Equation de la chaleur :

partie 2 : Quelques résultats mathématiques.

① Problème : Ω : un ouvert borné, de classe C^1, dans $\mathbb{R}^N$ (dans la pratique $N = 2, 3$). On cherche $u : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(t, x) \longrightarrow u(t, x),$$

vérifiant :

eq → (1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$, où $f = f(t, x)$ est un terme source, et qui satisfait :

$$(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma, \quad (\Gamma = \partial\Omega)$$

cond. limite → (2) $u(t, x) = 0$,

et pour presque tout $x \in \Omega$, $u(0, x) = u_0(x)$

cond. initiale. → (3) où u_0 est la donnée initiale.

Quel sens donner au système (1, 2, 3), et pour quels u_0 et f ?

② Notion de Solutions turbulentes (à la mémoire de Jean Leray, 33)

Supposons u solution de (1), (2), (3), "régulière" ($C^1_{t,x}$),

fonction test → $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $C^1_{t,x}$, telle que : $\forall x \in \Gamma$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(t, x) = 0$.

On multiplie (1) par φ, et on intègre sur Ω ; pour t fixé, $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} u \cdot \varphi \, dx - \int_\Omega \Delta u \cdot \varphi \cdot dx = \int_\Omega f \varphi \cdot dx$,

en supposant pour l'instant f régulière. En utilisant la formule de Stokes, pour $t \in \mathbb{R}_+$, fixé :

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot \varphi = \underbrace{-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \varphi \, dS}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ car } \varphi(t,\cdot)=0 \text{ sur } \Gamma.} + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \cdot dx$$

$$= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi .$$

On obtient : $\forall\, t \geq 0$,

$$(4) \qquad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \varphi \cdot dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx$$

Soit $T > 0$: on intègre (4) en temps sur $[0,T]$, en observant :

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \varphi \, dx \, dt \overset{\text{Fubini}}{=} \int_\Omega \Big(\underbrace{\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\varphi(t,x)\,dt}_{\text{IPP en temps. à } x \text{ fixé}} \Big) dx$$

$$\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\varphi(t,x)\,dt = -u_0(x)\,\varphi(0,x) + u(T,x)\varphi(T,x) - \int_0^T u(t,x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)\,dt$$

d'où :

$$\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\varphi(t,x)\,dt\,dx = -\int_\Omega u_0(x)\,\varphi(0,x)\,dx + \int_\Omega u(T,x)\varphi(T,x)\,dx - \int_\Omega \int_0^T u(t,x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)\,dt\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} &-\int_\Omega u_0(x)\,\varphi(0,x)\,dx + \int_\Omega u(T,x)\,\varphi(T,x)\,dx \\ &\qquad -\int_\Omega\int_0^T u(t,x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)\,dt\,dx \\ &\qquad + \int_0^T\int_\Omega \nabla u(t,x)\cdot\nabla\varphi(t,x)\,dt\,dx = \int_0^T\int_\Omega f\cdot\varphi \end{aligned}\right\} \quad (\tilde{1})$$

permet de tracer la donnée initiale

?

Formes que l'on saura traiter

suggère H_0^1 en espace

On tire de cette analyse que l'on va chercher u dans l'espace

$$\underline{L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))} = \{ u(t,x) ;\ \text{pour pr. } t,\ u(t,x) \in H_0^1(\Omega),\ \text{et},\ \|\nabla u\|_{0,2} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+) \}$$

On choisit pour espace de fonctions test :

$$\underline{C_0^1(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))} = \{ \varphi(t,x) ;\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(t,x) \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \text{ de classe } C^1 \text{ en temps},\ \exists\, T = T(\varphi) \text{ t.q. } \forall t \geq T(\varphi),\ \varphi(t,x) = 0 \text{ p.p. en } x \}$$

<u>Rappel</u>: $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$

$f \in H^{-1}(\Omega) \iff \exists\, h_0, h_1, \dots, h_N \in L^2(\Omega)$ t.q. au sens $\mathcal{D}'(\Omega)$, $f = h_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial h_i}{\partial x_i}$

<u>Définition</u>: On dit que $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ est une <u>solution turbulente</u> du problème (1), (2), (3)

si et seulement si :

$$\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)) \text{ on a :}$$

a un sens quand $u_0 \in L^2(\Omega)$

$$-\int_\Omega u_0(x)\,\varphi(0,x)\,dx - \int_0^\infty\int_\Omega u(t,x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)\,dx\,dt$$

$$+\int_0^\infty\int_\Omega \nabla u(t,x)\,\nabla\varphi(t,x)\,dx\,dt$$

$$= \int_0^\infty \langle f, \varphi\rangle_{-1,1}\,dt$$

<u>Remarque:</u> Tous les termes ont un sens dans cette définition pour $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, H^{-1})$:

$$\int_0^\infty\int_\Omega u(t,x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)\,dx\,dt = \int_0^{T(\varphi)}\int_\Omega u(t,x)\,\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\,dx\,dt$$

