Université de Rennes 1 2024-2025
Agrégation externe

Compléments sur les séries de Fourier

Miguel Rodrigues

Ces notes de cours sont consacrées à des rappels sur l'analyse en séries de Fourier. Dans la suite on se focalisera sur le cas de la dimension 1, mais pour motiver un peu le choses nous commençons par des considérations géométriques en dimension quelconque.

1 Motivation géométrique

Les séries de Fourier sont construites pour tenir compte de la périodicité des fonctions (ou des distributions) de $\mathbf{R}^d$. À toute fonction continue (ou distribution) u on peut associer son ensemble de périodes Γ_u défini comme l'ensemble des vecteurs qui laisse u inchangé quand on translate u par eux. Γ_u est un sous-groupe fermé de $\mathbf{R}^d$.

On notera que si Γ_u n'est pas réduit au singleton zéro, u ne tend vers zéro en aucun sens. On peut quand même espérer considérer u comme une distribution tempérée et essayer d'analyser son comportement avec une transformée de Fourier. On observe alors que la transformée de Fourier de u est supportée dans $2\pi\,(\Gamma_u)^\star$ où $(\Gamma_u)^\star$ est le sous-groupe dual de Γ_u. On rappelle que si Γ est un sous-groupe de $\mathbf{R}^d$ on peut lui associer un sous-groupe dual $\Gamma^\star$ défini par [1]

$$\Gamma^\star := \left\{\, \xi \in \mathbf{R}^d\,; \quad (\forall x \in \Gamma,\ \xi \cdot x \in \mathbf{Z})\,\right\}$$

où $\cdot$ note le produit scalaire canonique. L'assertion sur le support provient du fait que si $\mathcal{F}$ note la transformée de Fourier et $x_0 \in \Gamma_u$, alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\cdot)\cdot x_0}\,\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u)$.

Un résultat classique montre que les sous-groupes fermés de $\mathbf{R}^d$ sont tous tels que dans une certaine base $\mathcal{B}$ ils s'écrivent $\mathbf{Z}^{d_1} \times \{0\}^{d_2} \times \mathbf{R}^{d-d_1-d_2}$ pour certains entiers naturels d_1, d_2 tels que $d_1 + d_2 \leq d$. Si Γ est donné comme cela, alors $\Gamma^\star$ est donné dans $\mathcal{B}'$, la base duale de $\mathcal{B}$, comme $\mathbf{Z}^{d_1} \times \mathbf{R}^{d_2} \times \{0\}^{d-d_1-d_2}$.

Si u n'est constante dans aucune direction, alors Γ_u admet une décomposition de cette nature avec $d_1 + d_2 = d$.

La logique des séries de Fourier est de construire directement un objet sur $(\Gamma_u)^\star$ plutôt qu'un objet sur $\mathbf{R}^d$ supporté par $(\Gamma_u)^\star$. Plus exactement on fixe un sous-groupe fermé Γ et aux fonctions u Γ-périodique, c'est-à-dire telles que $\Gamma \subset \Gamma_u$, on associe un objet sur $\Gamma^\star$.

Pour rendre plus concret le rôle de $\Gamma^\star$, associons à chaque élément ξ de $\mathbf{R}^d$ une fonction trigonométrique

$$\mathrm{e}_{(\xi)}\ :\quad \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}\,, \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi\,\xi\cdot x}\,.$$

et notons que $\mathrm{e}_{(\xi)}$ est Γ-périodique si et seulement si $\xi \in \Gamma^\star$.

1. Dans le cadre de l'analyse de Fourier, on peut vouloir incorporer un facteur 2π dans la définition de la dualité, en remplaçant $\mathbf{Z}$ par $2\pi\mathbf{Z}$.

