Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
M2 Agrégation Externe

17 octobre 2022

Algorithme de Gauss et loi d'inertie de Sylvester, orthogonalisation de Gram-Schmidt

1 Algorithme de Gauss et loi d'inertie de Sylvester

Exercice 1 Déterminer la signature des formes quadratiques suivantes.

1. $q_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + xz + yz$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. $q_2(x, y, z, t) = xy + yz + 2zt + tx$, $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 Montrer que les applications suivantes sont des formes quadratiques et calculer leur signature.

1. $q_1 : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto (\operatorname{tr} A)^2$.
2. $q_2 : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \operatorname{tr}(A^t A)$.
3. $q_3 : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \operatorname{tr}(A)^2$.
4. $q_4 : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \operatorname{tr}(SAA^t)$ où S est une matrice symétrique.

Exercice 3 Étudier les extrémums locaux et globaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Exercice 4 Déterminer la nature, les éléments caractéristiques et une équation réduite des coniques suivantes :

1. $x^2 - xy + y^2 = 1$,
2. $x^2 + \sqrt{3}xy + x - 2 = 0$,
3. $x^2 + y^2 + 2xy + 4y = 1$,

Exercice 5 Soit un polynôme $P = X^n - a_1 X^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n \in \mathbb{R}[x]$. On note $x_1, \ldots, x_n$ ses racines dans $\mathbb{C}$. On introduit les sommes de Newton $N_i = \sum_{j=1}^n x_j^i$ et la matrice de Bézout associée :

$$B = \begin{pmatrix} N_0 & N_1 & \ldots & N_{n-1} \\ N_1 & & \ldots & N_n \\ \vdots & & & \vdots \\ N_{n-1} & & \ldots & N_{2n-2} \end{pmatrix}$$

dont on pourra écrire les coffecients $b_{i,j} = N_{i+j-2}$.

Montrer que la signature de B donne le nombre de racines réelles distinctes de P.

2 Gram-Schmidt

Exercice 6 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$. On note A la matrice du produit scalaire dans cette base.

1. Ecrire matriciellement l'orthonormalisation de Gram-Schmidt de $\mathcal{B}$.
2. En déduire que $A = CC^T$ avec C triangulaire inférieure (décomposition de Cholesky).

Exercice 7 Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ et $U = (1, \dots, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne standard.

Déterminer la projection orthogonale de Y sur $\mathrm{Vect}(U, X)$. Interpréter.

Exercice 8 Déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - a - bt)^2 dt$$

Exercice 9 Soient a, b deux réels et $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction à valeurs strictement positives. Sur $C([a, b], \mathbb{R})$, on définit le produit scalaire $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)dt$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire Q_n de degré n, de coefficient dominant positif, orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Montrer que Q_n possède n racines réelles distinctes dans $[a, b]$.

Exercice 10

Sur $C([-1, 1], \mathbb{R})$, on définit le produit scalaire $(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.

On pose

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n((x^2 - 1))^n}{dx^n}$$

1. Déterminer P_0, P_1, P_2, P_3.
2. Montrer que P_n est de degré n et orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Montrer que (P_n) est une famille orthogonale.
4. Déterminer l'orthonormalisation de Gram-Schmidt de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}[X]$.