Equation de la chaleur :

partie 2 : Quelques résultats mathématiques.

① Problème : Ω : un ouvert borné, de classe C^1, dans $\mathbb{R}^n$ (dans la pratique $n = 2, 3$). On cherche $u : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(t, x) \longrightarrow u(t, x),$$

vérifiant :

eq → (1) $$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad , \text{ où } f = f(t,x) \text{ est}$$

un terme source, et qui satisfait :

$$(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Gamma, \quad (\Gamma = \partial\Omega)$$

cond. limite → (2) $$u(t, x) = 0,$$

cond. initiale → (3) et pour presque tout $x \in \Omega$, $u(0, x) = u_0(x)$ où u_0 est la donnée initiale.

Quel sens donner au système (1, 2, 3), et pour quels u_0 et f ?

② Notion de solutions turbulentes (à la mémoire de Jean Leray, 33)

Supposons u solution de (1), (2), (3), "régulière" ($C^1_{t,x}$),

fonction test → $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $C^1_{t,x}$, telle que : $\forall x \in \Gamma$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(t, x) = 0$.

On multiplie (1) par φ, et on intègre sur Ω ; pour t fixé, $\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} u \cdot \varphi \, dx - \int_\Omega \Delta u \cdot \varphi \cdot dx = \int_\Omega f \varphi \cdot dx$, en supposant pour l'instant f régulière. En utilisant la formule de Stokes, pour $t \in \mathbb{R}_+$, fixé :

$$-\int_\Omega \Delta u . \varphi = -\underbrace{\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} . \varphi \, dS}_{=0 \text{ car } \varphi(t,\cdot)=0 \text{ sur } \Gamma.} + \int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi . dx$$

$$= \int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi .$$

On obtient : $\forall\, t \geq 0$,

$$(4) \qquad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} . \varphi . dx + \int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f . \varphi \, dx$$

Soit $T > 0$: on intègre (4) en temps sur $[0,T]$, en observant :

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \varphi \, dx \, dt \overset{\text{Fubini}}{=} \int_\Omega \Big(\underbrace{\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \varphi(t,x) \, dt}_{\text{IPP en temps à } x \text{ fixé}} \Big) dx$$

$$\int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\varphi(t,x)\,dt = - u_0(x)\varphi(0,x) + u(T,x)\varphi(T,x) - \int_0^T u(t,x) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)\,dt$$

d'où :

$$\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\varphi(t,x)\,dt\,dx = - \int_\Omega u_0(x)\varphi(0,x)\,dx + \int_\Omega u(T,x)\varphi(T,x)\,dx - \int_\Omega \int_0^T u(t,x)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)\,dt\,dx$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\int_\Omega u_0(x)\,\varphi(0,x)\,dx + \overline{\int_\Omega u(T,x)\,\varphi(T,x)\,dx} \ \ ? \\
&\qquad -\int_\Omega\int_0^T u(t,x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)\,dt\,dx \\
&\qquad + \int_0^T\int_\Omega \nabla u(t,x)\cdot\nabla\varphi(t,x)\,dt\,dx = \int_0^T\int_\Omega f\cdot\varphi
\end{aligned}
\right\rbrace \ (1)
$$

permet de tracer la donnée initiale

Termes que l'on saura traiter

suggère H^1_0 en espace

On tire de cette analyse que l'on va chercher u dans l'espace

$$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, H^1_0(\Omega)) = \{ u(t,x) \,;\ \text{pour p.p. } t,\ u(t,x) \in H^1_0(\Omega),\ \text{et},\ \|\nabla u\|_{0,2} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+) \}$$

On choisit pour espace de fonctions test :

$$C^1_0(\mathbb{R}_+, H^1_0(\Omega)) = \{ \varphi(t,x) \,;\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(t,x) \in H^1_0(\Omega),\ \varphi \text{ de classe } C^1 \text{ en temps},\ \exists\, T = T(\varphi) \text{ t.q. } \forall t \geq T(\varphi),\ \varphi(t,x) = 0 \text{ p.p. en } x \}$$

