

# Equation de la chaleur

## I) Quelques éléments de modélisation

extrait de Duvaut,  
Mécanique des milieux  
continus.

### 2-4. Conséquence importante de la conservation de la masse pour les formules de dérivation particulaire

Reprenons la formule de dérivation d'une intégrale de volume dans les cas où la quantité à intégrer  $k(x, t)$  est de la forme  $\rho B(x, t)$  toutes les quantités intervenant dans les formules étant définies et bornées. On a

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho B(x, t) dx = \int_{\omega(t)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho B) + \operatorname{div} (\rho B \vec{v}) \right] dx$$

en appliquant la formule (I.60). Développons le crochet figurant au second membre:

$$[\ ] = B \left( \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v})}_{=0} \right) + \rho \frac{\partial B}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial B}{\partial x_i} = \rho \frac{dB}{dt}$$

en tenant compte de l'équation de continuité (II.6). On a donc finalement établi que

$$\hookrightarrow \rho + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

eq. de conservation

(II.12)

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho B dx = \int_{\omega(t)} \rho \frac{dB}{dt} dx$$

de la masse  
totale de  
matière dans  $\omega(t)$ :  
 $m(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho(x) dx$

formule qui nous sera utile dans la suite.

REMARQUE II.3. - De manière heuristique on peut dire que  $\rho dx$  est la masse  $dm$  de l'élément de volume  $dx$ . Comme cette masse ne varie pas quand on suit l'élément de volume  $dx$  dans son mouvement, elle se comporte comme une constante dans la dérivation particulaire, d'où la formule (II.12).

$$\frac{dB}{dt} : \text{dérivée particulaire} = \frac{\partial B}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla B$$

### 3-3. Conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique)

3.3.1 Enoncé. – Pour tout système matériel, il existe une fonction énergie interne spécifique (c'est-à-dire par unité de masse), telle que la dérivée par rapport au temps de l'énergie totale (énergie interne + énergie cinétique) soit égale à la puissance des forces extérieures appliquées au système plus les apports de chaleur par unité de temps.

3.3.2 Equation correspondante. – Soit  $\omega(t) \subset \Omega(t)$  le système matériel considéré. Désignons par  $e$  l'énergie interne spécifique (c'est-à-dire par unité de masse du système), par  $\rho w$  les apports volumiques de chaleur par unité de temps et par  $\vec{q}$  le vecteur flux de chaleur. On a alors

*premier principe de la thermodynamique*

(II.18) 
$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \left( \frac{V^2}{2} + e \right) dx = \int_{\omega(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dx + \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(\vec{n}) \cdot \vec{v} dS + \int_{\omega(t)} \rho w dx - \int_{\partial\omega(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} dS.$$

*Annotations:*  
 -  $\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \left( \frac{V^2}{2} + e \right) dx$ : Énergie cinétique + Énergie interne  
 -  $\int_{\omega(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dx$ : Travail force interne.  
 -  $\int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(\vec{n}) \cdot \vec{v} dS$ : Travail des forces superficielles.  
 -  $\int_{\omega(t)} \rho w dx - \int_{\partial\omega(t)} \vec{q} \cdot \vec{n} dS$ : partie thermodynamique

Compte tenu de (II.12), l'équation (II.18) s'écrit

(II.19) 
$$\int_{\omega(t)} \left[ \rho \left( \vec{v} \cdot \vec{\gamma} + \frac{de}{dt} \right) - \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - \rho w - \text{div } \vec{q} \right] dx = \int_{\partial\omega(t)} \vec{\alpha}(\vec{n}) \cdot \vec{v} dS,$$

et on voit qu'elle est de la forme (II.17).

*c'est une équation de conservation de la forme:*

i.e: 
$$\int_{\omega(t)} \vec{b} dx = \int_{\partial\omega(t)} \vec{a}(\vec{n}) dS,$$

$$\rightarrow d_i(\pi_i t_i \vec{n}) = d_{ij}(M, t | u_j)$$
  
 (d'après le thm. de Cauchy)

*cf cours précédent.*

$d$   
 $\vec{v} \cdot \vec{\gamma}$   
 $\frac{de}{dt}$   
 $\rho \vec{f} \cdot \vec{v}$   
 $\rho w$   
 $\text{div } \vec{q}$

### 6-1. Equation de l'énergie

L'énoncé du premier principe de la thermodynamique a été donné au paragraphe 3.1 et nous avons obtenu au paragraphe 3.2 l'équation (II.19) qui fait apparaître la forme conservative de la loi. Compte tenu de l'introduction du tenseur des contraintes, le terme de puissance des efforts surfaciques se transforme en intégrale de volume par la formule de la divergence

formule de Stokes, en faisant l'hypothèse de champs de classe C<sup>1</sup>

$$\int_{\partial\omega(t)} \vec{\sigma}(\vec{n}) \cdot \vec{v} dS = \int_{\partial\omega(t)} \sigma_{ij} n_j v_i dS = \int_{\omega(t)} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} v_i) dx$$

div  $\sigma \vec{v}$

Après regroupement convenable des termes on obtient,

$$\int_{\omega(t)} \left\{ v_i \left( \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} - \rho \gamma_i \right) - \rho \frac{de}{dt} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho w - \text{div } \vec{q} \right\} dx = 0.$$

Tenant alors compte des équations du mouvement (II.40) et de la symétrie du tenseur des contraintes, il vient

= 0 car c'est l'éq du mouvement.

