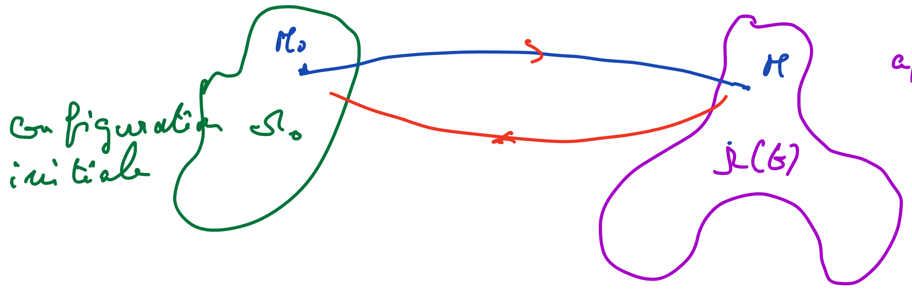
ref: G. Duvaut, Mécanique des milieux continus, Masson 1990

Modélisation élasticité linéaire

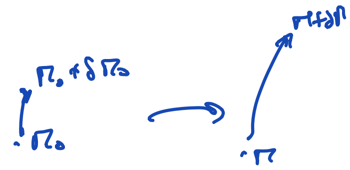
Milieu continu : milieu dont les pts - densité, élasticité etc.- sont continues.

Milieu continu.

Étude des déformations



après déformation



$$(M_0) = X = (X_1, X_2, X_3)$$

$$(M) = x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= f(X,t) \\ X &= g(x,t) \end{aligned}}$$

C^1- diff.

$$a_\alpha b_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha b_\alpha$$

En différentiant, il vient

$$dx_i = \frac{\partial f_i}{\partial X_\alpha}(X,t)\, dX_\alpha$$

qui à $\overrightarrow{dM_0} = (dX_1, dX_2, dX_3) \longrightarrow$

$$\overrightarrow{dM} = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

Soit $\mathbb{F}$ la matrice : $\mathbb{F} = (F_{i\alpha})$,

$$F_{i\alpha} = \frac{\partial f_i}{\partial X_\alpha}(X,t)$$

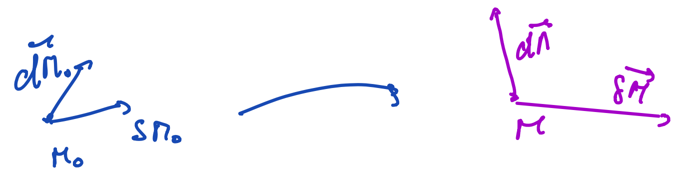
Alors: $\overrightarrow{dM} = \mathbb{F}\, \overrightarrow{dM_0}$, $\overrightarrow{\delta M} = \mathbb{F}\, \overrightarrow{\delta M_0}$

$\mathbb{F}$: gradient de la déformation en M_0 à la date t

Notion de déformation :

Def: La déformation à la date t par rapport à la configuration initiale Ω_0 et au voisinage de la particule M_0 est la variation des produits scalaires

$$\vec{dM}\cdot\vec{\delta M} - \vec{dM_0}\cdot\vec{\delta M_0}$$



Tenseur des déformations

$$\vec{dM}\cdot\vec{\delta M} = dx_i\,\delta x_i = F_{i\alpha}\,dx_\alpha\,F_{i\beta}\,\delta x_\beta$$

$$= C_{\alpha\beta}\,dx_\alpha\,\delta x_\beta$$

Novikov et al, "Géométrie contemporaine" ed Mir, Moscou.

où $\quad C = (C_{\alpha\beta})$

$\quad = F^T F \quad$ est le tenseur des dilatations

d'où

$$\vec{dM}\cdot\vec{\delta M} - \vec{dM_0}\cdot\vec{\delta M_0} = (C_{\alpha\beta} - 1)\,dx_\alpha\,dx_\beta$$

on pose :

$$\mathbb{X} = \frac{1}{2}(C-1) = (X_{\alpha,\beta})$$

est le tenseur des déformations

$$\vec{dM}\cdot\vec{\delta M} - \vec{dM_0}\cdot\vec{\delta M_0} = 2\,X_{\alpha\beta}\,dx_\alpha\,\delta x_\beta$$

Remarque : Il n'y a pas de déformation $\Leftrightarrow \mathbb{X} = 0$

Déformations principales

$C = F^T F$ est symétrique ≥ 0, donc admet des valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$

