Université de Rennes 1 2020-2021
Agrégation externe

Compléments sur la discrétisation
des séries de Fourier

Miguel Rodrigues

Ces notes de cours sont consacrées à la discrétisation de l'analyse de Fourier. Une partie du matériel discuté ici peut être trouvé dans les livres classiques d'analyse numérique en général [Fil13, Sch04].

1 Quelques rappels

On s'intéresse ici à l'analyse en séries de Fourier. Celle-ci est construite pour l'étude de fonctions (ou de distributions) sur [1] $\mathbf{R}^d$ admettant un réseau $\Gamma \subset \mathbf{R}^d$ comme ensemble de périodes. Alternativement ces fonctions (ou distributions) peuvent être vues commes des fonctions (ou des distributions) sur $\mathbf{R}^d/\Gamma$, qui est une variété compacte. Pour ne pas travailler sur une variété, on peut vouloir choisir une base $\mathcal{B}$ de Γ et un domaine fondamental associé Ω puis considérer les fonctions (ou les distributions) sur $\mathbf{R}^d/\Gamma$ comme des fontions sur $\mathring{\Omega}$ vérifiant un certain nombre de combitions au bord de Ω, assurant la compatibilité avec l'identification des bords de Ω sous l'action de Γ. Mais la nature des conditions au bord à imposer dépend de l'espace fonctionnel choisi.
Les séries de Fourier associées sont définies commes des fonctions sur $\Gamma^\star$ le réseau dual de Γ, c'est-à-dire [2]

$$\Gamma^\star := \left\{ \xi \in \mathbf{R}^d ; \quad (\forall x \in \Gamma,\ \xi \cdot x \in \mathbf{Z}) \right\}$$

où $\cdot$ note le produit scalaire canonique. En dimension 1, Γ prend la forme $X\,\mathbf{Z}$ pour un certain $X > 0$ et alors $\Gamma^\star = (1/X)\,\mathbf{Z}$. À chaque élément ξ de $\Gamma^\star$ est associé une fonction sur $\mathbf{R}^d/\Gamma$ à valeurs complexes,

$$\mathrm{e}_{(\xi)} : \quad \mathbf{R}^d/\Gamma \to \mathbf{C}, \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi\,\xi\cdot x}.$$

On définit alors pour tout $f \in L^1(\mathbf{R}^d/\Gamma)$, ses coefficients de Fourier $(c_\xi(f))_{\xi\in\Gamma^\star}$ par

$$c_\xi(f) := \frac{1}{|\mathbf{R}^d/\Gamma|} \int_{\mathbf{R}^d/\Gamma} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\,\xi\cdot x}\, f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2\pi\,\xi\cdot x}\, f(x)\,\mathrm{d}x$$

où Ω est n'importe quel domaine fondamental associé à Γ.
Par une transformation linéaire on peut se ramener au cas où $\Gamma = \mathbf{Z}^d$, et donc $\Gamma^\star = \mathbf{Z}^d$. Dans la suite on se restreindra aux fonctions scalaires — le cas général se déduisant en appliquant les résultats coordonnée par coordonnée —, à la dimension 1 — la dimension supérieure admettant un traitement analogue — et au cas où $\Gamma = \mathbf{Z}$.
Donnons quelques exemples d'identification d'espaces de fonctions sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ avec des espaces de fonctions sur $]0,1[$. Pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, on peut identifier $\mathcal{C}^\ell(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ avec

$$\mathcal{C}^\ell_{\text{pér}}([0,1]) := \left\{ u \in \mathcal{C}^\ell([0,1]) ; \quad (\forall k \in [\![0,\ell]\!],\ u^{(k)}(0) = u^{(k)}(1)) \right\}.$$

1. A priori à valeurs dans un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie.
2. Dans le cadre de l'analyse de Fourier, on peut vouloir incorporer un facteur 2π dans la définition de la dualité, en remplaçant $\mathbf{Z}$ par $2\pi\mathbf{Z}$.

L'égalité précédente s'étend au cas $\ell = \infty$. Pour donner une caractérisation de $W^{\ell,p}(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$, $1 \leq p \leq \infty$, notons d'abord que si $\ell \in \mathbf{N}^*$, toute fonction dans $W^{\ell,p}(]0,1[)$ — l'espace des distributions sur $]0,1[$ dont les dérivées [3] jusqu'à l'ordre ℓ appartiennent à $L^p(]0,1[)$ — coïncide presque partout, et donc est identifiée, avec une fonction de $\mathcal{C}^{\ell-1}([0,1])$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ s'identifie avec $L^p_{\text{pér}}(]0,1[) = L^p(]0,1[)$, alors que pour $\ell \in \mathbf{N}^*$, $W^{\ell,p}(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ s'identifie avec

$$W^{\ell,p}_{\text{pér}}(]0,1[) := \left\{ u \in W^{\ell,p}(]0,1[)\,; \quad (\forall k \in [\![0,\ell-1]\!],\ u^{(k)}(0) = u^{(k)}(1)) \right\}.$$

Classiquement quand $p = 2$, on note H^ℓ pour $W^{\ell,2}$.