Par Cauchy-Schwarz, pour presque tout t

$$\left|\int_\Omega u(t,x)\,\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\,dx\,dt\right| \leq \|u\|_{0,2}\,.\,\|\partial_t\varphi\|_{0,2}$$

$\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)) \Rightarrow$
$\partial_t\varphi \in C_0^0(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$.

Inégalité de Young

$$\leq \frac{1}{2}\|u\|_{0,2}^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t\varphi\|_{0,2}^2$$

Poincaré

$$\leq \frac{1}{2}C_\Omega\|\nabla u\|_{0,2}^2 + \frac{1}{2}C_\Omega\|\nabla\partial_t\varphi\|_0^2$$

$$\left|\int_0^{T(\varphi)}\int_\Omega u(t,x)\,\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\,dx\,dt\right| \leq \frac{1}{2}C_\Omega\int_0^{T(\varphi)}\|\nabla u\|_{0,2}^2\,dt$$

est bornée car $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$

$$+\frac{1}{2}C_\Omega\int_0^{T(\varphi)}\|\nabla\partial_t\varphi\|_0^2$$

borné, car $\partial_t\varphi \in C^0(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$

$$\left| \int_0^\infty \int_\Omega \nabla u(t,x) \nabla \varphi(t,x)\, dx\, dt \right| = \left| \int_0^{T(\varphi)} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx\, dt \right|$$

Cauchy-Schwarz $\leq \int_0^{T(\varphi)} \|\nabla u\|_{0,2} \cdot \|\nabla \varphi\|_{0,2}\, dt$

On a mis H_0^1 de la norme $\|\nabla u\|_{0,2}$

Young. $\leq \frac{1}{2} \int_0^{T(\varphi)} \|\nabla u\|_{0,2}^2 dt + \frac{1}{2} \int \|\nabla \varphi\|_{0,2}^2 dt$

$< +\infty$

par le même raisonnement.

$$\left| \int_0^\infty \langle f, \varphi \rangle_{-1,1}\, dt \right| \leq \int_0^{T(\varphi)} \|f\|_{-1} \cdot \|\nabla \varphi\|_{0,2}\, dt$$

$$\leq \int_0^{T(\varphi)} \|f\|_{-1}^2 dt + \int_0^{T(\varphi)} \|\nabla \varphi\|_{0,2}^2$$

$f \in L^2_{loc}(H^{-1})$

$< +\infty$ par les hypothèses sur f et φ

Thm: $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in C^0(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\Omega))$

Alors, le problème de l'équation de la chaleur (1), (2), (3) admet une solution turbulente unique.

Dem: en deux étapes:

① Construction d'approximations

② Passage à la limite dans les équations

→ Méthode de Galerkin.

① i) On admet qu'il existe une famille $(e_1, \dots, e_n, \dots)$ d'éléments de $H_0^1(\Omega)$:

$\int_\Omega \nabla e_i \nabla e_j$ ..... $((e_i, e_j)) = \delta_{ij} =$

$\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$: $\lambda_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, n$

$$-\Delta e_i = \lambda_i e_i$$

$H_n = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$, $H_0^1 = \bigcup H_n$ (hilbertienne)

$\tilde{e}_i = e_i / \lambda_i$: $(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \delta_{ij}$, $L^2 = \bigoplus_i \mathbb{R}\tilde{e}_i$

On parle de base spéciale.

↳ Théorie des opérateurs compacts (cf. Brézis)

On peut aussi montrer que $e_i \in C_0^\infty(\Omega)$.

ii) <u>Approximations:</u> On cherche, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n sous la forme : $u_n = \sum_{i=1}^{n} g_{i,n}(t)\, e_i$, où $g_{i,n} \in C^1(\mathbb{R}_+)$

