concerne seulement des points d'équilibres, c'est-à-dire des trajectoires constantes du flot de l'EDO. Ces notions peuvent être généralisées à la proximité (asymptotique) à des trajectoires positivement globales d'un autre type (par exemple périodiques).

4.a. Cas de systèmes linéaires

Les solutions du système différentiel

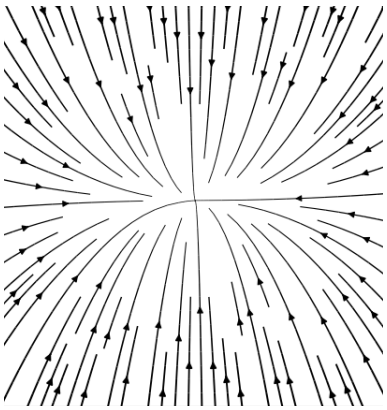
$$X' = AX, \qquad A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \tag{$\mathfrak{L}_2$}$$

prennent la forme $X(t) = \exp(tA)X(0)$. La réduction des matrices réelles de taille 2 permet alors de classifier le comportement des trajectoires selon les propriétés des valeurs propres de la matrice $A = P^{-1}A_0P$. On note $Z(t) = PX(t) = {}^{T}(z_1(t), z_2(t))$ les coordonnées de la solution dans la base de vecteurs propres de A. Les figures qui suivent sont tracées dans le plan (z_1, z_2), centré en 0.

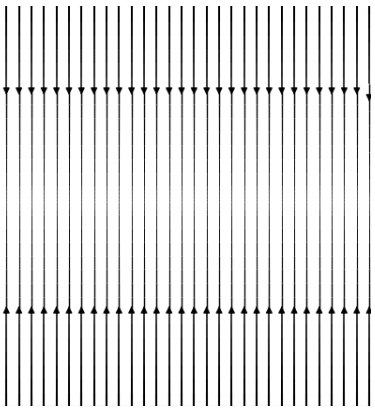
1. Cas $\mathbb{R}-$diagonalisable : $A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

   Les trajectoires sont de la forme $\begin{cases} z_1(t) = z_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ z_2(t) = z_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

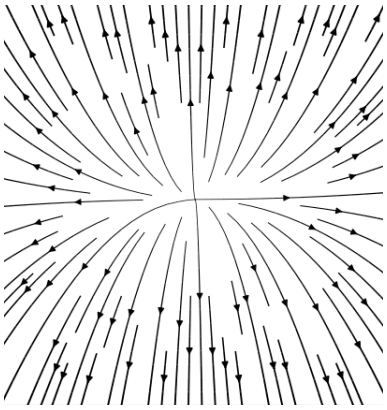
   - Puits ($\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 0$)



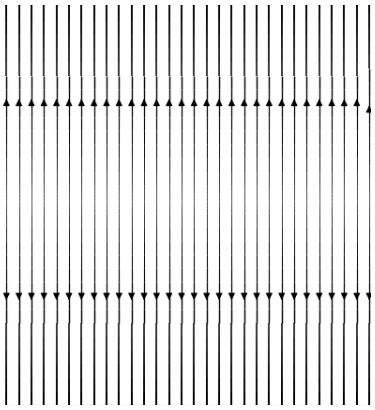
   - Puits non-isolé ($\lambda_1 = 0 > \lambda_2$)



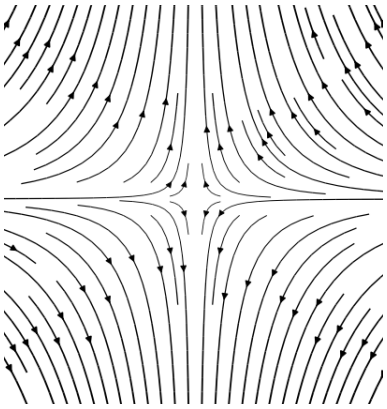
   - Source ($\lambda_1 \geqslant \lambda_2 > 0$)



   - Source non-isolée ($\lambda_1 = 0 < \lambda_2$)



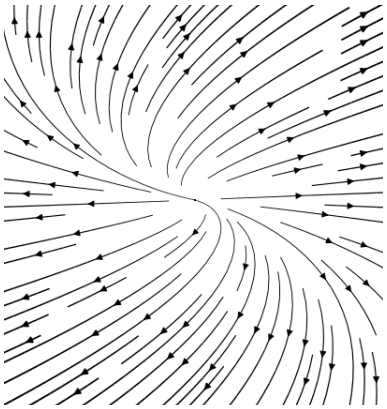
   - Col ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$)