Les fonctions trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}^\ell_{\text{pér}}([0,1])$, pour $\ell \in \mathbf{N}$, et dans $W^{\ell,p}_{\text{pér}}(]0,1[)$, pour tout $(\ell,p) \in \mathbf{N} \times [1,\infty[$. On déduit, en particulier, que pour tout $(\ell,p) \in \mathbf{N} \times [1,2]$, tout $u \in W^{\ell,p}_{\text{pér}}(]0,1[)$ vérifie

- d'une part, pour tout $k \in [\![0,\ell]\!]$, $((2\mathrm{i}\pi\,\xi)^k\, c_\xi(u))_{\xi\in\mathbf{Z}} = (c_\xi(u^{(k)}))_{\xi\in\mathbf{Z}} \in \ell^{p'}(\mathbf{Z})$ où p' est l'exposant dual de p, c'est-à-dire que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$;
- d'autre part [4] $u \in \mathcal{C}^{\ell-1}_{\text{pér}}([0,1])$, et, si $p > 1$,

$$\lim_{N\to\infty} \left\| u - \sum_{\xi=-N}^{N} c_\xi(u)\, \mathrm{e}_{(\xi)} \right\|_{W^{\ell-1,\infty}(]0,1[)} = 0\,.$$

Dans l'autre direction, pour $(\ell,p) \in \mathbf{N}\times[1,2]$, si $(c_\xi)_{\xi\in\mathbf{Z}}$ est tel que pour tout $k \in [\![0,\ell]\!]$, $(|\xi|^k\, c_\xi(u))_{\xi\in\mathbf{Z}} \in \ell^p(\mathbf{Z})$, alors la série $\sum_{\xi\in\mathbf{Z}} c_\xi(u)\, \mathrm{e}_{(\xi)}$ converge normalement dans $W^{\ell,p'}_{\text{pér}}(]0,1[)$.

Une étude plus fine, basée sur la réécriture

$$\sum_{\xi=-N}^{N} c_\xi(u)\, \mathrm{e}_{(\xi)}(x) = (D_N \star u)(x)$$

pour un certain noyau de convolution D_N appelé noyau de Dirichlet, permet de localiser les conditions assurant la convergence en un point précis (théorème de Dirichlet). Notons, cependant que u peut vérifier les conditions assurant une convergence en tout point (convergence simple) mais ne pas appartenir à $\mathcal{C}^0_{\text{pér}}([0,1])$ de sorte que la convergence n'est pas uniforme. Sous certaines hypothèses, le défaut de convergence peut être caractérisé comme la persistence d'oscillations d'amplitude fixe localisée de plus en plus proche des points de discontinuité. On parle de phénomène de Gibbs.

La caractérisation des espaces par les séries de Fourier n'est facile que pour [5] $\mathcal{C}^\infty_{\text{pér}}([0,1])$ et $H^\ell_{\text{pér}}([0,1])$. Précisément, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^\infty_{\text{pér}}([0,1]) &= \left\{ \sum_{\xi\in\mathbf{Z}} c_\xi\, \mathrm{e}_{(\xi)}\,; \quad (\forall m \in \mathbf{N},\ (|\xi|^m\, c_\xi)_{\xi\in\mathbf{Z}} \in \ell^\infty(\mathbf{Z})) \right\} \\
&= \left\{ \sum_{\xi\in\mathbf{Z}} c_\xi\, \mathrm{e}_{(\xi)}\,; \quad (\forall m \in \mathbf{N},\ (|\xi|^m\, c_\xi)_{\xi\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z})) \right\}, \\
H^\ell_{\text{pér}}([0,1]) &= \left\{ \sum_{\xi\in\mathbf{Z}} c_\xi\, \mathrm{e}_{(\xi)}\,; \quad ((1+|\xi|)^\ell\, c_\xi)_{\xi\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z}) \right\} \\
&= \left\{ \sum_{\xi\in\mathbf{Z}} c_\xi\, \mathrm{e}_{(\xi)}\,; \quad ((1+|\xi|^2)^{\frac{\ell}{2}}\, c_\xi)_{\xi\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z}) \right\},
\end{aligned}$$