En injectant formellement dans l'eq. de la chaleur :

$$\partial_t u_n = \sum_{i=1}^{n} g'_{i,n}(t)\, e_i$$

Pour $\varphi \in H_n$: $((u_n, \varphi)) = \sum_{i=1}^{n} g_{i,n}(t)\, ((e_i, \varphi))$

et de plus : $(f, \varphi)_{-1,1} = ((\mathcal{L}_n f, \varphi))$, où

$\mathcal{L}_n f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$

$\delta_{ij} = \int \nabla e_i \nabla e_j = \lambda_i \int e_i e_j$

$\int e_j^2 = \frac{1}{\lambda_j}$

Et particulier pour $\varphi = e_j$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} g'_{i,n}(t)\, e_i, e_j \right) + \sum_{i=1}^{n} g_{i,n}(t)\, ((e_i, e_j)) = f_j$$

$$\boxed{g'_{j,n}(t) + \lambda_j\, g_{j,n}(t) = \lambda_j f_j(t)} \qquad g_{j,0}(t) = u_{j,0}$$

et $\mathcal{L}_n u_0 = \sum_{i=1}^{n} u_{j,0}\, e_i(x)$ (au sens de L^2)

On trouve :

$$g_{j,n}(t) = u_{0,j}\, e^{-\lambda_j t} + \int_0^t f_j(s)\, e^{\lambda_j (s-t)}\, ds \in C^1(\mathbb{R}_+)$$

---

iii) <u>Estimation:</u> on prend $u = u_n$ comme test dans l'eq, et on intègre / Ω, en remarquant que :

$$\int_\Omega \partial_t u_n \cdot u_n = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u_n|^2 \qquad \left(g_{i,n} \cdot g'_{i,n} = \frac{1}{2} (g_{i,n}^2)' \right)$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_n|^2 + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 = {}_{-1}\langle f, u_n\rangle_1$$

On intègre sur $[0,t]$, $\forall t>0$:

égalité d'énergie
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega |u_n(t)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |u_0(x)|^2\,dx \\ &\quad + \int_0^t\int_\Omega |\nabla u_n(s,x)|^2\,dx\,ds = \int_0^t {}_{-1}\langle f(s), u_n(s)\rangle\,ds \end{aligned}\right.$$

$$\left|\int_0^t {}_{-1}\langle f(s), u_n(s)\rangle\,ds\right| \leq \int_0^t \|f(s)\|_{-1}\cdot\|u_n(s)\|_{H_0^1}\,ds$$

Inégalité de Young. $\longrightarrow$ $\leq \frac{1}{2}\int_0^t \|f(s)\|_{-1}^2\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega |\nabla u_n(s,x)|^2\,dx\,ds$

Que l'on combine avec l'inégalité d'énergie :

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall t>0,\\ &\int_\Omega |u_n(t,x)|^2\,dx + \int_0^t\int_\Omega |\nabla u_n(s,x)|^2\,dx\,ds \\ &\qquad\qquad \leq \int_0^t \|f(s)\|^2\,ds + \int_\Omega |u_0(x)|^2\,dx \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est bornée dans

dual de $L^1(L^2)$

$$L^2([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty([0,T], L^2(\Omega))$$

$\|v\|_{L^2(H_0^1)} = \left(\int_0^T\int_\Omega |\nabla v|^2\right)^{1/2}$

$\forall T>0$

$\hookrightarrow$ dual de $L^2(H^{-1})$ (reflexif)

$\|v\|_{L^\infty(L^2)} = \operatorname{ess\,sup}_{0\leq t\leq T}\left(\int_\Omega |u_n|^2\right)^{1/2}$

$\exists u \in L^2(H_0^1)\cap L^\infty(L^2)$

D'après le thm de Banach-Alaoglu, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite, que l'on note encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sans perdre de généralité, telle que :

$u_n \longrightarrow u$ dans $L^2([0,T], H_0^1(\Omega))$ au sens faible :

$$\forall \varphi \in L^2([0,T], H_0^1(\Omega)), \quad \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^T \int \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

et $u_n \longrightarrow u$ dans $L^\infty(L^2)$ faible $*$:

$$\forall \varphi \in L^1(L^2), \quad \iint_{0\,\Omega}^{T} u_n \cdot \varphi \longrightarrow \iint_{0\,\Omega}^{T} u \cdot \varphi .$$

2) Passage à la limite

Soit $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ et T tq $\varphi(s,x) = 0$, $\forall s \geq T$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t)\, e_i \quad , \quad P_n \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\, e_i$$

On choisit $P_n \varphi$ comme test dans l'équation approchée :

Lemme : Soit $w \in L^2([0,T], L^2(\Omega)) \simeq L^2(Q)$, où $Q = [0,T] \times \Omega$. Alors :