2 Polynômes trigonométriques

Concentrons-nous désormais sur la dimension 1. Les sous-groupes fermés de $\mathbf{R}$ sont $\{0\}$, $\mathbf{R}$ et les $X\,\mathbf{Z}$ pour un $X > 0$, dont les sous-groupes duaux sont respectivement $\mathbf{R}$, $\{0\}$ et $X^{-1}\,\mathbf{Z}$. En dilatant l'espace par X on peut passer d'une période X à une période 1. On peut donc se contenter du cas $\mathbf{Z}$-périodique. Pour tout $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ de période 1, on définit ses coefficients de Fourier $(c_\xi(f))_{\xi\in\mathbf{Z}}$ par

$$c_\xi(f) := \int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\,\xi\,x}\, f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Le choix de $]0,1[$ comme domaine d'intégration est arbitraire, $[0,1[$ pouvant être remplacé par n'importe quel domaine fondamental pour l'action de $\mathbf{Z}$.
Quand f est un polynôme trigonométrique $\mathbf{Z}$-périodique, c'est-à-dire une combinaison linéaire de $\mathrm{e}_{(\xi)}$, $\xi \in \mathbf{Z}$, on vérifie que

$$f \;=\; \sum_{\xi\in\mathbf{Z}} c_\xi(f)\,\mathrm{e}_{(\xi)}$$

et que, pour tout $\xi \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned} c_\xi(f^{(k)}) &= \,(2\,\mathrm{i}\,\pi\,\xi)^k\, c_\xi(f)\,, \quad k \in \mathbf{N}\,,\\ c_\xi(f(\cdot + h)) &= \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi\,\xi\,h}\, c_\xi(f)\,, \quad h \in \mathbf{R}\,. \end{aligned}$$

Si f et g sont deux polynômes trigonométriques $\mathbf{Z}$-périodiques, on a, pour tout $\xi \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned} c_\xi(f\,g) &= \sum_{\xi'\in\mathbf{Z}} c_{\xi'}(f)\, c_{\xi-\xi'}(g)\,,\\ c_\xi(f \star_{\text{pér}} g) &= \,c_\xi(f)\, c_\xi(g)\,, \end{aligned}$$

où $f \star_{\text{pér}} g$ est défini par

$$(f \star_{\text{pér}} g)(x) \;:=\; \int_0^1 f(y)\,g(x-y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_0^1 f(x-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y\,, \qquad x \in \mathbf{R}\,.$$

Si f est un polynôme trigonométrique $\mathbf{Z}$-périodique et $g \in L^1(\mathbf{R})$, on a, pour tout $\xi \in \mathbf{Z}$,

$$c_\xi(f \star g) = \,c_\xi(f)\,\mathcal{F}(g)(2\pi\,\xi)\,,$$

où $\mathcal{F}$ note la transformée de Fourier, normalisée par

$$\mathcal{F}(g)(\eta) \;:= \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\eta\,x}\, g(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \eta \in \mathbf{R}\,.$$

Au passage, notons qu'avec cette convention de la transformée de Fourier, on a, pour tout polynôme trigonométrique $\mathbf{Z}$-périodique,

$$\mathcal{F}(f) \;=\; 2\pi \sum_{\xi\in\mathbf{Z}} c_\xi(f)\,\delta_{2\pi\,\xi}$$

où δ_{x_0} note la masse de Dirac en x_0.

3 Approximation trigonométrique

Toutes les propriétés ci-dessus s'étendent par densité à des fonctions plus générales. Pour ce faire il faut d'abord connaître la densité des polynômes trigonométriques. On peut être tenté d'obtenir celle-ci à partir de l'étude des séries partielles de Fourier, que l'on peut représenter comme une convolution

$$\sum_{\xi=-N}^{N} c_\xi(f)\,\mathrm{e}_{(\xi)} \;=\; D_N \star_{\text{pér}} f$$

avec le noyau appelé noyau de Dirichlet défini par

$$D_N(x) \;=\; \sum_{\xi=-N}^{N} \mathrm{e}_{(\xi)}(x) \;=\; \frac{\sin\left(\pi\,x\,(2N+1)\right)}{\sin\left(\pi\,x\right)}\,.$$

Malheureusement l'intégrale de D_N sur $]0,1[$ est 1 mais sa norme L^1 explose (comme un multiple de $\ln(N)$).

