Partie I : Équations de transport

1. Modélisation
2. Analyse
3. Schémas numériques

1. Modélisation

Équation de transport (advection) - diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla u - k\Delta u = f \longleftarrow \text{terme source}$$

$u = u(t, x)$ — t : temps, x : espace $\in \mathbb{R}^n$

$\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ (n = 1 ou 3 dans la pratique)

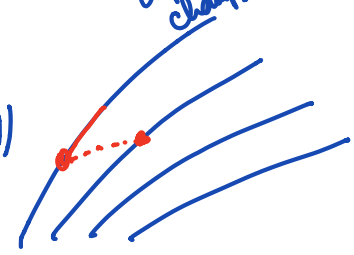
k : coefficient de diffusion > 0

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial u/\partial x_n \end{pmatrix}, \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \vec{v} = \vec{v}(t, x)$$

ajouter une condition initiale $u_0 = u(0, x)$ et des conditions aux limites.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla u - k\Delta u = f$$

transport — diffusion



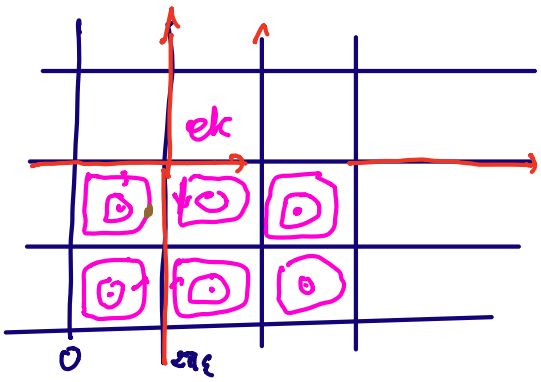
$x'(t) = \vec{v}(t, x(t))$
$x(0) = x_0$

exemple : $\psi = \sin(x/\varepsilon)\sin(y/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$

$= \psi(x, y)$

$\vec{v} = (v_1, v_2)$, $v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

$\longrightarrow$ le transport peut conduire à une diffusion.



Qui du transport ou de la diffusion l'emporte ?

U = taille caractéristique de u

V = vitesse caractéristique $\qquad [K] : m^2 s^{-1}$

L = longueur caractéristique

$$[\vec{V}\nabla u] \simeq V\frac{U}{L} \qquad [K\Delta u] \simeq K\frac{U}{L^2}$$

dans l'éq : $U\left[\frac{V}{L} + \frac{K}{L^2}\right] \rightarrow \tilde{\mathcal{E}} = \frac{VL}{K}$ nombre sans dimension

$\frac{V}{L} \ll K/L^2 \qquad \underbrace{\frac{VL}{K}}_{\tilde{\mathcal{E}}} \ll 1$ la diffusion l'emporte

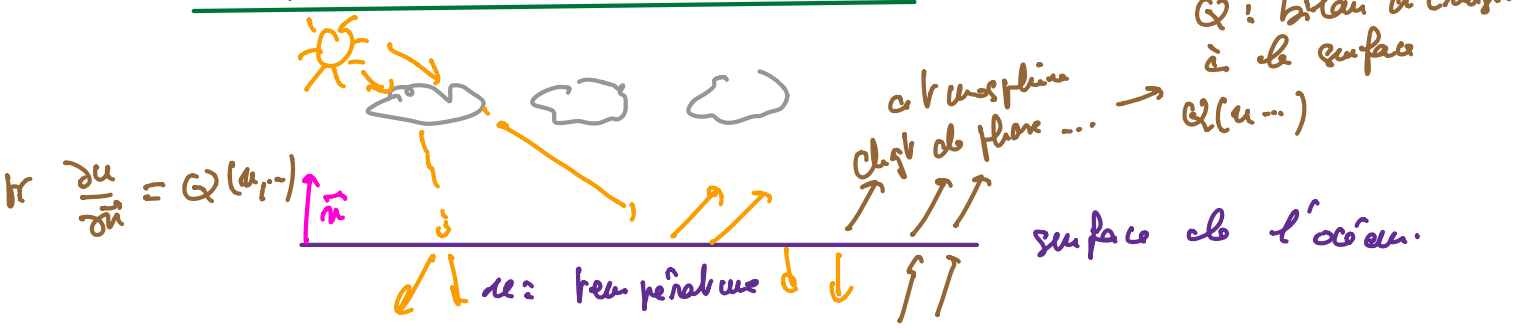
$\frac{\partial u}{\partial t} - K\Delta u = f$ eq. de la chaleur.

$\frac{V}{L} \gg \frac{K}{L^2}, \quad \tilde{\mathcal{E}} \gg 1$ le transport l'emporte

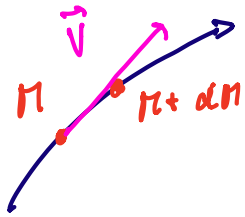
$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V}\nabla u = f$ eq. de transport

$\tilde{\mathcal{E}} \simeq 1$ transport et diffusion sont comparables.

exemple de conditions aux limites.