3. Y compris la dérivée 0-ième.
4. Après identification modulo l'égalité presque partout.
5. Qui jouent le rôle respectivement de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et de $H^\ell(\mathbf{R})$ pour la transformée de Fourier.

avec, pour tout $u \in H^{\ell}_{\text{pér}}([0,1])$, pour tout $k \in [\![0,\ell]\!]$, $(c_\xi(u^{(k)}))_{\xi\in\mathbf{Z}} = ((2\mathrm{i}\pi\,\xi)^k\,c_\xi(u))_{\xi\in\mathbf{Z}}$ et

$$\|u^{(k)}\|_{L^2(]0,1[)} \;=\; \|((2\mathrm{i}\pi\,\xi)^k\,c_\xi(u))_{\xi\in\mathbf{Z}}\|_{\ell^2(\mathbf{Z})}\,.$$

L'un des intérêts principaux des séries de Fourier est qu'elle transforme les dérivées en multiplication. C'est particulièrement utile pour résoudre des équations aux dérivées partielles. Notons cependant que lorsque l'on résout dans l'un des espaces mentionnés ci-dessus on ajoute aux équations des conditions aux bords. Un exemple classique où ces conditions sont ajoutées artificiellement et donc introduisent des erreurs est celui où l'on souhaiterait résoudre avec des fonctions défnies sur $\mathbf{R}$ en partant d'une donnée à support compact mais où l'on calcule des approximations en résolvant dans $\mathbf{R}/X\mathbf{Z}$ avec $X \gg 1$. Dans ce dernier cas, quand les équations sous-jacentes possèdent la propriété de propragation à vitesse finie, on montre qu'il n'y a en fait pas d'erreur d'approxiation en temps suffisamment court.

2 Transformée de Fourier discrète

Pour calculer des approximations numériques, il faut discrétiser la définition des coefficients de Fourier. Un moyen de procéder est de considérer une transformée de Fourier discrète sur $(m^{-1}\mathbf{Z})/\mathbf{Z}$ où $m \in \mathbf{N}^*$. Évidemment $(m^{-1}\mathbf{Z})/\mathbf{Z}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, mais l'on pense $(m^{-1}\mathbf{Z})/\mathbf{Z}$ comme une approximation de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ dans la limite $m \to \infty$. Exprimé en terme de domaine fondamental, on approche $[0,1[$ par

$$\left\{ \frac{j}{m}\,;\quad j \in [\![0, m-1]\!] \right\}.$$

En procédant ainsi, on bénéficie de deux aspects incompatibles au niveau continu. D'une part on garde les bonnes propriétés d'isomètrie ℓ^2 associées aux fait que l'on manipule une transformée de Fourier, d'autre part puisque la mesure sous-jacente est discrète on résout de fait des problèmes d'interpolation (trigonométrique en l'occurrence).
Cela induit aussi une discrétisation du côté de Fourier. Pour établir des liens avec un point de vue plus algébrique, il peut être bon d'identifier les polynômes trigonométriques avec des fonctions sur le cercle

$$\mathbf{S}^1 := \left\{ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,\theta}\,;\quad \theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z} \right\}.$$

La transformée de Fourier discrète sur $(m^{-1}\mathbf{Z})/\mathbf{Z}$ construit alors une fonction polynomiale sur l'ensemble des racines m-ièmes de l'unité

$$\mathbf{U}_m := \left\{ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,j}\,;\quad j \in (m^{-1}\mathbf{Z})/\mathbf{Z} \right\} = \left\{ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,\frac{j}{m}}\,;\quad j \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \right\}.$$

Notons que c'est en fait un élément de $\mathbf{C}[X]/(X^m-1)$ qui est ainsi construit, ou de manière équivalente un élément de $\mathbf{C}_{m-1}[X]$, ce que nous ferons ci-dessous.
Concrêtement cela amène à considérer

$$\mathcal{F}_m : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m, \quad (f_0,\cdots,f_{m-1}) \longmapsto \left(\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f_j\,e^{-\mathrm{i}k\,2\pi\,\frac{j}{m}} \right)_{k\in[\![0,m-1]\!]}$$

et

$$\mathcal{G}_m : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m, \quad (c_0,\cdots,c_{m-1}) \longmapsto \left(\sum_{k=0}^{m-1} c_k\,e^{\mathrm{i}k\,2\pi\,\frac{j}{m}} \right)_{j\in[\![0,m-1]\!]}$$