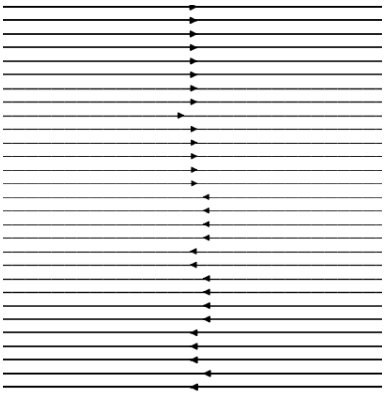
2. Cas $\mathbb{R}-$bloc de Jordan : $A_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

Les trajectoires sont de la forme $\begin{cases} z_1(t) = (z_1(0) + t z_2(0))e^{\lambda t} \\ z_2(t) = z_2(0)e^{\lambda t} \end{cases}$

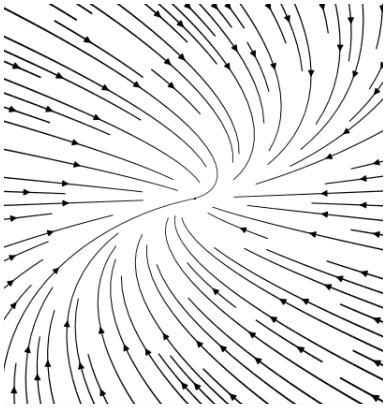
- Puits dégénéré ($\lambda_1 = \lambda_2 < 0$)



- Non-isolé dégénéré ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$)



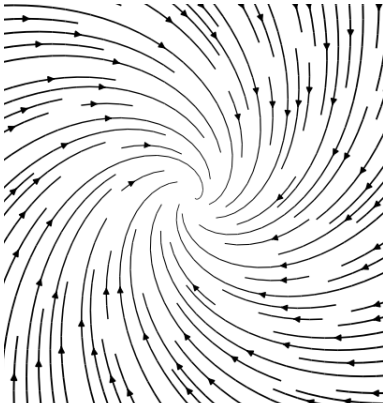
- Source dégénérée ($\lambda_1 = \lambda_2 > 0$)



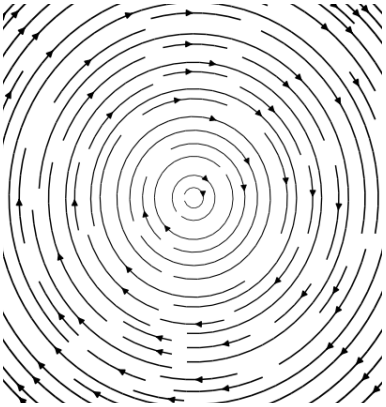
3. Cas spectre non-réel : $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ (valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$)

   Les trajectoires réelles sont de la forme $\begin{cases} z_1(t) = e^{\alpha t}(z_1(0)\cos \beta t + z_2(0)\sin \beta t) \\ z_2(t) = e^{\alpha t}(z_2(0)\cos \beta t - z_1(0)\sin \beta t) \end{cases}$

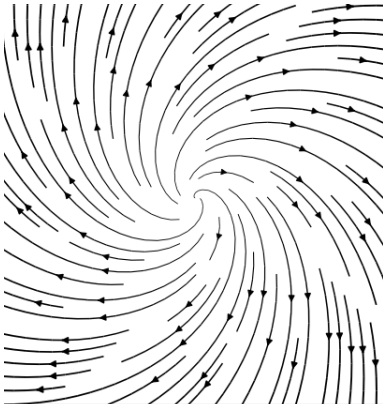
   - Foyer puits ($\alpha = \mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$)



   - Centre ($\alpha = \mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$)



   - Foyer source ($\alpha = \mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$)



Proposition 15 Stabilité (asymptotique) pour ($\mathfrak{L}_2$)

Le système différentiel plan ($\mathfrak{L}_2$) à coefficients réels admet $0 \in \mathbb{R}^2$ pour point d'équilibre. Cet équilibre est :

- asymptotiquement stable si et seulement si $\max(\mathrm{Re}\,\lambda_1, \mathrm{Re}\,\lambda_2) < 0$;
- stable si et seulement si $\max(\mathrm{Re}\,\lambda_1, \mathrm{Re}\,\lambda_2) \leqslant 0$ et 0 n'est pas valeur propre défective ;
- instable si et seulement si $\max(\mathrm{Re}\,\lambda_1, \mathrm{Re}\,\lambda_2) > 0$ ou si 0 est valeur propre défective.

