Université de Rennes 1 2023-2024
Agrégation externe

Compléments sur la tranformée de Fourier discrète

Miguel Rodrigues

Ces notes de cours sont consacrées à la discrétisation des séries de Fourier. Une partie du matériel discuté ici peut être trouvé dans les livres classiques d'analyse numérique en général [Fil13, Sch04].
On s'autorise à utiliser sans rappel les notations du cours de complément sur les séries de Fourier.

1 Transformée de Fourier discrète

Pour calculer des approximations numériques, il faut discrétiser la définition des coefficients de Fourier. Afin de se préparer à cette discrétisation, il est utile de penser les fonctions (ou les distributions) $\mathbf{Z}$-périodiques comme des fonctions (ou des distributions) définies sur l'espace quotient $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Nous n'avons pas introduit ce point de vue jusqu'ici parce que le mener jusqu'au bout demanderait des considérations différentielles sur les espaces quotient.
Un moyen de procéder à la discrétisation est de considérer une transformée de Fourier discrète sur $(m^{-1}\mathbf{Z})/\mathbf{Z}$ où $m \in \mathbf{N}^*$. Évidemment $(m^{-1}\mathbf{Z})/\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, mais l'on pense $(m^{-1}\mathbf{Z})/\mathbf{Z}$ comme une approximation de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ dans la limite $m \to \infty$. Exprimé en terme de domaine fondamental, on approche $[0,1[$ par

$$\left\{ \frac{j}{m}\,; \quad j \in [\![0, m-1]\!] \right\}.$$

En procédant ainsi, on bénéficie de deux aspects incompatibles au niveau continu. D'une part on garde les bonnes propriétés d'isométrie ℓ^2 associées aux fait que l'on manipule une transformée de Fourier, d'autre part puisque la mesure sous-jacente est discrète on résout de fait des problèmes d'interpolation (trigonométrique en l'occurrence).
Cela induit aussi une discrétisation du côté de Fourier. Pour établir des liens avec un point de vue plus algébrique, il peut être bon d'identifier les polynômes trigonométriques avec des fonctions sur le cercle [1]

$$\mathbf{S}^1 := \left\{ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,\theta}\,; \quad \theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z} \right\}.$$

La transformée de Fourier discrète sur $(m^{-1}\mathbf{Z})/\mathbf{Z}$ construit alors une fonction polynomiale sur l'ensemble des racines m-ièmes de l'unité

$$\mathbf{U}_m := \left\{ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,j}\,; \quad j \in (m^{-1}\mathbf{Z})/\mathbf{Z} \right\} = \left\{ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,\frac{j}{m}}\,; \quad j \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \right\}.$$

Notons que c'est en fait un élément de $\mathbf{C}[X]/(X^m - 1)$ qui est ainsi construit, ou de manière équivalente un élément de $\mathbf{C}_{m-1}[X]$, ce que nous ferons ci-dessous.

1. Ce type d'identification a ses limites. Le tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ et le tore bouée de la vie quotidienne sont homéomorphes, donc topologiquement identiques, mais pas géométriquement identiques. Le tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ est plat, alors que la bouée a de la courbure.

Concrètement cela amène à considérer

$$\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m, \quad (f_0, \cdots, f_{m-1}) \longmapsto \left(\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f_j\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\,2\pi\,\frac{j}{m}}\right)_{k\in[\![0,m-1]\!]}$$

et

$$\mathcal{G}_m : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m, \quad (c_0, \cdots, c_{m-1}) \longmapsto \left(\sum_{k=0}^{m-1} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\,2\pi\,\frac{j}{m}}\right)_{j\in[\![0,m-1]\!]}$$

qui sont inverses l'une de l'autre. En particulier, cela montre que, pour tout $(f_0, \cdots, f_{m-1}) \in \mathbf{C}^m$, il existe un unique $(c_0, \cdots, c_{m-1}) \in \mathbf{C}^m$ tel que $P := \sum_{k=0}^{m-1} c_k\,\mathrm{e}_{(k)}$ vérifie, pour tout $j \in [\![0, m-1]\!]$, $P\left(\frac{j}{m}\right) = f_j$.