Le seul point à vérifier est $\lambda_1 > 0$. Supposons que $\lambda_1 = 0$, soit $\vec{y} = (y_\alpha) \neq \vec{0}$, un vecteur propre correspondant : $C_{\alpha\beta}\,y_\beta = \lambda_1 y_\alpha = 0 \qquad \vec{y} \neq 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 y_\alpha y_\alpha = C_{\alpha\beta}\,y_\alpha\,y_\beta = 0$$

$$= F_{i\alpha}\,y_\alpha \cdot F_{i\beta}\,y_\beta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 |\vec{y}|^2 = 0 = \sum_{i=1}^{3} (F_{i\alpha} y_\alpha)^2$$

$$\Rightarrow \quad F_{i\alpha} y_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbb{F} = 0$$

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que $x = f(X,t)$ est un C^1 difféomorphisme.

Tenseur des déformations linéarisées

vecteur déplacement : $\underline{\vec{u} = \overrightarrow{M_0M}}$

$$u_i = x_i - X_i = f_i(X,t) - X_i$$

ou encore $\quad x_i = X_i + u_i(X,t) \leftarrow$

Le tenseur gradient $\mathbb{F}$ est donné par :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

d'où le tenseur des dilatations :

$$C_{rq} = F_{ir} F_{iq} = \delta_{ir}\delta_{iq} + \delta_{ir}\frac{\partial u_i}{\partial X_q} + \delta_{iq}\frac{\partial u_i}{\partial X_r} + \frac{\partial u_i}{\partial X_r}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial X_q}$$

matrice Id.

$$= \delta_{rq} + \frac{\partial u_r}{\partial X_q} + \frac{\partial u_q}{\partial X_r} + \frac{\partial u_i}{\partial X_r}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial X_q}$$

D'où le tenseur des déformations :

$$X_{rq} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial X_q} + \frac{\partial u_q}{\partial X_r}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial X_r}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial X_q}$$

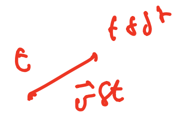
$$\boxed{\varepsilon_{rq} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial X_q} + \frac{\partial u_q}{\partial X_r}\right)} \rightarrow \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$$

Pour des petites déformations, $X_{rq} \simeq \varepsilon_{rq}$.

Tenseur des vitesses de déformation

$$\frac{d}{dt}(\vec{dr}\cdot\vec{\delta r}) = \frac{d}{dt}(\vec{dr})\cdot\vec{\delta r} + \vec{dr}\cdot\frac{d}{dt}(\vec{\delta r})$$

$$\frac{d}{dt}(dx_i) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f_i}{\partial X_\alpha}(X,t)\, dX_\alpha$$



$V_i = \frac{\partial f_i}{\partial t}(X,t)$

$$= \frac{\partial}{\partial X_\alpha} V_i(X,t)\, dX_\alpha$$

Champ de vitesse Lagrangienne

$= V_i(g(x,t),t)$

$X = g(x,t)$

$= v_i(x,t)$

vitesse Eulérienne

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} v_i(x,t)\cdot\frac{\partial x_j}{\partial X_\alpha}\, dX_\alpha$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx_j$$

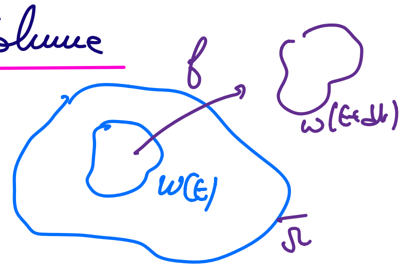
$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\vec{dr}\cdot\vec{\delta r}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j\, \delta x_i + dx_i\, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, \delta x_j$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\vec{dr}\cdot\vec{\delta r}) = D_{ij}(v)\, dx_j\, \delta x_i ,$$

$$\boxed{D_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + \nabla v^t)$$

Dérivée particulaire d'une intégrale de volume

$$K(t) = \int_{\omega(t)} k(x,t)\, dx$$



$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$

Théorème : Soit k, $\vec{v}$ de classe C^1, avec des dérivées partielles bornées dans $\Omega \times [0, t_1]$

Alors :

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(k v_i)}_{= \operatorname{div}(k\vec{v})}\right) dx$$

où encore :

$$= \int_{\omega(t)} \frac{\partial k}{\partial t}\, dx + \int_{\partial\omega(t)} k\, \vec{v}\cdot\vec{n}\, ds$$

