

ref: Quarteroni -

Sacco-Saleri

Méthodes numériques

Equations de transport - partie 3

Schémas numériques

algorithmes

analyse et

applications,

Springer,

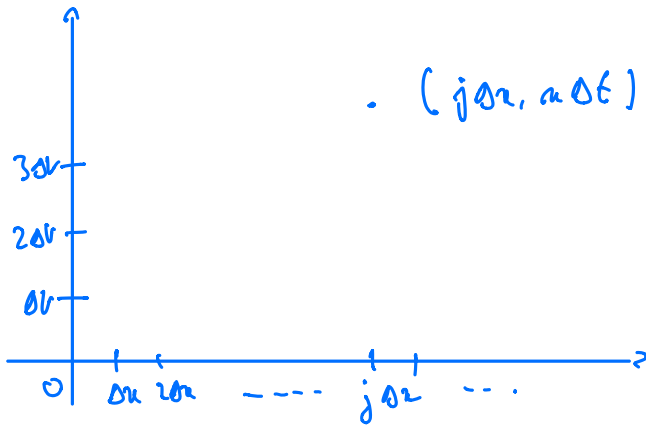
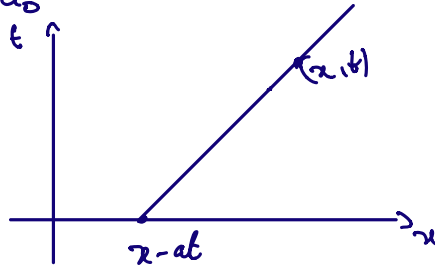
2006

$$u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

$$u(x, t) = u_0(x - at)$$

$$a \in \mathbb{R}_+^*$$



but: trouver une approximation u_j^n de la solution au point $(j \Delta x, n \Delta t)$

$$\Delta = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{inverse d'une vitesse}$$

schéma numérique aux différences finies:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta (L_{j+1/2}^n - L_{j-1/2}^n)$$

$$L_{j+1/2}^n = L(u_j^n, u_{j+1}^n)$$

Condition nécessaire de stabilité:

$$\Delta a \leq 1$$

$$|\Delta a| \leq 1$$

Condition CFL

Quelques exemples de schémas explicites.

1. Euler explicite / centré

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta}{2} a (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n),$$

qui peut être mis sous la forme: $L_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} a (u_{j+1}^n + u_j^n)$

2. Lax-Friedrichs

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2} a (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

$$h_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [a (u_{j+1}^n + u_j^n) - \Delta^{-1} (u_{j+1}^n - u_j^n)]$$

3. Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2} a (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \underbrace{\frac{1}{2} a^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)}_{\text{terme de diffusion}}$$

$$\mathcal{L}u + au - \varepsilon \Delta u = 0$$

$$h_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [a (u_{j+1}^n + u_j^n) - \Delta a^2 (u_{j+1}^n - u_j^n)]$$

4. Euler explicite décentré

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2} a (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} |a| (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$h_{j+1/2} = \frac{1}{2} [a (u_{j+1}^n + u_j^n) - |a| (u_{j+1}^n - u_j^n)]$$

Consistance : Erreur de troncature

$$\mathcal{L}u + a \partial_x u = 0$$

$$\mathcal{L}u(t, x) = \frac{u(t+\Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\begin{aligned} t^n &= n \Delta t & \partial_x u(t, x) &= \frac{u(t, x+\Delta x) - u(t, x-\Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \\ x_j &= j \Delta x \end{aligned}$$

en (t^{n+1}, x_j^i) :

$$\frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} + a \frac{u(t^n, x_{j+1}) - u(t^n, x_{j-1})}{2\Delta x}$$

partie du schéma.

erreur de troncature
à quel point le schéma approche l'équation de départ.

$$+ O(\Delta t, \Delta x^2) = 0, \text{ pour } u \text{ solution.}$$

le schéma résoud: $E_{\Delta t, \Delta x}$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Def: Le schéma est dit consistant quand l'erreur de troncature $\text{Err}(\Delta t, \Delta x)$ tend vers 0 lorsque $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$