On obtient de meilleures propriétés de convergence (avec une démonstration plus facile) en considérant les moyennes de Cesàro de celles-ci, représentées comme une convolution par

$$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1}\sum_{\xi=-\ell}^{\ell} c_\xi(f)\,\mathrm{e}_{(\xi)} \;=\; \sum_{\xi=-N}^{N}\left(1-\frac{|\xi|}{N}\right) c_\xi(f)\,\mathrm{e}_{(\xi)} \;=\; F_N \star_{\text{pér}} f$$

avec un noyau appelé noyau de Fejér défini par

$$F_N(x) \;=\; \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1}\sum_{\xi=-\ell}^{\ell} \mathrm{e}_{(\xi)}(x) \;=\; \sum_{\xi=-N}^{N}\left(1-\frac{|\xi|}{N}\right)\mathrm{e}_{(\xi)}(x) \;=\; \frac{1}{N}\,\frac{\left(\sin\left(\pi\,x\,N\right)\right)^2}{\left(\sin\left(\pi\,x\right)\right)^2}\,.$$

On vérifie que F_N est une approximation de l'unité pour la convolution périodique de sorte que si f appartient à un espace fonctionnel sur lequel les translations agissent continûment $F_N \star_{\text{pér}} f$ converge vers f dans cet espace.

Le théorème de Dirichlet fournit lui pour tout $x \in \mathbf{R}$ des conditions assurant la convergence de $\sum_{\xi=-N}^{N} c_\xi(f)\,\mathrm{e}_{(\xi)}(x)$. Notons, cependant que f peut vérifier les conditions assurant une convergence en tout point (convergence simple) mais ne pas être continue, ce qui montre que la convergence n'est pas uniforme. Sous certaines hypothèses, le défaut de convergence peut être caractérisé comme la persistance d'oscillations d'amplitude fixe localisée de plus en plus proche des points de discontinuité. On parle de phénomène de Gibbs.

4 Espaces fonctionnels

Pour étendre par densité, il faut aussi étudier les propriétés de continuité.

On vérifie que si f est un polynôme trigonométrique $\mathbf{Z}$-périodique

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2(]0,1[)} \;&=\; \|(c_\xi(f))_{\xi\in\mathbf{Z}}\|_{\ell^2(\mathbf{Z})}\,,\\
\|f\|_{L^\infty(]0,1[)} \;&\leq\; \|(c_\xi(f))_{\xi\in\mathbf{Z}}\|_{\ell^1(\mathbf{Z})}\,,\\
\|(c_\xi(f))_{\xi\in\mathbf{Z}}\|_{\ell^\infty(\mathbf{Z})} \;&\leq\; \|f\|_{L^1(]0,1[)}\,,
\end{aligned}$$

ce qui implique aussi déjà des estimations d'erreur

$$\left\| f - \sum_{\xi=-N}^{N} c_\xi(f)\,\mathrm{e}_{(\xi)} \right\|_{L^2(]0,1[)} \leq \frac{1}{(2\pi\,(N+1))^k}\,\|f^{(k)}\|_{L^2(]0,1[)} \quad N\in\mathbf{N}^\star\,,\quad k\in\mathbf{N}\,.$$

On peut ainsi étendre toutes les propriétés ci-dessus par densité, les opérations étant entendues au sens des distributions.

Pour être précis, il faut définir des espaces de fonctions $\mathbf{Z}$-périodiques. Une manière simple de faire est de les identifier avec des espaces de fonctions sur $[0,1]$ vérifiant un certain nombre de conditions au bord de $[0,1]$. Mais la nature des conditions au bord à imposer dépend de l'espace fonctionnel choisi.

Donnons quelques exemples d'identification. Pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, on peut identifier l'espace des fonctions $\mathbf{Z}$-périodiques $\mathcal{C}^\ell$ sur $\mathbf{R}$ avec

$$\mathcal{C}^\ell_{\text{pér}}([0,1]) := \left\{ u \in \mathcal{C}^\ell([0,1])\,; \quad (\forall k \in [\![0,\ell]\!],\ u^{(k)}(0) = u^{(k)}(1)) \right\}.$$

L'égalité précédente s'étend au cas $\ell = \infty$.