Application : Conservation de la masse

$$m(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho(x,t)\,dx$$

La masse se conserve $\Rightarrow \dfrac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0}$$

$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

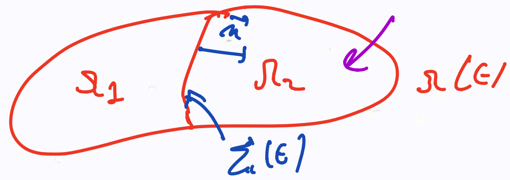
$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\rho = 0$

Autres lois physiques de conservation

extraits de Durand

3-1. *Hypothèse physique sur les actions de contact*

Soit un milieu continu $\Omega(t)$ en mouvement; par la pensée, nous le considérons comme deux sous-systèmes $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$ séparés par la surface matérielle $\Sigma(t)$. Désignons par $\vec{n}$ la normale unitaire à $\Sigma(t)$ extérieure à $\Omega_1(t)$. Nous ferons l'hypothèse suivante *(hypothèse de Cauchy)*:



> l'action de $\Omega_2(t)$ sur $\Omega_1(t)$ peut être représentée par une densité de forces $\vec{F}(M,\ t;\ \vec{n})$ sur la surface $\Sigma(t)$; cette densité ne dépend que de t, de $M \in \Sigma(t)$, et de la normale $\vec{n}$ en M à $\Sigma(t)$.

Cet énoncé signifie qu'il existe une densité de forces $\vec{F}(M,\ t;\ \vec{n})$ telle que le mouvement de $\Omega_1(t)$ n'est pas modifié lorsqu'on supprime $\Omega_2(t)$ et qu'on applique sur $\Sigma(t)$ la densité de forces $\vec{F}(M,\ t;\ \vec{n})$.

Cette hypothèse sur les actions de contact entre deux parties d'un milieu continu, ou d'un milieu continu avec son environnement (car l'espace tout entier peut être considéré comme un milieu continu) va nous permettre de traduire en équations les lois de conservation,

i) de la quantité de mouvement (loi fondamentale de la dynamique);

ii) de l'énergie (premier principe de la thermodynamique), ainsi que le deuxième principe de la thermodynamique (bien qu'il ne s'agisse pas d'une loi de conservation) que nous indiquerons néanmoins dans ce paragraphe, car il relève du même type de traitement mathématique.

equation de la chaleur.

3-2. *Conservation de la quantité de mouvement (loi fondamentale de la dynamique)*

Newton

3.2.1 Enoncé. – Il existe une chronologie (dite galiléenne) et un repère (dit galiléen), tels que, pour cette chronologie et dans ce repère, pour tout système matériel, la dérivée par rapport au temps du torseur des quantités de mouvement est égal au torseur des forces extérieures appliquées au système.

3.2.2 Equations correspondantes. – Nous choisissons le temps t de la chronologie galiléenne et comme repère physique $(O,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$ un repère galiléen et considérons le système matériel $\omega(t) \subset \Omega(t)$. Nous exprimons le torseur des quantités de mouvement de $\omega(t)$ par sa résultante

$$\int_{\omega(t)} \rho \vec{v}\ dx$$

et son moment en O

$$\int_{\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho \vec{v}\ dx.$$

Les forces extérieures agissant sur $\omega(t)$ sont des forces massiques de densité volumique $\rho \vec{f}$ dans $\omega(t)$ et des actions de contact de densité $\vec{F}(M,\ t;\ \vec{n})$ sur $\partial\omega(t)$, de sorte que le torseur des forces extérieures a une résultante et un moment résultant donnés respectivement par

$$\int_{\omega(t)} \rho \vec{f}\ dx + \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(\vec{n})\ \ dS$$

$$\int_{\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho \vec{f}\, dx + \int_{\partial\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(\vec{n})\ dS$$

en désignant par dS l'élément de surface sur $\partial\omega(t)$ et en écrivant $\vec{F}(\vec{n})$ au lieu de $\vec{F}(M,\ t;\ \vec{n})$ pour la densité de forces sur $\partial\omega(t)$ provenant des actions de contact.

L'énoncé de la loi fondamentale se traduit alors par les deux égalités vectorielles

(II.13) $$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{\omega(t)} \rho\vec{v}\, dx = \int_{\omega(t)} \rho\vec{f}\, dx + \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(\vec{n})\, dS}$$

(II.14) $$\frac{d}{dt}\int_{\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho\vec{v}\, dx = \int_{\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \rho\vec{f}\, dx + \int_{\partial\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(\vec{n})\, dS,$$

quel que soit $\omega(t) \subset \Omega(t)$.