Dans le cas Euler centré, $\text{Err} = O(\Delta x^2, \Delta t^1) \rightarrow 0$
 $\Delta x \rightarrow 0$
 $\Delta t \rightarrow 0$

Def: Quand $\text{Err} = O(\Delta x^p, \Delta t^q)$, on dit que le schéma est d'ordre (p, q)

Analyse de stabilité de von Neumann

On suppose la donnée initiale $u_0(x)$ 2 π -périodique, continue et C^1 par morceaux, et donc peut être développée en série de Fourier

$$u_0(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik \cdot x}$$

où $a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(x) e^{-ikx} dx$

Donc en particulier:

$$u_j^0 = u_0(x_j) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikj\Delta x}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

On peut calculer les u_j^1 :

$$\begin{aligned} u_j^1 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikj\Delta x} \left(1 - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikj\Delta x} \underbrace{\left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x) \right)} \end{aligned}$$

On pose: $\gamma_k = 1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x)$

par récurrence on trouve:

$$u_j^n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ikj\Delta x} \gamma_k^n, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$\gamma_k \in \mathbb{C}$ est appelé facteur de coefficient d'amplification de la $k^{\text{ième}}$ fréquence ($k^{\text{ième}}$ mode, harmonique).

Dans le cas présent :

$$\Delta = \Delta t / \Delta x \quad |\gamma_k| = \left[1 + (a \Delta \sin(kh))^2 \right]^{1/2}$$

On en déduit $|\gamma_k| > 1$, si $a \neq 0$, $k \neq \frac{m\pi}{\Delta x}$.

Par conséquent, $|u_j^n|$ ne cesse de croître quand $n \rightarrow +\infty$ et la solution numérique explose tandis que la solution exacte vérifie :

$$|u(x,t)| = |u_0(x-at)| \leq \|u_0\|_{\infty}$$

Ce qui fait que la solution numérique ne peut pas approcher la vraie solution. Le schéma est inconditionnellement instable.

Si on refait cette analyse pour tout les autres schémas, on trouvera, on trouvera un facteur d'amplification $\gamma_k(\Delta t, \Delta x)$. Par exemple pour le schéma Euler décentré, on trouve :

$$\gamma_k = 1 - a \Delta (1 - e^{-ik\Delta x})$$

et on a : $\forall k, |\gamma_k| \leq 1$ si $\Delta a \leq 1$,

si la condition CFL est satisfaite.

Théorème : Si Δt et Δx sont tels que $\forall k, |\gamma_k| \leq 1$

alors le schéma numérique est stable pour la

norme $\|\cdot\|_{\Delta, 2}$

Dem: Com simplifier, on suppose que u_0 est un

polynôme trigonométrique:

$$u_0(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} a_k e^{ikx}, \quad \Delta x = \frac{2\pi}{N}$$

$$u_j^0 = u_0(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} a_k e^{ikj\Delta x}, \quad u_j^n = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} a_k r_k^n e^{ikj\Delta x}$$

On a alors: $u^n = (u_j^n)_{-N/2 \leq j \leq N/2-1}$

$$\|u^n\|_{\Delta, 2}^2 = \Delta x \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{\substack{m=-N/2 \\ k}}^{N/2-1} a_k \bar{a}_m (r_k \bar{r}_m)^n e^{i(k-m)j\Delta x}$$

$$\Delta x \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(k-m)j\Delta x} = 2\pi \delta_{k,m} \quad (\text{standard})$$

admis

$$\Rightarrow \|u^n\|_{\Delta, 2}^2 = 2\pi \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} |a_k|^2 |r_k|^{2n}, \quad -N/2 \leq k, m \leq N/2-1$$

Par conséquent, comme $|r_k| \leq 1$, on a

$$\|u^n\|_{\Delta, 2}^2 \leq 2\pi \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} |a_k|^2 = \|u^0\|_{\Delta, 2}^2, \quad \forall n \geq 0$$

□