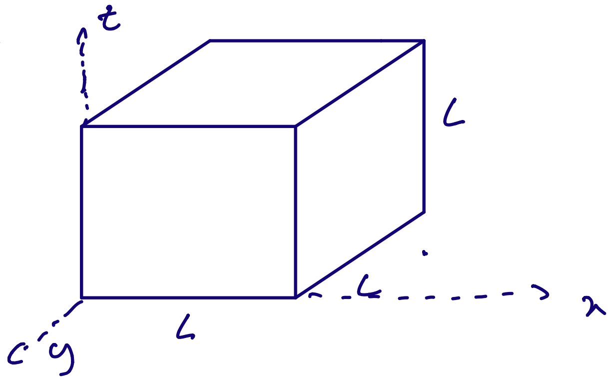
Quelques résultats sur les problèmes elliptiques

1) Équation de Helmholtz

$$\boxed{-\varepsilon^2 \Delta u + u = f}, \quad \varepsilon > 0$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \qquad N = 3 \text{ pour fixer les idées.}$$

Cas périodique



On cherche u telle que :

$$\forall\, x, y, z, \quad \forall\, (k_1, k_2, k_3) = \vec{k} \in \mathbb{Z}^3$$

$$u\left(x + \frac{k_1}{L}\vec{e}_1,\ y + \frac{k_2}{L}\vec{e}_2,\ z + \frac{k_3}{L}\vec{e}_3\right) = u(x, y, z)$$

$x = (x, y, z)$

ex : $u(x) = e^{\frac{2i\pi}{L} \cdot \vec{k} \cdot x}$

Espaces fonctionnels : séries trigonométriques formelles, homogènes :

Hilbert
$$L^2_{per} = \left\{ u = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^3} \hat{u}_k\, e^{\frac{2i\pi}{L} \vec{k} \cdot x},\ \text{t.q. } u_0 = 0,\ \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} |\hat{u}_k|^2 < +\infty \right\}$$

Hilbert
$$H^1_{per} = \left\{ u = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^3} \hat{u}_k\, e^{\frac{2i\pi}{L} \vec{k} \cdot x},\ u_0 = 0,\ \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} |k|^2 |\hat{u}_k|^2 < +\infty \right\}$$

avec : $\|u\|_{0,2} = \left(\sum'_{k \in \mathbb{Z}^3} |\hat{u}_k|^2 \right)^{1/2}$

$$\|u\|_{1,2} = \left(\sum'_{k \in \mathbb{Z}^3} |k|^2 |\hat{u}_k|^2 \right)^{1/2}$$

On suppose que $f = \sum'_{\substack{\vec{k} \in \mathbb{Z}^3 \\ \vec{k} \neq 0}} \hat{f}_k e^{2i\pi/L \, \vec{k} \cdot x} \in L^2_{per}$

et on cherche une solution de l'équation de Helmholtz sous la forme d'une série trigonométrique formelle :

$$u = \sum'_{\vec{k} \neq 0} \hat{u}_{\vec{k}} e^{2i\pi/L \, \vec{k} \cdot x}, \qquad \text{avec formellement}$$

$$\Delta u = -\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sum'_{\vec{k} \neq 0} |\vec{k}|^2 \hat{u}_{\vec{k}} e^{2i\pi/L \, \vec{k} \cdot x},$$

ce que l'on injecte dans l'équation, pour obtenir, l'équation pour chaque mode $\hat{u}_k$:

$$\varepsilon^2 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 |\vec{k}|^2 \hat{u}_{\vec{k}} + \hat{u}_{\vec{k}} = \hat{f}_{\vec{k}},$$

qui se résoud en : $\forall \vec{k} \in \mathbb{Z}^3, \ \vec{k} \neq 0.$

$$(1) \qquad \hat{u}_{\vec{k}} = \frac{\hat{f}_{\vec{k}}}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 |\vec{k}|^2}$$