qui sont inverses l'une de l'autre. En particulier, cela montre que, pour tout $(f_0, \cdots, f_{m-1}) \in \mathbf{C}^m$, il existe un unique $(c_0, \cdots, c_{m-1}) \in \mathbf{C}^m$ tel que $P := \sum_{k=0}^{m-1} c_k \, \mathrm{e}_{(k)}$ vérifie, pour tout $j \in [\![0, m-1]\!]$, $P\left(\frac{j}{m}\right) = f_j$. Par ailleurs, si $(c_0, \cdots, c_{m-1}) = \mathcal{F}_m((f_0, \cdots, f_{m-1}))$, alors

$$\|(c_0, \cdots, c_{m-1})\|_{\ell^2([\![0,m-1]\!])} = \frac{1}{\sqrt{m}} \|(f_0, \cdots, f_{m-1})\|_{\ell^2([\![0,m-1]\!])} .$$

Notez que les formules directes et inverses sont plus symétriques que dans le cas continu, et que les formules discrètes pour les coefficients correspondent à une discrétisation par la méthode des rectangles à gauche [6] des formules continues.

Pour établir un comparaison entre les cas discrets et continus, le point de vue polynomial n'est pas adapté. Il faut étendre les formules de coefficients à $\mathbf{Z}$. Pour $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}([0,1])$ définissons pour tout tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$c_k^{(m)}(f) := \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f\left(\frac{j}{m}\right) e^{-\mathrm{i}\, 2\pi\, k \frac{j}{m}} .$$

et observons que pour tout $\ell \in \mathbf{Z}$, on a $c_{k+\ell m}^{(m)}(f) = c_k^{(m)}(f)$. En particulier, pour tout $\ell \in \mathbf{Z}$, la fonction $P := \sum_{k=\ell}^{m+\ell-1} c_k^{(m)}(f) \, \mathrm{e}_{(k)}$ vérifie, pour tout $j \in [\![0, m-1]\!]$, $P\left(\frac{j}{m}\right) = f\left(\frac{j}{m}\right)$. On définit alors les approximations

$$P_{(m)}(f) := \sum_{k=-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{m-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1} c_k^{(m)}(f) \, \mathrm{e}_{(k)} .$$

Par ailleurs, en comparant les deux formules d'inversion de Fourier, on déduit que pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$c_k^{(m)}(f) = \sum_{\ell \in k + m\mathbf{Z}} c_\ell(f) = c_k(f) + \sum_{\ell \in k + m\mathbf{Z}^*} c_\ell(f) .$$

On déduit les résultats d'approximation suivants. Rappelons qu'ils peuvent être vus comme des résultats sur les erreurs d'interpolation trigonométriques.

Proposition 1

1. *Si u est tel que $((1+|\xi|)^\ell \, c_{(\xi)}(u))_{\xi \in \mathbf{Z}} \in \ell^1(\mathbf{Z})$, par exemple si $u \in W^{\ell+1,p}_{pér}(]0,1[)$ avec $1 < p \leq \infty$, alors pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, pour tout $k \in [\![0, \ell]\!]$,*

$$\left\| u^{(k)} - (P_{(m)}(u))^{(k)} \right\|_{L^\infty(]0,1[)} \leq \frac{2}{(\pi\, m)^{\ell-k}} \sum_{|j| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} |c_j(u^{(\ell)})| \overset{m \to \infty}{=} o(m^{-(\ell-k)}) .$$

2. *Pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, il existe C_ℓ tel que si u est tel que $((1+|\xi|)^{\ell+1} \, c_{(\xi)}(u))_{\xi \in \mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z})$, c'est-à-dire si $u \in H^{\ell+1}_{pér}(]0,1[)$, alors pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, pour tout $k \in [\![0, \ell]\!]$,*

$$\left\| u^{(k)} - (P_{(m)}(u))^{(k)} \right\|_{L^2(]0,1[)} \leq \frac{C_\ell}{m^{1+\ell-k}} \sqrt{\sum_{|j| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} |c_j(u^{(\ell+1)})|^2} \overset{m \to \infty}{=} o(m^{-(1+\ell-k)}) .$$

Un corollaire assez direct est que la méthode de quadrature des trapèzes est d'ordre ∞ pour des intégrandes $u \in \mathcal{C}^\infty_{\text{pér}}([0,1])$. On parle de précision spectrale.

6. En fait, dans le cas où $f \in \mathcal{C}^0_{\text{pér}}([0,1])$, cela coïncide avec une discrétisation par la méthode des rectangles à droite, ou par une discrétisation par la méthode des trapèzes.