<u>Rappel</u>: $H^{-1}(\Omega) = (H^1_0(\Omega))'$

$f \in H^{-1}(\Omega) \Leftrightarrow \exists\, h_0, h_1, \dots, h_N \in L^2(\Omega)$ tq. au sens $\mathcal{D}'(\Omega)$, $f = h_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial h_i}{\partial x_i}$

<u>Définition:</u> On dit que $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, H^1_0(\Omega))$ est une <u>solution turbulente</u> du problème (1), (2), (3)

si et seulement si :

$\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ on a :

a un sens quand $u_0 \in L^2(\Omega)$

$$-\int_\Omega u_0(x)\,\varphi(0,x)\,dx - \int_0^\infty \int_\Omega u(t,x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)\,dx\,dt$$

$$+ \int_0^\infty \int_\Omega \nabla u(t,x)\,\nabla \varphi(t,x)\,dx\,dt$$

$$= \int_0^\infty {}_{-1}\langle f, \varphi \rangle_1 \,dt$$

<u>Remarque:</u> Tous les termes ont un sens dans cette définition pour $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, H^{-1})$:

$$\int_0^\infty \int_\Omega u(t,x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)\,dx\,dt = \int_0^{T(\varphi)} \int_\Omega u(t,x)\,\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\,dx\,dt$$

Par Cauchy-Schwarz, pour presque tout t

$$\left| \int_\Omega u(t,x)\,\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\,dx\,dt \right| \leq \|u\|_{0,2} \cdot \|\partial_t \varphi\|_{0,2}$$

$\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega)) \Rightarrow$
$\partial_t \varphi \in C_0^0(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$.

Inégalité de Young

$$\leq \frac{1}{2}\|u\|_{0,2}^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t \varphi\|_{0,2}^2$$

Poincaré

$$\leq \frac{1}{2}C_\Omega \|\nabla u\|_{0,2}^2 + \frac{1}{2}C_\Omega \|\nabla \partial_t \varphi\|_0^2$$

$$\left| \int_0^{T(\varphi)} \int_\Omega u(t,x)\,\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\,dx\,dt \right| \leq \frac{1}{2}C_\Omega \int_0^{T(\varphi)} \|\nabla u\|_{0,2}^2\,dt$$

$$+ \frac{1}{2}C_\Omega \int_0^{T(\varphi)} \|\nabla \partial_t \varphi\|_0^2$$

est bornée car $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$

borné, car $\partial_t \varphi \in C^0(\mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$

$$\left| \int_0^\infty \int_\Omega \nabla u(t,x) \nabla \varphi(t,x)\, dx\, dt \right| = \left| \int_0^{T(\varphi)} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx\, dt \right|$$

$$\xrightarrow{\text{Cauchy Schwarz}} \leq \int_0^{T(\varphi)} \|\nabla u\|_{0,2} \cdot \|\nabla \varphi\|_{0,2}\, dt$$

On a muni H_0^1 de la norme $\|\nabla u\|_{0,2}$

$$\xrightarrow{\text{Young.}} \leq \frac{1}{2} \int_0^{T(\varphi)} \|\nabla u\|_{0,2}^2\, dt + \frac{1}{2} \int \|\nabla \varphi\|_{0,2}^2\, dt$$

$$< +\infty$$

par le même raisonnement.

$$\left| \int_0^\infty {}_{-1}\langle f, \varphi \rangle_1 \, dt \right| \leq \int_0^{T(\varphi)} \|f\|_{-1} \cdot \|\nabla \varphi\|_{0,2}\, dt$$

$$\xrightarrow{f \in L^2_{loc}(H^{-1})} \leq \int_0^{T(\varphi)} \|f\|_{-1}^2\, dt + \int_0^{T(\varphi)} \|\nabla \varphi\|_{0,2}^2$$

$< +\infty$ par les hypothèses sur f et φ