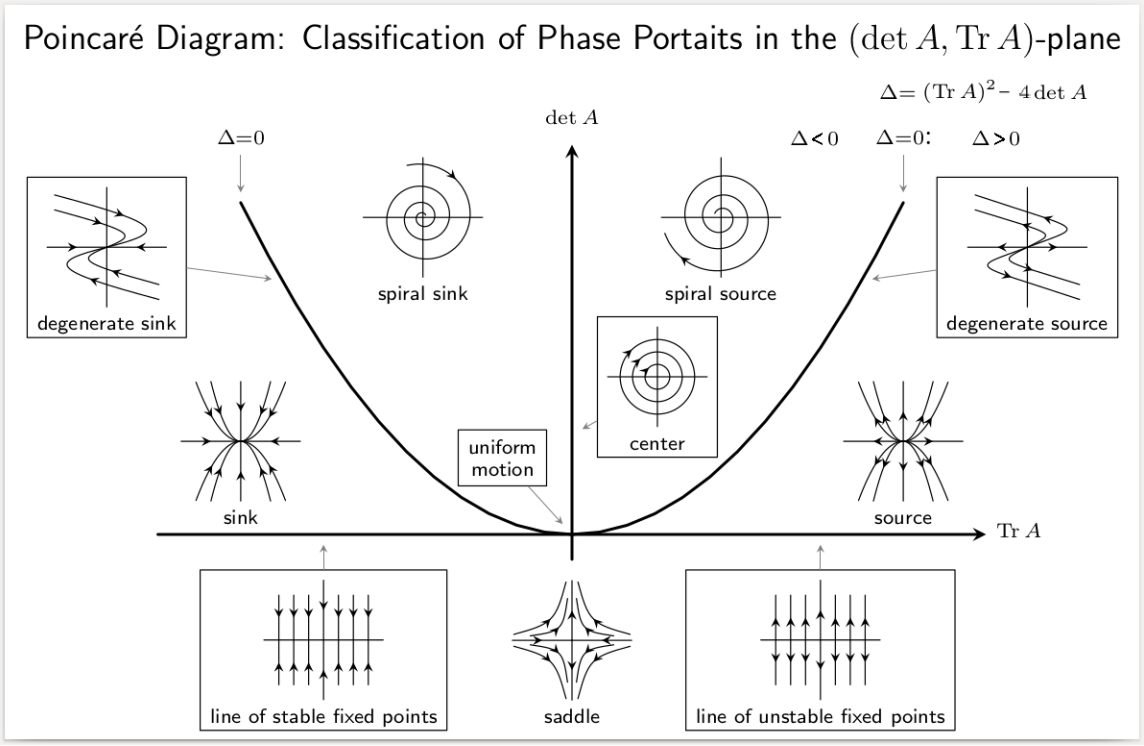


FIGURE 2 – Credit : Wikipedia. License : CC BY-SA 4.0

Utilisant les résultats de réduction des matrices dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, on a la généralisation suivante.

Théorème 16 Stabilité d'un système différentiel à coefficients constants

Étant donné un système différentiel **linéaire autonome** de la forme

$$X' = AX, \qquad A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C}). \tag{$\mathfrak{L}_d$}$$

Alors

- 0 est un équilibre (unique et isolé ssi $\ker A = \{0\}$),
- si $\forall z \in \mathrm{spec}\,A,\ \mathrm{Re}\,z < 0$, alors 0 est asymptotiquement stable ;
- si $\forall z \in \mathrm{spec}\,A,\ \mathrm{Re}\,z \leqslant 0$ et $\mathrm{spec}\,A \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$, alors de deux choses l'une :
  - si $\mathrm{spec}\,A \cap i\mathbb{R}$ contient une valeur propre défective, alors 0 est instable ;
  - sinon, 0 est stable mais non asymptotiquement stable ;
- si $\exists z \in \mathrm{spec}\,A,\ \mathrm{Re}\,z > 0$, alors 0 est instable.