Si $u = (\ldots, u_{-\vec{n}}, \ldots, u_{-\vec{1}}, 0, \ldots)$ est donné par (1), et $f \in L^2_{per}$,

$$\underbrace{\sum'_{\vec{k} \neq 0} |\vec{k}|^4 |u_{\vec{k}}|^2}_{\|u\|^2_{2,2}} = \sum'_{\vec{k} \neq 0} \frac{|\vec{k}|^4}{\left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 |\vec{k}|^2\right)^2} |f_k|^2 \leq C_\varepsilon \|f\|^2_{0,2}$$

$H^2_{per} = \left\{ u = \sum' u_k e^{2i\pi/L \, \vec{k} \cdot x}, \ \hat{u}_0 = 0, \ \sum' |\vec{k}|^4 |\hat{u}_k|^2 < +\infty \right\}$

Théorème : Étant donné $f \in L^2_{per}$, l'équation de Helmholtz admet une unique solution $u \in H^2_{per}$, qui satisfait $\|u\|_{2,L} \leq C_\varepsilon \|f\|_{0,L}$

Calcul de la constante : $\dfrac{|\vec{k}|^4}{\left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 |\vec{k}|^2\right)^2} \xrightarrow[|\vec{k}| \to +\infty]{} \dfrac{1}{\varepsilon^4 \left(2\pi/L\right)^4}$

$$\boxed{C_\varepsilon = O\left(1/\varepsilon^2\right)}$$

Exercice : Montrer que $\|u\|_{0,L} \leq C \|f\|_{0,L}$, où C ne dépend pas de ε, et en notant $u = u_\varepsilon$ la solution correspondante, montrer que $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f$ dans L^2_{per}.

Remarque : $f \in H^m_{per} \Rightarrow u \in H^{m+2}_{per}$.

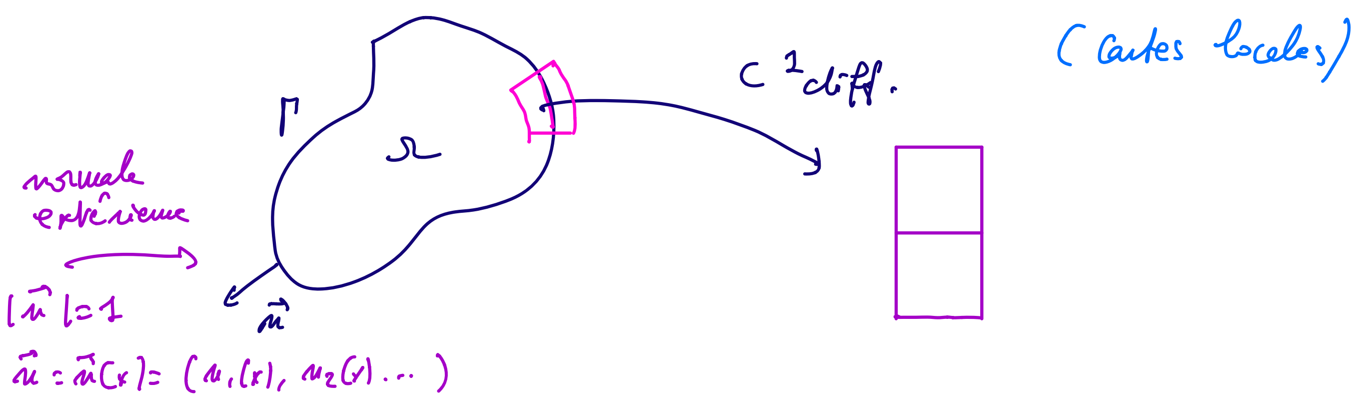
Remarque : Soit $f \in L^1_{per}$, $N \in \mathbb{N}$, et :

$$\mathbb{P}_N f = \sum_{|\vec{k}| \leq N}' \hat{f}_k \, e^{2i\pi/L \, \vec{k}\cdot x}$$

et u_N la solution correspondante du problème de Helmholtz correspondante. Alors $u_N \to u$ dans H^1_{per}.