Compte tenu de (II.12), les égalités (II.13) et (II.14) s'écrivent

(II.15) $$\underline{\int_{\omega(t)} \left(\rho\vec{\gamma} - \rho\vec{f}\right) dx = \int_{\partial\omega} \vec{F}(\vec{n})\, dS}$$

(II.16) $$\int_{\omega(t)} \overrightarrow{OM} \wedge \left(\rho\vec{\gamma} - \rho\vec{f}\right) dx = \int_{\partial\omega} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(\vec{n})\, dS.$$

Après changement de notations, ces deux équations sont de la forme,

(II.17) $$\underline{\int_{\omega(t)} \vec{b}\ dx = \int_{\partial\omega(t)} \vec{\alpha}(\vec{n})\, dS.}$$

où $\vec{b}$ et $\alpha(\vec{n})$ sont des fonctions à valeurs vectorielles sur lesquelles nous ferons ultérieurement des hypothèses plus précises.

4-1. *Loi générale de conservation*

Nous entreprenons l'étude d'une *loi générale de conservation* de la forme (II.17)

$$\int_{\omega} \vec{b}\ dx = \int_{\partial\omega} \vec{\alpha}(\vec{n})\, dS, \quad \forall\omega \in \Omega.$$

où $\vec{b} = \vec{b}(M)$ est un champ de vecteurs défini dans Ω et que nous supposerons borné, soit

(II.22) $$\underline{\left|\vec{b}\right| \leq C}$$

et $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(M,\ \vec{n})$, un champ de vecteurs dépendant de $M \in \Omega$ et $\vec{n}$ normale extérieure unitaire à $\partial\omega$. On fera sur $\vec{\alpha}(M,\ \vec{n})$ l'hypothèse suivante

(II.23) Pour $\vec{n}$ fixé, l'application $M \to \alpha(M, \vec{n})$ est continue.

Les fonctions $\vec{b}$ et $\vec{\alpha}$ dépendent également du temps t, mais cette variable ne joue aucun rôle dans ce paragraphe et nous omettrons souvent de l'écrire.

Nous allons établir le résultat important suivant:

Théorème II.4 (de Cauchy). – Sous les hypothèses (II.22) et (II.23) la loi (II.17) implique que $\vec{\alpha}(M, t; \vec{n})$ dépend linéairement de $\vec{n}$, c'est-à-dire qu'il existe un tenseur $\mathbf{T}(M, t)$ de composantes $T_{ij}(M, t)$ tel que

(II.24) $$\alpha_i(M, t; \vec{n}) = T_{ij}(M, t)\, n_j .$$

Cours de l'X de Paul Germain 1966

5-1. *Equations du mouvement et d'équilibre*

Reprenons l'équation (II.15) qui résulte de la loi de conservation de la quantité de mouvement. D'après le théorème de Cauchy, elle implique l'existence d'un champ de tenseurs $\boldsymbol{\sigma}(M) = (\sigma_{ij}(M))$, tel que

$$\vec{F}(M, \vec{n}) = \sigma_{ij} n_j \vec{e}_i .$$

Elle s'écrit alors

(II.38) $$\int_{\omega(t)} \left(\rho\vec{\gamma} - \rho\vec{f}\right) dx = \vec{e}_i \int_{\partial\omega(t)} \sigma_{ij} n_j \, dS, \quad \forall \omega(t) \subset \Omega(t) .$$

stokes

En supposant que $\sigma_{ij}(M)$ possède des dérivées partielles intégrables, on peut appliquer le théorème de la divergence au second membre de (II.38) et on obtient,

(II.39) $$\int_{\omega(t)} \left[\rho(\gamma_i - f_i) - \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}\right] dx = 0, \quad \forall \omega(t) \subset \Omega(t) .$$

Par application du lemme II.2, il en résulte

évolution.

(II.40) $$\rho\gamma_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \qquad \text{dans } \Omega(t) .$$

Les équations (II.40) sont les *équations du mouvement* du milieu continu. Si le milieu continu est en équilibre ou en mouvement de translation uniforme, le vecteur accélération est nul et (II.40) se réduit à

$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = -\rho\vec{f}$

(II.41) $$\boxed{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0} \qquad \text{dans } \Omega(t) .$$

$\underline{\underline{\sigma}} = (\sigma_{ij})$

tenseur des contraintes

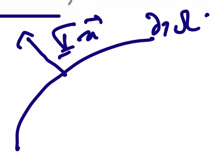
et les équations (II.41) sont les *équations d'équilibre*.