(II.53)

$$\int_{\omega(t)} \left\{ -\rho \frac{de}{dt} + \sigma_{ij} D_{ij}(v) + \rho w - \text{div } \vec{q} \right\} dx = 0,$$

où  $\{D_{ij}(v)\}$  désigne le tenseur des vitesses de déformation, partie symétrique du tenseur gradient de la vitesse.

(II.40)

$$\rho \gamma_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad \text{dans } \Omega(t)$$

L'égalité (II.53) étant valable quel que soit  $\omega(t) \subset \Omega(t)$ , il en résulte que

$$(II.54) \quad \rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ij} D_{ij}(v) + \rho w - \operatorname{div} \vec{q} \quad \text{dans } \Omega(t) \quad \checkmark \quad \text{équation de la chaleur.}$$

Inversement, compte tenu des équations du mouvement, (II.54) redonne (II.19).  
On a alors

**Théorème II.6.** – L'équation (II.67) appelée équation de l'énergie est équivalente au premier principe de la thermodynamique.

### 6.2. Application. Equation de la chaleur

Considérons un milieu continu au repos, c'est-à-dire où  $v = 0$ . Il en résulte que

$$\rho(x, t) = \rho_0(x), \quad D_{ij}(v) = 0$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial x_i} v_i = \frac{\partial e}{\partial t}$$

de sorte que (II.54) se réduit alors à

$$(II.55) \quad \rho_0 \frac{\partial e}{\partial t} = \rho_0 w - \operatorname{div} \vec{q} \quad \checkmark$$

Postulons alors les deux lois physiques – bien vérifiées dans un grand nombre de situations – suivantes:

i) l'énergie interne est proportionnelle à la température absolue  $T$ , soit

$$(II.56) \quad e = CT;$$

ii) le vecteur flux de chaleur  $\vec{q}$  est proportionnel au vecteur gradient de la température et dirigé en sens opposé (loi de Fourier), soit

$$(II.57) \quad q_i = -K \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Le scalaire positif  $K$  est le coefficient de diffusion de la chaleur. Si le milieu est anisotrope, il doit être remplacé par une *matrice de diffusivité* symétrique et définie positive. Si le milieu est homogène, cette diffusivité est constante par rapport à  $x$ .

En reportant (II.56) et (II.57) dans (II.55) on obtient,

$$(II.58) \quad \rho_0 C \frac{\partial T}{\partial t} = \rho_0 w + K \Delta T$$

où

$$\Delta T = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \quad (= \operatorname{div} \operatorname{grad} T)$$

est le laplacien de la fonction scalaire  $T$ .

$$D = \frac{1}{2} (\nabla + \nabla^t)$$

$$\rho_0 C \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 w - K \Delta T = \rho_0 \frac{D \vec{v}}{dt} + \dots$$

+ transport diffusion  $\sum$  sources internes.

advection diffusion.

L'équation (II.71) peut, après division par  $\rho_0 C$  et changement d'échelle de longueur s'écrire

$$(II.59) \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = g, \quad \left( g = \frac{w}{C} \right).$$

C'est la très classique *équation de la chaleur*.

↓  
adimensionaliser :  
changer des variables  
physiques par des  
variables mathématiques

REMARQUE II.6. - Il est intéressant d'examiner comment nous sommes parvenus à l'équation de la chaleur (II.59). Elle résulte:

- i) d'une loi de conservation (II.55) qui traduit un principe fondamental valable pour tout milieu: gaz, liquide ou solide;
- ii) de deux lois approchées (II.56) et (II.57), résultant d'observations expérimentales, valables dans une certaine fourchette de températures ou de gradients de température, et contenant des coefficients qui peuvent prendre des valeurs très différentes suivant les milieux continus concernés. Ce type de loi est appelée *loi de comportement*.

Toutes les équations de la mécanique des milieux continus et de la physique mathématique sont bâties suivant ce schéma: loi de conservation (valable pour tout milieu continu) et lois de comportement spécifiques du milieu considéré et ayant toujours un caractère approché.

$$T \rightarrow \tilde{T}(x/l)$$