Notez que les formules directes et inverses sont plus symétriques que dans le cas continu, et que les formules discrètes pour les coefficients correspondent à une discrétisation par la méthode des rectangles à gauche[2] des formules continues.

Par ailleurs, si $(c_0, \cdots, c_{m-1}) = \mathcal{F}_m((f_0, \cdots, f_{m-1}))$, alors

$$\begin{aligned}
\|(c_0, \cdots, c_{m-1})\|_{\ell^2([\![0,m-1]\!])} &= \frac{1}{\sqrt{m}}\,\|(f_0, \cdots, f_{m-1})\|_{\ell^2([\![0,m-1]\!])}\,,\\
\|(c_0, \cdots, c_{m-1})\|_{\ell^\infty([\![0,m-1]\!])} &\leq \frac{1}{m}\,\|(f_0, \cdots, f_{m-1})\|_{\ell^1([\![0,m-1]\!])}\,,\\
\|(f_0, \cdots, f_{m-1})\|_{\ell^\infty([\![0,m-1]\!])} &\leq \|(c_0, \cdots, c_{m-1})\|_{\ell^1([\![0,m-1]\!])}\,.
\end{aligned}$$

Pour décrire l'interaction entre la transformée de Fourier discrète et quelques opérations usuelles on identifie à nouveau[3] $[\![0, m-1]\!]$ et $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Alors, si $(c_0, \cdots, c_{m-1}) = \mathcal{F}_m((f_0, \cdots, f_{m-1}))$, on observe que si $j_0 \in \mathbf{Z}$

$$(\mathcal{F}_m((f_{j+j_0})_{j\in[\![0,m-1]\!]}))_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\,2\pi\,\frac{j_0}{m}}\,c_k\,, \qquad k \in [\![0, m-1]\!]\,;$$

et si $(d_0, \cdots, d_{m-1}) = \mathcal{F}_m((g_0, \cdots, g_{m-1}))$,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_m((f_j\,g_j)_{j\in[\![0,m-1]\!]}))_k &= \sum_{\ell=0}^{m-1} c_\ell\,d_{k-\ell} = \sum_{\ell=0}^{m-1} c_{k-\ell}\,d_\ell\,, && k \in [\![0, m-1]\!]\,;\\
\left(\mathcal{F}_m\left(\left(\frac{1}{m}\sum_{\ell=0}^{m-1} f_{j-\ell}\,g_\ell\right)_{j\in[\![0,m-1]\!]}\right)\right)_k &= c_k\,d_k\,, && k \in [\![0, m-1]\!]\,;
\end{aligned}$$

2 Approximation des séries de Fourier

Pour établir un comparaison entre les cas discrets et continus, le point de vue polynomial n'est pas adapté. Il faut étendre les formules de coefficients à $\mathbf{Z}$. Pour $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}([0,1])$ définissons pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$c_k^{(m)}(f) := \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f\left(\frac{j}{m}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\,k\,\frac{j}{m}}\,.$$

et observons que pour tout $\ell \in \mathbf{Z}$, on a $c_{k+\ell m}^{(m)}(f) = c_k^{(m)}(f)$. En particulier, pour tout $\ell \in \mathbf{Z}$, la fonction $P := \sum_{k=\ell}^{m+\ell-1} c_k^{(m)}(f)\,\mathrm{e}_{(k)}$ vérifie, pour tout $j \in [\![0, m-1]\!]$, $P\left(\frac{j}{m}\right) = f\left(\frac{j}{m}\right)$. On définit alors les

2. En fait, dans le cas où $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}([0,1])$, cela coïncide avec une discrétisation par la méthode des rectangles à droite, ou par une discrétisation par la méthode des trapèzes.