Pour donner une caractérisation des fonctions $\mathbf{Z}$-périodiques dont les dérivées au sens des distributions d'ordre au plus ℓ appartiennent à $L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R})$, pour un certain $1 \leq p \leq \infty$, notons d'abord que si $\ell \in \mathbf{N}^*$, toute fonction dans $W^{\ell,p}(]0,1[)$ — l'espace des distributions sur $]0,1[$ dont les dérivées [2] jusqu'à l'ordre ℓ appartiennent à $L^p(]0,1[)$ — coïncide presque partout, et donc est identifiée, avec une fonction de $\mathcal{C}^{\ell-1}([0,1])$. Cela provient du fait qu'en dimension 1 les primitives des fonctions intégrables sont uniformément continues (et même absolument continues).

Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace des fonctions $\mathbf{Z}$-périodiques appartenant à $L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R})$ s'identifie avec $L^p_{\text{pér}}(]0,1[) = L^p(]0,1[)$, alors que pour $\ell \in \mathbf{N}^*$, $W^{\ell,p}(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ s'identifie avec

$$W^{\ell,p}_{\text{pér}}(]0,1[) := \left\{ u \in W^{\ell,p}(]0,1[)\,; \quad (\forall k \in [\![0,\ell-1]\!],\ u^{(k)}(0) = u^{(k)}(1)) \right\}.$$

Classiquement quand $p = 2$, on note H^ℓ pour $W^{\ell,2}$.

Les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}^\ell_{\text{pér}}([0,1])$, pour $\ell \in \mathbf{N}$, et dans $W^{\ell,p}_{\text{pér}}(]0,1[)$, pour tout $(\ell,p) \in \mathbf{N} \times [1,\infty[$. Ces espaces peuvent donc être aussi définis sans faire appel à la théorie des distributions comme complétés de l'espace des restrictions de polynômes trigonométriques pour leurs normes respectives.

On déduit, en particulier, que pour tout $(\ell,p) \in \mathbf{N} \times [1,2]$, tout $u \in W^{\ell,p}_{\text{pér}}(]0,1[)$ vérifie

- d'une part, pour tout $k \in [\![0,\ell]\!]$, $((2\mathrm{i}\pi\,\xi)^k\, c_\xi(u))_{\xi\in\mathbf{Z}} = (c_\xi(u^{(k)}))_{\xi\in\mathbf{Z}} \in \ell^{p'}(\mathbf{Z})$ où p' est l'exposant dual de p, c'est-à-dire que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$;
- d'autre part [3] $u \in \mathcal{C}^{\ell-1}_{\text{pér}}([0,1])$, et, si $p > 1$,

$$\lim_{N\to\infty} \left\| u - \sum_{\xi=-N}^{N} c_\xi(u)\,\mathrm{e}_{(\xi)} \right\|_{W^{\ell-1,\infty}(]0,1[)} = 0\,.$$

Dans l'autre direction, pour $(\ell,p) \in \mathbf{N} \times [1,2]$, si $(c_\xi)_{\xi\in\mathbf{Z}}$ est tel que pour tout $k \in [\![0,\ell]\!]$, $(|\xi|^k\, c_\xi(u))_{\xi\in\mathbf{Z}} \in \ell^p(\mathbf{Z})$, alors la série $\sum_{\xi\in\mathbf{Z}} c_\xi(u)\,\mathrm{e}_{(\xi)}$ converge normalement dans $W^{\ell,p'}_{\text{pér}}(]0,1[)$.

La caractérisation des espaces par les séries de Fourier n'est facile que pour [4] $\mathcal{C}^\infty_{\text{pér}}([0,1])$ et $H^\ell_{\text{pér}}([0,1])$.

2. Y compris la dérivée 0-ième.
3. Après identification modulo l'égalité presque partout.
4. Qui jouent le rôle respectivement de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et de $H^\ell(\mathbf{R})$ pour la transformée de Fourier.