② Méthode de Galerkin

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{1,3}$ un ouvert de classe C^1 :



Si $f \in H^1(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$; $\forall i = 1, 2, 3 \dots$

$$\boxed{\int_\Omega f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx = \int_\Gamma f \cdot g \cdot n_i \, d\sigma - \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\, g \, dx}$$

où $H^1(\Omega) = \{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) ;\ u \in L^2(\Omega),$
$\nabla u \in L^2(\Omega) \}$,

muni de la norme : $\|u\|_{1,2} = \|u\|_{0,2} + \|\nabla u\|_{0,2}$

$\|\cdot\|_{0,2}$ = norme L^2. , $\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ \partial_2 u \\ \vdots \end{pmatrix}$, $\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

On considère le problème de Dirichlet :

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}}$$

Rappel : L'application trace ; qui à $u \in H^1(\Omega)$ associe sa "trace" sur le bord Γ, est une application surjective de $H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma)$.

avec Fourier : $H^{1/2}_{per} = \{ u = \sum'_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^3,\ \vec{k} \neq 0} \hat{u}_k e^{i\vec{k}\cdot x} ,\ \sum' |\vec{k}|\, |\hat{u}_k| < +\infty \}$

Lions-Magenes : Soit Λ l'injection de $H^1 \hookrightarrow L^2$, alors $H^{1/2}(\Omega)$ est le domaine de $\Lambda^{1/2}$.

Dans ce cas : $u = 0$ sur Γ a lieu dans $H^{1/2}(\Gamma)$, si on cherche des solutions dans H^1.

Formulation variationnelle

On multiplie formellement l'équation par v, et on intègre par parties :

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot v = -\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \cdot v = -\sum \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} v \cdot n_i \, d\Gamma + \underbrace{\sum \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}}_{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v}$$

terme de bord : s'annule si on choisit la fonction test $v = 0$ sur le bord.

En choisissant $v|_\Gamma = 0$, on obtient :

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f \cdot v}_{(f,v)}$$

- Si $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$, $(u,v) \to a(u,v)$ est une forme bilinéaire symétrique, continue, et coercive : En effet sur $H_0^1(\Omega)$, par l'inégalité de Poincaré, $\forall w \in H_0^1$

$$\|w\|_{1,2} \leq C_P \|\nabla w\|_{0,2} = C_P \, a(w,w)$$

H^{-1} = dual topologique de H_0^1

Théorème: Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$, et le problème variationnel : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$, t.q. $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u,v) = {}_{-1}(f,v)_1$$

Alors, via Lax-Milgram, ce problème admet une unique solution.

Méthode de Galerkin: Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'espace t.q. $H_n \subset H_{n+1}$, $\dim H_n = n$,

$$\bigcup H_n = H_0^1(\Omega).$$

somme hilbertienne

Soit Π_n le projecteur orthogonal sur H_n,

et pour $v \in H_n$, $(\Pi_n f, v) = {}_{-1}(f, v)_{+1}$

produit scalaire dans H_n

dualité H^{-1} et H_0^1.

$\Pi_n f = \sum_{k=1}^{n} F_k e_k$, où $H_n = \text{vect}(\underbrace{e_1 \cdots e_n}_{})$

base orthogonale.

NB: on peut choisir e_i de classe C^2 (par morceaux)

On cherche $u_N = \sum' u_k^N e_k$,

tq : $-\Delta u_n = \Pi_n f$,

i.e : $a(u_N, e_i) = \underline{(\Pi_n f, e_i)}$ $i = 1, \dots, n$

$$\| \quad \sum_{k=1}^{n} u_k^N A_{ik} = F_i = (\Pi_n f, e_i),$$

matrice de raideur

$A_{ik} = A = ((e_i, e_k)) = Id$ (pour une base orthogonale) pour H_0^1 muni de $\| \nabla u \|_{L^2}$.

$\Rightarrow \quad u_i^n = F_i$

Thm: Soit $u_n = \sum' u_i^n e_i$ solution du pb. précédent. Alors, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$ dans $H_0^1(\Omega)$ vers l'unique solution variationnelle de $-\Delta u = f$, $u|_\Gamma = 0$.

Remarque: Si $f \in C^0(\bar{\Omega})$, alors $u \in C^2(\bar{\Omega})$ et est une solution classique du pb. de Dirichlet.

Principe du maximum: $f \in L^2$, $f \geq 0$ p.p. $\Rightarrow u \geq 0$ p.p.