3. Cette identification est cohérente avec l'extension des formules réalisées ci-dessous.

approximations

$$P_{(m)}(f) := \sum_{k=-\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}^{m-\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-1} c_k^{(m)}(f)\, \mathrm{e}_{(k)}\,.$$

Par ailleurs, en comparant les deux formules d'inversion de Fourier, on déduit que si f est un polynôme trigonométrique[4], pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$c_k^{(m)}(f) \;=\; \sum_{\ell\in k+m\mathbf{Z}} c_\ell(f) \;=\; c_k(f) + \sum_{\ell\in k+m\mathbf{Z}^*} c_\ell(f)\,.$$

Cela implique immédiatement que pour tout $1 \leq p \leq \infty$

$$\|(c_k^{(m)}(f))_{k\in[\![0,m-1]\!]}\|_{\ell^p([\![0,m-1]\!])} \leq \|(c_k^{(m)}(f))_{k\in[\![0,m-1]\!]}\|_{\ell^1([\![0,m-1]\!])} \leq \|(c_\ell(f))_{\ell\in\mathbf{Z}}\|_{\ell^1(\mathbf{Z})}\,.$$

On déduit également les résultats d'approximation suivants. Rappelons qu'ils peuvent être vus comme des résultats sur les erreurs d'interpolation trigonométriques.

Proposition 1 *1. Si u est tel que $((1+|\xi|)^\ell\, c_{(\xi)}(u))_{\xi\in\mathbf{Z}} \in \ell^1(\mathbf{Z})$, par exemple si $u \in W^{\ell+1,p}_{pér}(]0,1[)$ avec $1 < p \leq \infty$, alors pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, pour tout $k \in [\![0,\ell]\!]$,*

$$\left\| u^{(k)} - (P_{(m)}(u))^{(k)} \right\|_{L^\infty(]0,1[)} \leq \frac{2}{(\pi\, m)^{\ell-k}} \sum_{|j|\geq\lfloor\frac{m}{2}\rfloor} |c_j(u^{(\ell)})| \overset{m\to\infty}{=} o(m^{-(\ell-k)})\,.$$

2. Pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, il existe C_ℓ tel que si u est tel que $((1+|\xi|)^{\ell+1}\, c_{(\xi)}(u))_{\xi\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z})$, c'est-à-dire si $u \in H^{\ell+1}_{pér}(]0,1[)$, alors pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, pour tout $k \in [\![0,\ell]\!]$,

$$\left\| u^{(k)} - (P_{(m)}(u))^{(k)} \right\|_{L^2(]0,1[)} \leq \frac{C_\ell}{m^{1+\ell-k}} \sqrt{\sum_{|j|\geq\lfloor\frac{m}{2}\rfloor} |c_j(u^{(\ell+1)})|^2} \overset{m\to\infty}{=} o(m^{-(1+\ell-k)})\,.$$

Un corollaire assez direct est que la méthode de quadrature des trapèzes est d'ordre ∞ pour des intégrandes $u \in \mathcal{C}^\infty_{\text{pér}}([0,1])$. On parle de précision spectrale.
On rappelle que pour assurer $u \in W^{\ell+1,p}_{\text{pér}}(]0,1[)$ pour n'importe quel p il suffit que u soit $\mathcal{C}^{\ell+1}$ sur $[0,1]$ et que pour $j \in [\![0,\ell]\!]$, $u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1)$. On peut évidemment utiliser directement cette hypothèse pour vérifier la condition sur les coefficients de Fourier.

