$$(\mathrm{Tr}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

Remarque : Si $\operatorname{div}\vec{V} = 0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$, $\vec{V} = (v_1, \dots, v_n)$,

Alors l'équation (Tr) est conservative : $\|u(t,\cdot)\|_{L^r} = \|u_0\|_{L^r}$.

On multiplie formellement l'équation par $u|u|^{r-2}$ $(r>1)$, et on intègre sur $\mathbb{R}^n$. (en supposant l'intégrabilité des champs que l'on considère, et de leurs dérivées)

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r\,dx + \underbrace{\frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^n} \vec{V}\cdot\nabla|u|^r}_{-\frac{1}{r}\int |u|^r \cdot \operatorname{div}\vec{V}} = 0$$

formule de Stokes

$$-\frac{1}{r}\int |u|^r \cdot \operatorname{div}\vec{V} = 0$$

D'où $$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r\,dx = 0 \Rightarrow \|u(t,\cdot)\|_r^r = \mathrm{cte} = \|u_0\|_r^r.$$

Proposition : Soit u une solution de (Tr), de classe C^1, alors u est constante suivant les trajectoires,

$$(\mathrm{Diff}) \quad \begin{cases} x'(t) = \vec{V}(t, x(t)) \\ x(0) = X \end{cases} \qquad x(t,X) \text{ la solution}$$

Dem : $f(t) = u(t, x(t))$. On dérive par rapport à t :

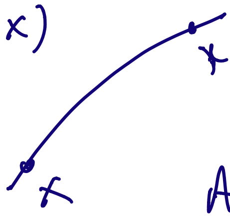
$$f'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + \underbrace{x'(t)}_{\vec{V}(t,x(t))} \nabla_x u(t, x(t)) = 0$$

donc $f(t) = \mathrm{cte} = f(0) = u(0, x(0))$ □

Théorème : On suppose que $\vec{V} \in C^1_{t,x} \cap L^1_t(W^{1,\infty}_x)$, que les solutions maximales de (Diff) soit globales (i.e définies sur $[0,+\infty[$) alors l'éq. (Tr) admet une unique solution $C^1_{t,x}$, pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$.

Demo : . l'unicité : Grönwall combiné à $\operatorname{div}\vec{V} \in L^1_t(L^\infty_x)$

. l'existence. Soit $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et X tel que $x = x(t,X)$ (existe et est unique)



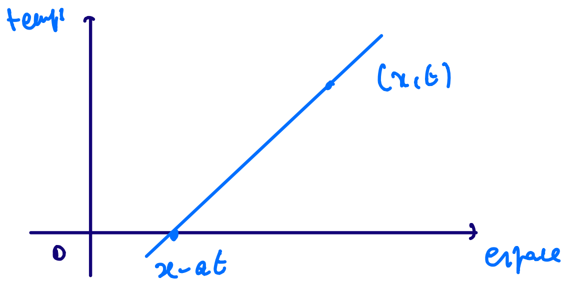
ligne de champ (ou encore caractéristique)

Alors $u(t,x) = u_0(X)$ est solution. □

Cas particulier : $n = 1$, $\vec{V} = a =$ constante, $a > 0$ sans perte de généralité :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

Les caractéristiques sont solutions de : $x' = a$, ce sont des droites



$$\boxed{u(x,t) = u_0(x - at)}$$

Remarque : Si u_0 est irrégulière, l'irrégularité est transportée dans le flot.

Schémas numériques

Théorème (Lax) Si un schéma est consistant et stable, alors il est convergent

définis au fil de l'eau.

Δt : pas de la discrétisation en temps

Δx : " " " en espace

$x_j = j\Delta x, \quad j \in \mathbb{Z} \quad , \quad t^n = n\Delta t \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$: inverse d'une vitesse.

<u>But</u> : chercher des approximations de $u(x_j, t^n)$, la valeur de la solution aux point (x_j, t^n), autrement dit une solution discrète, notée u_j^n.

<u>Différence finie</u> : $f(x_{j+1}) = f(x_j) + (\overbrace{x_{j+1} - x_j}^{\Delta x}) f'(x_j) + O(|\underbrace{x_{j+1} - x_j}_{\Delta x}|^2)$

$$f'(x_j) \simeq \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{\Delta x}$$

1 : ordre de la méthode

avec une erreur de $|\Delta x|$, erreur de troncature

$f' = d \longrightarrow \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x} = d_j \qquad (d_j = d(x_j))$

$f_{j+1} = f_j + d_j \Delta x.$ explicite.