Démonstration. Voir [3]. Exercice préalable : savoir calculer l'exponentielle d'un bloc de Jordan. ■

4.b. Théorème de linéarisation

Théorème 17 Stabilité des équilibres — théorème de linéarisation

Supposons que 0 est un équilibre du système différentiel **non-linéaire** autonome

$$X'(t) = f(X(t)),$$

où f est supposée différentiable en 0, de différentielle notée $Df(0)$. Introduisons $\lambda = \max_{z \in \text{spec}(Df(0))} \text{Re}\, z$. Alors on a les résultats suivants.

- Si $\lambda < 0$, alors 0 est asymptotiquement stable. En particulier, on a localement au voisinage de 0 des solutions globales et présentant une décroissance exponentielle au sens suivant :

$$\forall \mu \in]0, -\lambda[,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ |x(t_0)| < \delta \Rightarrow \forall t \geqslant t_0,\ x(t) \text{ existe et } |x(t)| \leqslant \epsilon e^{-\mu(t-t_0)}.$$

- Si $\lambda > 0$, alors 0 est instable.

Lorsque $\lambda \leqslant 0$ et $Df(0)$ admet des valeurs propres de partie réelle nulle, il n'est pas possible de conclure à la stabilité ou l'instabilité

Démonstration. Voir [3] (système linéaire + perturbation). Voir [4]. ■

Autrement dit, on peut retenir le principe heuristique suivant.
Principe : Au voisinage d'un équilibre x_0, les solutions d'un système différentiel non-linéaire $X' = f(X)$ ressemblent à celles de son linéarisé $X' = Df(x_0)(X - x_0)$, pourvu qu'aucune des valeurs propres de $Df(x_0)$ ne soit imaginaire pure.

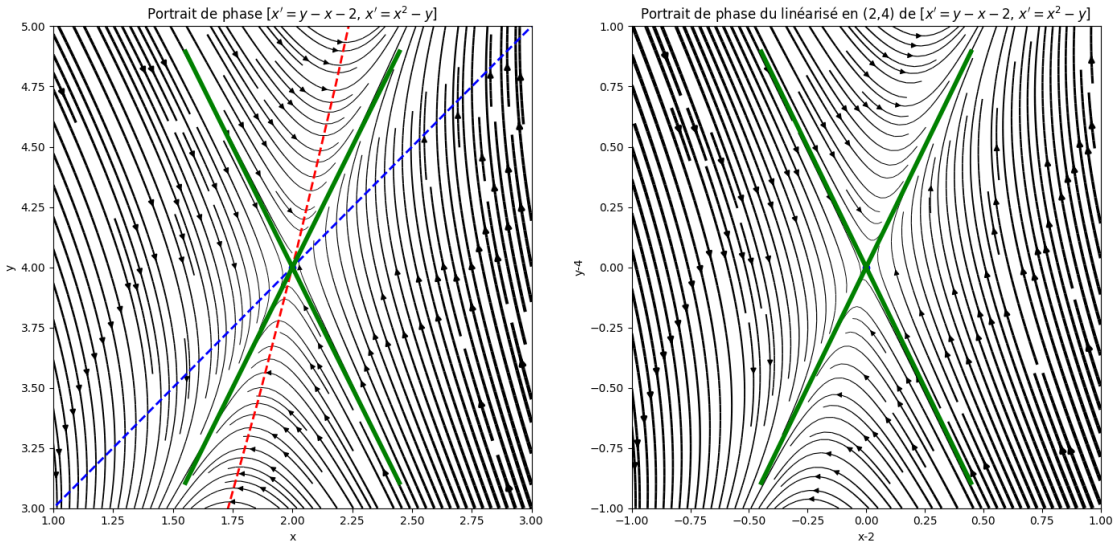


FIGURE 3 – Comparaison du portrait de phase pour l'exemple (**B**), au voisinage de l'équilibre $(2,4)$. (gauche : système d'origine, droite : son linéarisé). Les droites vertes indiquent les directions des vecteurs propres de la matrice jacobienne au point d'équilibre

Références

[1] Sylvie BENZONI-GAVAGE, *Calcul différentiel et équations différentielles*, Dunod, 2010.

[2] Michel CROUZEIX, Alain MIGNOT, *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, Paris, 1984.

[3] Jean-Pierre DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1996.

[4] John HUBBARD, Beverly WEST, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, 1999.