3 Calcul rapide

Un calcul naïf de $\mathcal{F}_m$ ou de $\mathcal{G}_m$ requerrait $\mathcal{O}(m^2)$ opérations. Une des raisons du succès de l'utilisation des transformées de Fourier discrète est qu'il existe un algorithme, appelé *Fast Fourier Transform* (FFT) en anglais. On trouve des traces d'un tel agorithme dès les travaux de Gauss, mais c'est un article de James Cooley et John Tukey, publié en 1965, qui l'a popularisé. Il permet un calcul en $\mathcal{O}(m\,\log(m))$ opérations.

Il s'agit d'un algorithme récursif, illustrant le principe d'algorithmique dit *diviser pour régner*. Le cas le plus favorable et le plus facile à analyser est celui où m est une puissance de 2. Nous ne discuterons donc que ce cas là qui est basé sur le fait que quand m est pair on peut se ramener essentiellement au calcul de deux transformations de Fourier discrète $\mathcal{F}_{m/2}$ combiné avec $\mathcal{O}(m)$ opérations.

En effet si m est pair on observe que, pour $k \in [\![0, m-1]\!]$,

$$\begin{aligned} c_{2k}^{(m)}(f) &= \mathcal{F}_m\left(\left(f\Big(\frac{j}{m}\Big)\right)_{0\leq j\leq m-1}\right)(2k) \\ &= \mathcal{F}_{m/2}\left(\left(\frac{1}{2}\left(f\Big(\frac{j}{m}\Big)+f\Big(\frac{\frac{m}{2}+j}{m}\Big)\right)\right)_{0\leq j\leq \frac{m}{2}-1}\right)(k) \\ &= c_k^{(m/2)}\left(\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{\cdot}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}+\frac{\cdot}{2}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{2k+1}^{(m)}(f) &= \mathcal{F}_m\left(\left(f\Big(\frac{j}{m}\Big)\right)_{0\leq j\leq m-1}\right)(2k+1) \\ &= \mathcal{F}_{m/2}\left(\left(\frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}\,2\pi\,\frac{j}{m}}\left(f\Big(\frac{j}{m}\Big)-f\Big(\frac{\frac{m}{2}+j}{m}\Big)\right)\right)_{0\leq j\leq \frac{m}{2}-1}\right)(k) \\ &= c_k^{(m/2)}\left(\frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}\,2\pi\,\cdot}\left(f\left(\frac{\cdot}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}+\frac{\cdot}{2}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Ainsi si $m = 1$ le calcul est immédiat, et si m est une puissance de 2 non triviale, on doit calculer les valeurs de $\left(\frac{1}{2}\left(f\Big(\frac{j}{m}\Big)+f\Big(\frac{\frac{m}{2}+j}{m}\Big)\right)\right)_{0\leq j\leq \frac{m}{2}-1}$ et de $\left(\frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}\,2\pi\,\frac{j}{m}}\left(f\Big(\frac{j}{m}\Big)-f\Big(\frac{\frac{m}{2}+j}{m}\Big)\right)\right)_{0\leq j\leq \frac{m}{2}-1}$ puis leurs transformées de Fourier discrète de paramètre $m/2$. Ainsi *in fine* il y a $J = \log(m)/\log(2)$ étapes et, à l'étape $j \in [\![0, J-1]\!]$, il y a 2^j séries de calcul de $\mathcal{O}(m/2^j)$ opérations à effectuer. Cela donne le coût en $\mathcal{O}(m\,\log(m))$ opérations.

L'algorithme est implémenté dans tous les logiciels de calcul, notamment dans `Scilab`[7] mais son utilisation présente un certain nombre de chausse-trappes. La première est que ce qui est calculé est[8] $(m \times c_{k-1}^{(m)}(f))_{1\leq k\leq m}$. Par ailleurs il est important d'observer que d'une point de vue des applications à la résolution des équations aux dérivées partielles c'est $(c_k^{(m)}(f))_{-m/2\leq k\leq m/2-1}$ qui nous intéresse et c'est sur cette suite de coefficients qu'il faut appliquer les multiplicateurs de Fourier adéquats. Ce point est suffisamment important pour qu'il existe une commande[9] `Scilab` qui applique le recentrage nécessaire.

Références

[Fil13] F. Filbet. *Analyse numérique - Algorithme et étude mathématique.* Dunod, 2013.

[Sch04] M. Schatzman. *Analyse numérique.* Dunod, 2004.

7. Voir `https://help.scilab.org/docs/5.3.1/fr_FR/fft.html`
8. Notez le décalage dans l'indexation, qui commence à 1, et le facteur m.
9. Voir `https://help.scilab.org/docs/5.3.1/fr_FR/fftshift.html`