$P_n w \xrightarrow[n \to +\infty]{} w$ dans $L^2(Q)$ fort :

$$\int_0^T \int_\Omega |P_n w(t,x) - w(t,x)|^2 \, dx\, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .$$

exercice

et on intègre en temps espace :

$$- \int_\Omega u_0 \, P_n \varphi(0,x)\, dx - \int_0^T \int_\Omega u_n(t,x)\, \partial_t P_n \varphi(t,x)\, dx\, dt$$

$$+ \iint_{0\,\Omega}^{T} \nabla u_n(t,x) \cdot \nabla P_n \varphi(t,x)\, dx\, dt =$$

$$\int_0^T \langle f, P_n \varphi \rangle_{-1}\, ds$$

On traite les termes les uns après les autres :

$$-\int_\Omega u_0 \, \varphi_n(0,x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\int u_0(x)\cdot\varphi(0,x)\,dx$$

(Thm de Lorsevad + $H_0^1 \hookrightarrow L^2$ injection dense et compacte)

$$\int_0^T\int_\Omega u_n(t,x)\,\partial_t \varphi_n(t,x)\,dx\,dt \longrightarrow \int_0^T\int_\Omega u(t,x)\,\partial_t\varphi(t,x)\,dx\,dt$$

cv faible

cv fort

par le lemme précédent + $\iint_Q$ cv faible $\cdot$ cv forte $\longrightarrow \iint_Q w.g$

w_n g_n

$$\int_0^T\int_\Omega \nabla u_n(t,x)\cdot\nabla\varphi_n(t,x)\,dx\,dt \longrightarrow \int_0^T\int_\Omega \nabla u(t,x)\cdot\nabla\varphi(t,x)\,dx\,dt$$

$$\int_0^T \underset{-1}{\langle} f, \varphi_n\rangle\,ds \longrightarrow \int_0^T \langle f,\varphi\rangle\,ds$$

car $\varphi_n \to \varphi$ $L^2(H_0^1)$ fort.
et f est une forme lin continue : $(L^2(H_0^1))' \simeq L^2(H^{-1})$.

En conclusion, ce u est bien une solution faible de l'equation de la chaleur sur $[0,T]$.

Il reste à montrer l'unicité.

Comme le problème est linéaire, cela revient à considérer le cas $u_0 = 0$, et $f = 0$

que on combine avec l'inégalité d'énergie :

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall t > 0, \\ &\int_\Omega |u_n(t,x)|^2 + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n(s,x)|^2 \, dx \, ds \\ &\qquad \leq \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + \int_\Omega |u_0(x)|^2 dx \end{aligned}}$$

On réintègre en temps entre $[0,T]$

$$\int_0^T \int_\Omega |u_n(t,x)|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \int_0^t |\nabla u_n(s,x)|^2 ds \, dx \, dt$$

$$\leq \int_0^T \int_0^t \|f(s)\|^2 ds \, dt + T \int_\Omega |u_0(x)|^2$$

IPP/t

$$= \int_0^T \int_\Omega (T-t) |\nabla u_n(t,x)|^2 dx dt \geq 0$$

<u>Lemme</u> (Aubin-Lions) : Soit u_n une suite bornée dans $L^2([0,T], H_0^1)$, telle que $\partial_t u_n$ est bornée dans $L^2(H^{-1})$: Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est seq. rel. compacte dans $L^2(Q)$.

Dans le cas présent : $\partial_t u_n = \Delta u_n + P_n f$: borné $L^2(H^{-1})$ car u_n borné dans $L^2(H_0^1)$

$$(\partial_t u_n, \varphi) = (\partial_t u_n, P_n \varphi) = \sum_{i=1}^{m} g'_{i,n}(t) (P_n \varphi, e_i)$$

$$(-\Delta u_n, \varphi)_{-1,+1} := \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla P_n \varphi$$

$\Rightarrow (\partial_t u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est borné dans $L^2(H^{-1})$.

Donc de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous suite u_n t.q. $u_n \longrightarrow u$ $L^2(Q)$ fort, et par la basque inverse r.r.

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \iint_Q |u_n(t,x)|^2 \geq \iint_Q |u(t,x)|^2$$

Fatou.

$\Rightarrow$ De l'inégalité d'énergie :

$$\iint_Q |u(t,x)|^2 \leq \int_0^T \int_0^t \|f(s)\|^2 ds\, dt + T \int_\Omega |u_0(x)|^2$$

D'où en particulier l'unicité. $\square$

<u>Remarque</u> : On peut montrer que $u_n \longrightarrow u$ $L^2(H_0^1)$ fort.

$\square$