3 Calcul rapide

Un calcul naïf de $\mathcal{F}_m$ ou de $\mathcal{G}_m$ requerrait $\mathcal{O}(m^2)$ opérations. Une des raisons du succès de l'utilisation des transformées de Fourier discrètes est qu'il existe un algorithme, appelé *Fast Fourier Transform* (FFT) en anglais. On trouve des traces d'un tel agorithme dès les travaux de Gauss, mais c'est un article de James Cooley et John Tukey, publié en 1965, qui l'a popularisé. Il permet un calcul en $\mathcal{O}(m\,\log(m))$ opérations.
Il s'agit d'un algorithme récursif, illustrant le principe d'algorithmique dit *diviser pour régner*. Le cas le plus favorable et le plus facile à analyser est celui où m est une puissance de 2. Nous ne discuterons donc que ce cas là qui est basé sur le fait que quand m est pair on peut se ramener essentiellement au calcul de deux transformations de Fourier discrète $\mathcal{F}_{m/2}$ combiné avec $\mathcal{O}(m)$ opérations.

4. L'égalité s'étend par densité/continuité.

En effet si m est pair on observe que, pour $k \in [\![0, m-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
c_{2k}^{(m)}(f) &= \mathcal{F}_m\left(\left(f\left(\frac{j}{m}\right)\right)_{0\leq j\leq m-1}\right)(2k)\\
&= \mathcal{F}_{m/2}\left(\left(\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{j}{m}\right)+f\left(\frac{\frac{m}{2}+j}{m}\right)\right)\right)_{0\leq j\leq \frac{m}{2}-1}\right)(k)\\
&= c_k^{(m/2)}\left(\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{\cdot}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}+\frac{\cdot}{2}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
c_{2k+1}^{(m)}(f) &= \mathcal{F}_m\left(\left(f\left(\frac{j}{m}\right)\right)_{0\leq j\leq m-1}\right)(2k+1)\\
&= \mathcal{F}_{m/2}\left(\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\,\frac{j}{m}}\left(f\left(\frac{j}{m}\right)-f\left(\frac{\frac{m}{2}+j}{m}\right)\right)\right)_{0\leq j\leq \frac{m}{2}-1}\right)(k)\\
&= c_k^{(m/2)}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\,\cdot}\left(f\left(\frac{\cdot}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}+\frac{\cdot}{2}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi si $m=1$ le calcul est immédiat, et si m est une puissance de 2 non triviale, on doit calculer les valeurs de $\left(\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{j}{m}\right)+f\left(\frac{\frac{m}{2}+j}{m}\right)\right)\right)_{0\leq j\leq \frac{m}{2}-1}$ et de $\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\,\frac{j}{m}}\left(f\left(\frac{j}{m}\right)-f\left(\frac{\frac{m}{2}+j}{m}\right)\right)\right)_{0\leq j\leq \frac{m}{2}-1}$ puis leurs transformées de Fourier discrète de paramètre $m/2$. Ainsi *in fine* il y a $J=\log(m)/\log(2)$ étapes et, à l'étape $j\in [\![0, J-1]\!]$, il y a 2^j séries de calcul de $\mathcal{O}(m/2^j)$ opérations à effectuer. Cela donne le coût en $\mathcal{O}(m\,\log(m))$ opérations.

L'algorithme est implémenté dans tous les logiciels de calcul, notamment dans `Scilab` ou la bibliothèque `NumPy` de `Python` [5] mais son utilisation présente un certain nombre de chausse-trappes. La première est que ce qui est calculé est [6] $(m\times c_{k-1}^{(m)}(f))_{1\leq k\leq m}$. Par ailleurs il est important d'observer que d'une point de vue des applications à la résolution des équations aux dérivées partielles c'est $(c_k^{(m)}(f))_{-m/2\leq k\leq m/2-1}$ qui nous intéresse et c'est sur cette suite de coefficients qu'il faut appliquer les multiplicateurs de Fourier adéquats. Ce point est suffisamment important pour qu'il existe des commandes [7] `Scilab` et `Python` qui appliquent le recentrage nécessaire.