5-2. *Conditions aux limites et d'interface*

5.2.1 Conditions aux limites. – Supposons qu'on étudie un milieu continu qui occupe une région Ω de R^3 limitée par la surface $\partial\Omega$. Si sur une partie de cette surface, soit $\partial_1\Omega$, on connaît les efforts extérieurs appliqués, soit une densité de forces $\vec{F}$, alors, d'après la définition même de $\alpha(M,\ t;\ \vec{n})$ on devra avoir, si $\vec{n}$ est la normale extérieure unitaire à Ω sur $\partial_1\Omega$,

$$\vec{F} = \vec{\alpha}(M,\ t;\ \vec{n}), \quad \forall M \in \partial_1\Omega.$$

Compte tenu de l'introduction du tenseur des contraintes, cette relation s'écrira



$$\vec{F} = \boldsymbol{\sigma}\vec{n} \qquad \text{sur} \qquad \partial_1\Omega$$

ou encore

$$F_i = \sigma_{ij}(M,\ t)\, n_j \qquad \text{sur} \qquad \partial_1\Omega \quad . \tag{II.49}$$

5.2.2 Conditions d'interface. – Supposons que deux milieux continus Ω_1 et Ω_2 aient une portion de frontière commune Σ. Désignons par $\vec{n}$ la normale à Σ extérieure à Ω_1. La densité de forces exercée par Ω_2 sur Ω_1 est, par définition,

$$\alpha_i(M,\ t;\ \vec{n}).$$

La densité de forces exercée par Ω_1 sur Ω_2 est de même

$$\alpha_i(M,\ t;\ -\vec{n}).$$

Nous avons montré (lemme II.1) que

$$\alpha_i(M,\ t;\ -\vec{n}) = -\alpha_i(M,\ t;\ \vec{n}).$$

En conséquence si $\left\{\sigma_{ij}^{(1)}(M,\ t)\right\}$ (resp. $\left\{\sigma_{ij}^{(2)}(M,\ t)\right\}$) est le champ de tenseurs des contraintes dans Ω_1 (resp. Ω_2), alors en tout point M de Σ on a

$$\sigma_{ij}^{(1)}(M,\ t)\, n_j = \sigma_{ij}^{(2)}(M,\ t)\, n_j \quad . \tag{II.50}$$

Cette condition d'interface montre que si Ω_2 exerce sur Ω_1 une densité de forces (F_i), alors Ω_1 exerce sur Ω_2 une densité de forces $(-F_i)$: c'est le principe de l'action et de la réaction.

$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\varepsilon)$ comportement linéaire + él

Loi de Hooke pour des matériaux élastique isotropes (petites déformations)

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

$$\boxed{\sigma_{ij} = \lambda\, \varepsilon_{ll}\, \delta_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}}$$

λ et μ sont le coefficients de Lamé

(II.41) devient alors :

$\mathrm{div}\, \underline{\sigma} + \rho \vec{f} = 0$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\delta_{ij} \quad + \quad \underbrace{2\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{ij}} \quad + \rho f_i = 0$$

$$\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\vec{u} \qquad \delta = 0 \text{ sauf pour } i=j$$

$$= \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= \mu\Delta u_i + \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\vec{u}$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

i.e : $(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div}\vec{u}) + \mu\Delta u_i + \rho f_i = 0$

autrement dit :

$$\boxed{(\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\vec{u} + \mu\Delta\vec{u} + \rho\vec{f} = 0}$$

en particulier, pour des déformations à volume constant, $\operatorname{div}\vec{u} = 0$, et donc :

$$\boxed{-\Delta u = \underbrace{\rho/\mu\, f}_{F}}$$

pour u une quelconque composante du déplacement.

Problème basique : Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, on cherche une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$, solution de

$$-\Delta u = F \text{ dans } \Omega$$

et : $u = g$ sur $\Gamma = \partial\Omega$ (conditions de Dirichlet)

ou $\frac{\partial u}{\partial n} = h$ sur $\Gamma = \partial\Omega$ (conditions de Neumann)

$$-\Delta u + c(x)\, u = f$$