Remarque : transport par d'un traceur passif qui se trouve au point M à la date t et se trouve à la date $t+dt$ au point $M+dM$



$dM \approx \vec{V}(t,x)\,dt$

u (la masse du traceur par exemple) est restée constante pendant ce déplacement :

$$u(t+dt,\ x+dx) = u(t,x)$$

$$u(t+dt,\ x+\vec{V}.dt) = u(t,x) \qquad \text{on suppose } u \in C^2$$

$$\shortparallel$$

$$u(t,x) + dt\left[\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \vec{V}.\nabla u(t,x)\right] + o(dt^2)$$

Quand $dt \to 0$: $\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \vec{V}.\nabla u(t,x)}_{\frac{Du}{Dt}(t,x)} = 0$ la dérivée totale de u.

2- Analyse

a) Régularité L^p

$$(1)\quad \begin{cases} \partial_t u + \vec{V}.\nabla_x u = f \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

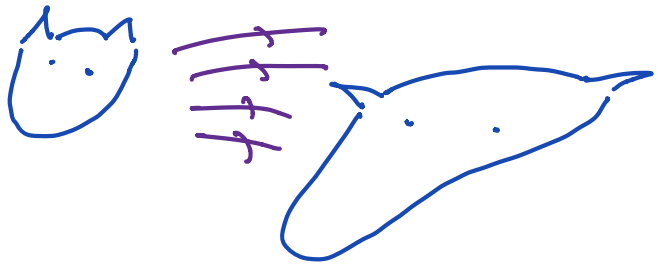
Proposition : On suppose : $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 2$, V support compact, $f \in L^p(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^n))$, $\operatorname{div}\vec{V} \in L^1(\mathbb{R}_+, L^\infty(\mathbb{R}^n))$

$\approx L^p(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$

$t \to \|f(t,\cdot)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \in L^1(\mathbb{R}_+)$: $\int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(t,x)|^p dx\right] dt < +\infty$

$t \to \|\operatorname{div}\vec{V}(t,\cdot)\|_\infty \in L^1(\mathbb{R}_+)$ $\int_0^\infty \operatorname{ess\,sup}_x |\operatorname{div}\vec{V}(t,x)|\,dt < +\infty$

où $\operatorname{div} \vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ (mesure la capacité de $\vec{V}$ à changer les volumes



Alors toute solution de (1) satisfait à chaque date t :

$$\| u(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} e^{\int_0^t (\|\operatorname{div}\vec{V}(s,\cdot)\|_\infty + (p-1)\|f\|_{L^p})\, ds}$$

<u>Demo:</u> On multiplie formellement l'équation par $u|u|^{p-2}$, et on intègre sur $\mathbb{R}$.

- $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot u \cdot |u|^{p-2} = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p(t,x)\, dx.$

- $\int_{\mathbb{R}^n} \vec{V} \cdot \nabla_x u \cdot u \cdot |u|^{p-2} = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \vec{V} \cdot \nabla |u(t,x)|^p\, dx$

(sous réserve que $\vec{V}$ et u soient assez réguliers pour appliquer la formule de Stokes)

$$= -\frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^p \operatorname{div}\vec{V}(t,x)\, dx$$

Hölder : $(p-1)p' = p$

- $\left| \int f \cdot \underbrace{u \cdot |u|^{p-2}}_{|u|^{p-1}} \right| \leq \left(\int |f(t,x)|^p dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int |u(t,x)|^p dx\right)^{1/p'}$

<u>Bilan:</u> $\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^p dx - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}\vec{V} \cdot |u|^p$

$$\leq \|f\|_{L^p} \left(\int |u|^p dx\right)^{1/p'}$$

soit encore : $\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^p dx$

$$\leq \|\operatorname{div}\vec{V}(t,\cdot)\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^p dx$$

$$+ \underline{p}\ \underbrace{\|f\|_{L^p}\left[\int |u(t,x)|^p dx\right]^{1/p'}}$$

$$\leq \|f(t,\cdot)\|_{L^p}^p + \underbrace{\frac{p}{p'}}_{=p-1} \int |u|^p(t,x)\,dx.$$

Young : $|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}$

$p' = \frac{p}{p-1}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int |u(t,\cdot)|^p dx \leq \int |u(t,\cdot)|^p dx\left[\|\operatorname{div}\vec{V}\|_\infty + (p-1)\right] + \|f(t,\cdot)\|_{L^p}^p$$

$\rightarrow \forall t$: (via Grönwall)

$$\int |u(t,\cdot)|^p dx \leq \|u_0\|_{L^p}^p\, e^{\int_0^t \|\operatorname{div}\vec{V}\|_\infty + (p-1)t} + t\int_0^t \|f(t,\cdot)\|_{L^p}^p$$

remarque : $\underline{f=0}$:

$$\int |u(t,x)|^p dx \leq \|u_0\|_{L^p}^p\, e^{\int_0^t \|\operatorname{div}\vec{V}\|_\infty ds}$$

et quand $\|\operatorname{div}\vec{V}\|_\infty \in L^1(\mathbb{R}_+)$, l'estimation est uniforme en temps, et pour $\underline{p} \to +\infty$, et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, on obtient : $\forall t > 0$

$$\|u(t,\cdot)\|_\infty \leq \|u_0\|_{L^\infty}$$