↳ retour au transport : On pose aussi $x_{j+1/2} = x_j + \frac{\Delta x}{2}$

<u>Def</u> : Tout schéma aux différences aux différences finies explicite peut s'écrire sous la forme

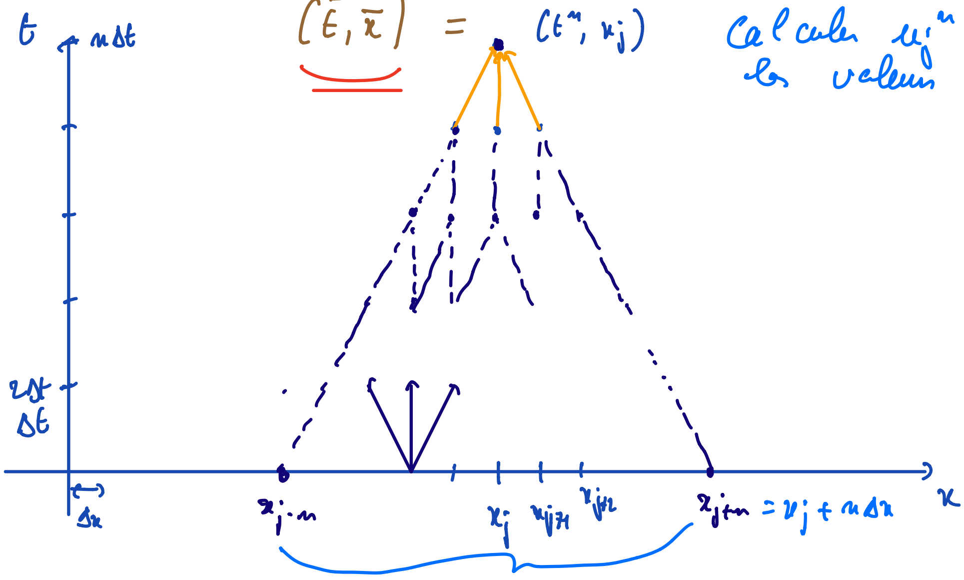
$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(h_{j+1/2}^n - h_{j-1/2}^n \right)$$

où $h_{j+1/2} = h(u_j^n, u_{j+1}^n)$, pour tout j. La fonction h s'appelle le flux numérique.

<u>Condition CFL</u> : Courant-Friedrichs-Lewy

Pour qu'un schéma explicite soit <u>stable</u> il est nécessaire que les pas de discrétisation satisfasse

$$\boxed{|a\lambda| = \left| a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1}$$



Calculer u_j^n nécessite de connaître les valeurs de u_0 sur $D_{\Delta t}(x_j, t^n)$

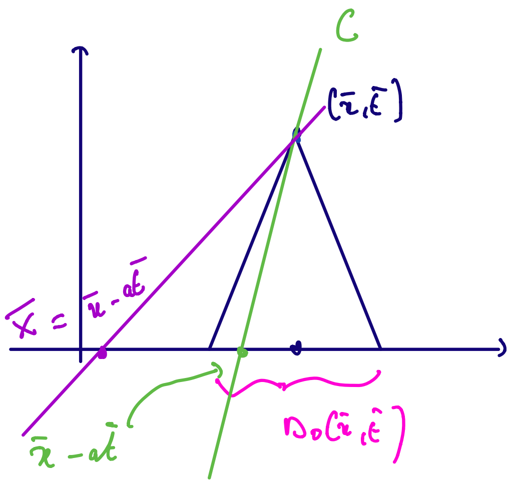
$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

$t^n = n \Delta t$

domaine de dépendance numérique ⟵ $D_{\Delta t}(x_j, t^n) = \{ x \in \mathbb{R} \, ; \, |x - x_j| \le n \Delta x = \frac{t^n}{\lambda} \}$

but : faire tendre $\Delta t, \Delta x \to 0$, et à λ constant.

$$D_{\Delta t} \to D_0(\bar{x}, \bar{t}) = \{ x \in \mathbb{R}, \, |x - \bar{x}| \le \frac{\bar{t}}{\lambda} \}.$$



Caractéristique t.q. $\bar{x} - a\bar{t} \in D_0(\bar{x}, \bar{t})$

$\Longleftrightarrow \quad a\lambda \le 1$

Caractéristique t.q. $\bar{x} - a\bar{t} \notin D_0(\bar{x}, \bar{t})$

$\Longleftrightarrow \quad a\lambda > 1$, il suffit de changer u_0 en $\bar{x}$, et sans le changer sur $D_0(\bar{x}, \bar{t})$

Dans ce cas le calcul numérique reste inchangé, mais la solution analytique est différente : le schéma est incapable de calculer la solution, et donc de converger.

Stabilité : norme discrète. Soit $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}} = v$ une suite quelconque. On pose pour $p \ge 1$

$$\|v\|_{\Delta, p} = \left(\Delta x \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |v_j|^p \right)^{1/p},$$

$$\|v\|_{\Delta, \infty} = \sup_j |v_j|$$

Def : On dit qu'une méthode numérique pour un problème de transport (hyperbolique) est <u>stable</u> pour tout temps T, si il existe deux constantes C_T et $\delta_0 > 0$ telles que :

$$\| u^n \|_\Delta \leq C_T \| u^0 \|_\Delta \quad \text{où}$$

$u^n = (u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$, pour tout n tel que $n\Delta T \leq T$ et pour tout Δt et Δx tels que $0 < \Delta T \leq \delta_0$, $0 < \Delta x \leq \delta_0$, où $\| \cdot \|_\Delta$ est une des normes définies plus haut.