4 Analyse de schémas numériques

Nous allons maintenant illustrer comment les considérations précédentes peuvent être appliquées à l'analyse des schémas numériques avec des points spatiaux équidistants pour des équations aux dérivées partielles à coefficients constants et des conditions de bord périodiques. On espère que l'analyse et les tests menés sur ces cas idéaux renseignent sur des cas plus élaborés, difficiles à analyser.

On se donne un temps $T>0$, une vitesse $a\in\mathbf{R}$ et une donnée initiale réelle u_0 définie sur $\mathbf{R}$. On considère alors pour une inconnue réelle u définie sur $[0,T]\times\mathbf{R}$ l'*équation de transport* associée

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0\,, \qquad \text{sur }]0,T[\times\mathbf{R} \tag{4.1}$$

5. Voir `https://help.scilab.org/docs/5.3.1/fr_FR/fft.html` ou `https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.fft.fft.html`

6. Notez le décalage dans l'indexation, qui commence à 1, et le facteur m.

7. Voir `https://help.scilab.org/docs/5.3.1/fr_FR/fftshift.html` et `https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.fft.fftshift.html`

complétée par la donnée initiale
$$u(0,\cdot) = u_0\,. \tag{4.2}$$
On montre de manière élémentaire que pour tout $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$, le problème de Cauchy (4.1)-(4.2) possède une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0,T]\times\mathbf{R})$, et que, de plus, u est donné par pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}$, $u(t,x) = u_0(x - t\,a)$. Signalons en passant qu'on peut également montrer de manière beaucoup moins élémentaire que pour tout $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, le problème de Cauchy (4.1)-(4.2) possède une unique solution $u \in \mathcal{C}^0([0,T];\mathcal{D}'(\mathbf{R}))$ donnée par une version adéquate de la même formule.
En utilisant le résultat d'unicité ou la formule explicite, on vérifie immédiatement que si u_0 est $\mathbf{Z}$-périodique alors c'est le cas de $u(t,\cdot)$ pour tout $t\in[0,T]$. Étant donnés des pas d'espace et de temps Δx et Δt tels que $N_x := 1/\Delta x \in \mathbf{N}^*$, on note N_t la partie entière de $T/\Delta t$ et on introduit les nœuds de subdivisions $x_j = j\Delta x$, $j\in[\![1,N_x]\!]$, et $t_n = n\Delta t$, $n \in [\![0,N_t]\!]$. On souhaite calculer u_j^n des valeurs en (t_n,x_j) censées fournir une approximation des valeurs $u(t_n,x_j)$ de la solution. Insistons sur le fait que bien nous ne le marquions pas par des indices et des exposants, (u_j^n,t_n,x_j) ne dépendent pas que de (j,n) mais aussi de $(\Delta t,\Delta x)$ ou de manière équivalente de (N_t,N_x).
Nous allons analyser le schéma aux différences finies décentré à gauche
$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right)\,,\qquad j\in[\![1,N_x]\!],\qquad n\in[\![0,N_t-1]\!]\,, \tag{DFg}$$
où les valeurs en dehors de $j\in[\![1,N_x]\!]$ sont obtenues par périodicité, $u_0^n := u_{N_x}^n$, et les valeurs initiales sont données par $u_j^0 := u_0(x_j)$.
Commençons par discuter de la stabilité. Pour faciliter l'analyse en Fourier, nous allons choisir de mesurer la convergence dans L^2. La question de la stabilité est celle de l'existence d'une constante C_T indépendante de u_0, Δt et Δx telle que la solution du schéma ci-dessus vérifie
$$\frac{1}{\sqrt{N_x}}\,\|U^n\|_{\ell^2([\![1,N_x]\!])} \leq C_T\,\frac{1}{\sqrt{N_x}}\,\|U^0\|_{\ell^2([\![1,N_x]\!])}\,,\qquad\qquad 0\leq n\,\Delta t\leq T\,.$$
où $U^n := (u_1^n,\cdots,u_{N_x}^n)$. Formulé autrement, si on écrit (DFg) sous forme matricielle $U^{n+1} = A\,U^n$ pour une certaine matrice A de taille $N_x\times N_x$ dépendant de Δt et Δx, on souhaite
$$\|A^n\|_{\ell^2\to\ell^2} \leq C_T\,,\qquad\qquad 0\leq n\leq \frac{T}{\Delta t}\,.$$
La transformée de Fourier discrète diagonalise A de manière presque isométrique. Posons $C^n := \mathcal{F}_{N_x}(U^n)$. Alors
$$\|C^n\|_{\ell^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{N_x}}\,\|U^n\|_{\ell^2}$$
et (DFg) devient
$$C_k^{n+1} = \left(1 - a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\left(1 - e^{-\mathrm{i}k\,2\pi\,\Delta x}\right)\right)\,C_k^n\,,\qquad k\in[\![0,N_x-1]\!],\qquad n\in[\![0,N_t-1]\!]\,.$$
La condition de stabilité devient
$$\left|1 - a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\left(1 - e^{-\mathrm{i}k\,2\pi\,\Delta x}\right)\right|^n \leq C_T\,,\qquad\qquad n\in[\![0,N_t]\!]\,,\quad k\in[\![0,N_x-1]\!]\,.$$
Pour continuer l'analyse il est commode de fixer $\lambda := \Delta t/\Delta x$. On montre alors que si $a<0$ et $N_x\geq 2$,
$$\max_{k\in[\![0,N_x-1]\!]}\left|1 - a\,\lambda\,\left(1 - e^{-\mathrm{i}\frac{k}{N_x}\,2\pi}\right)\right| \geq |1 - a\,\lambda| = 1 + |a|\,\lambda$$