Précisément, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}^{\infty}_{\text{pér}}([0,1]) &= \left\{ \sum_{\xi\in\mathbf{Z}} c_\xi \, \mathrm{e}_{(\xi)} \,; \quad (\forall m \in \mathbf{N},\ (|\xi|^m \, c_\xi)_{\xi\in\mathbf{Z}} \in \ell^\infty(\mathbf{Z})) \right\} \\
&= \left\{ \sum_{\xi\in\mathbf{Z}} c_\xi \, \mathrm{e}_{(\xi)} \,; \quad (\forall m \in \mathbf{N},\ (|\xi|^m \, c_\xi)_{\xi\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z})) \right\} , \\
H^{\ell}_{\text{pér}}([0,1]) &= \left\{ \sum_{\xi\in\mathbf{Z}} c_\xi \, \mathrm{e}_{(\xi)} \,; \quad ((1+|\xi|)^\ell \, c_\xi)_{\xi\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z}) \right\} \\
&= \left\{ \sum_{\xi\in\mathbf{Z}} c_\xi \, \mathrm{e}_{(\xi)} \,; \quad ((1+|\xi|^2)^{\frac{\ell}{2}} \, c_\xi)_{\xi\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z}) \right\} ,
\end{aligned}
$$

avec, pour tout $u \in H^{\ell}_{\text{pér}}([0,1])$, pour tout $k \in [\![0,\ell]\!]$, $(c_\xi(u^{(k)}))_{\xi\in\mathbf{Z}} = ((2\mathrm{i}\pi\,\xi)^k \, c_\xi(u))_{\xi\in\mathbf{Z}}$ et

$$
\|u^{(k)}\|_{L^2(]0,1[)} \;=\; \|((2\mathrm{i}\pi\,\xi)^k \, c_\xi(u))_{\xi\in\mathbf{Z}}\|_{\ell^2(\mathbf{Z})} \,.
$$

5 Périodisation

L'un des intérêts principaux des séries de Fourier est qu'elle transforme les dérivées en multiplication. C'est particulièrement utile pour résoudre des équations aux dérivées partielles. Notons cependant que lorsque l'on résout dans l'un des espaces mentionnés ci-dessus on ajoute aux équations des conditions aux bords.

Un exemple classique où ces conditions sont ajoutées artificiellement et donc introduisent des erreurs est celui où l'on souhaiterait résoudre avec des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ en partant d'une donnée à support compact mais où l'on calcule des approximations en résolvant un problème $X\mathbf{Z}$-périodique avec $X \gg 1$. Dans ce dernier cas, quand les équations sous-jacentes possèdent la propriété de propagation à vitesse finie, on montre qu'il n'y a en fait pas d'erreur d'approximation en temps suffisamment court. Autrement, on peut se retrouver à manipuler des périodisations de fonctions dont le support est plus grand qu'un domaine fondamental.

Faisons quelques commentaires sur ces périodisations. Pour simplifier la discussion considérons $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dans la classe de Schwartz, c'est-à-dire que f et toutes ses dérivées décroissent plus vite que les polynômes. Il en est alors de même de sa transformée de Fourier. Considérons $f_{\text{pér}}$ la périodisation $\mathbf{Z}$-périodique de f

$$
f_{\text{pér}}(x) := \sum_{x_0\in\mathbf{Z}} f(x+x_0) \,.
$$

Alors pour tout $\xi \in \mathbf{Z}$

$$
c_\xi(f_{\text{pér}}) \;=\; \mathcal{F}(f)(2\pi\xi)
$$

ce qui implique pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$
\sum_{x_0\in\mathbf{Z}} f(x+x_0) \;=\; \sum_{\xi\in\mathbf{Z}} \mathcal{F}(f)(2\pi\,\xi)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,\xi\,x} \,.
$$

Évaluer en $x = 0$, cette formule est appelée formule sommatoire de Poisson et est couramment utiliser pour calculer des sommes de séries. Elle peut être écrite de manière duale comme

$$
\mathcal{F}\left(\sum_{x_0\in\mathbf{Z}} \delta_{x_0} \right) \;=\; \sum_{\xi\in\mathbf{Z}} \delta_{2\pi\xi} \,.
$$