de sorte que

$$\max_{k\in[\![0,N_x-1]\!]}\left|1-a\,\lambda\,\left(1-e^{-\mathrm{i}\,\frac{k}{N_x}\,2\pi}\right)\right|^{\left\lfloor\frac{T}{\lambda\,N_x}\right\rfloor}\geq(1+|a|\,\lambda)^{\left\lfloor\frac{T}{\lambda\,N_x}\right\rfloor}\overset{N_x\to\infty}{\longrightarrow}+\infty\,.$$

Si $a\lambda>1$, on montre que

$$\max_{\zeta\in\mathbf{R}}\left|1-a\,\lambda\,\left(1-e^{\mathrm{i}\zeta}\right)\right|=2a\,\lambda-1$$

ce qui implique pour n'importe quel $1<\mu<2a\,\lambda-1$, quand N_x est suffisamment grand

$$\max_{k\in[\![0,N_x-1]\!]}\left|1-a\,\lambda\,\left(1-e^{-\mathrm{i}\,\frac{k}{N_x}\,2\pi}\right)\right|^{\left\lfloor\frac{T}{\lambda\,N_x}\right\rfloor}\geq\mu^{\left\lfloor\frac{T}{\lambda\,N_x}\right\rfloor}\overset{N_x\to\infty}{\longrightarrow}+\infty\,.$$

Ainsi on conclut à l'instabilité quand $a\,\lambda\notin[0,1]$. Réciproquement, quand $a\,\lambda\in[0,1]$, on conclut à la stabilité avec $C_T=1$ par simple inégalité triangulaire.
La condition

$$0\leq a\,\lambda\leq 1\,,$$

est connue comme condition de Courant–Friedrichs–Lewy.
Pour conclure l'analyse de convergence il faut aussi mener une analyse de consistance L^2 et utiliser une formule de Duhamel discrète pour transformer la stabilité par rapport aux perturbations sur la donnée initiale en stabilité par rapport aux perturbations dans l'équation.

Références

[Fil13] F. Filbet. *Analyse numérique - Algorithme et étude mathématique.* Dunod, 2013.

[Sch04] M. Schatzman. *Analyse numérique.* Dunod, 2004.