

---

Appendice aux compléments sur l'interpolation polynomiale

Miguel Rodrigues

---

Ce texte se veut un bref complément aux notes de Benjamin Boutin sur l'interpolation polynomiale.

La première remarque est que de l'estimation universelle de la constante de Lebesgue on déduit par le principe de la borne uniforme que pour tout choix de famille de nœuds dans un segment donné, il existe une fonction continue telle que la suite de polynômes d'interpolation associée soit non bornée.

Pour espérer de la convergence  $\mathcal{C}^0$ , il faut disposer de plus de régularité. Des estimations utiles à cela sont fournies ci-dessous (avec des démonstrations voire des énoncés différents de ceux dans les références).

**Lemme 1** Soit  $a < b$  et  $f$  développable en séries entières en  $\frac{a+b}{2}$  avec un rayon de convergence  $R > \frac{b-a}{2}$ . Alors pour tout  $\frac{b-a}{2} < r < R$ , il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in [a, b], \quad \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leq \frac{C}{\left(r - \frac{b-a}{2}\right)^n}.$$

*Démonstration.* Notons également  $f$  le prolongement holomorphe de  $f$  à  $B\left(\frac{a+b}{2}, R\right)$  et  $\gamma_r$  une courbe simple paramétrant dans le sens direct le bord de  $B\left(\frac{a+b}{2}, R\right)$ . Alors pour tout  $x \in [a, b]$ , pour tout  $n$

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz$$

avec pour tout  $z \in \gamma_r$ ,

$$|z-x| \geq r - \frac{b-a}{2}.$$

D'où le résultat avec

$$C = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r - \frac{b-a}{2}} \int_{\gamma_r} |f(z)| |dz|.$$

■

**Lemme 2** Soit  $a < b$ ,  $N \in \mathbf{N}^*$  et  $f \in \mathcal{C}^N([a, b])$ . Alors il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \inf_{P \in \mathbf{R}_n[X]} \|f - P\|_{L^\infty([a, b])} \leq \frac{C}{n^{N-\frac{1}{2}}}.$$

La borne est sous-optimale d'un facteur  $\sqrt{n}$ , parce que pour fournir un argument rapide on utilise l'identité de Parseval et donc profite de la norme  $\|f^{(N)}\|_{L^2([a, b])}$  mais pas de  $\|f^{(N)}\|_{L^\infty([a, b])}$ . L'estimation resterait vraie sous l'hypothèse  $f \in H^N([a, b])$  (espace de Sobolev  $L^2$ ). Une estimation plus fine passe par l'étude plus fastidieuse d'un noyau de convolution.

Le lemme permet de prouver le théorème de Weierstrass.

*Démonstration.* En multipliant les développements de Taylor adéquats par des fonctions de troncature puis en rendant paire puis périodique, on obtient  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^N$ ,  $2\pi$ -périodique et paire telle que pour  $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

$$g(\theta) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\sqrt{2}\cos(\theta)\right).$$

Il suffit de montrer la borne  $L^\infty$  sur la différence entre  $g$  et un polynôme en  $\cos(\cdot)$ . Or il découle des formules trigonométriques classiques que pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,  $\cos(k \cdot)$  est un polynôme réel en  $\cos(\cdot)$  de degré  $k$  (les polynômes associés sont appelés polynômes de Tchebychev).

Introduisons les coefficients de Fourier de  $g$

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad c_k(g) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} g(x) dx.$$

Comme  $g$  est paire et réelle, ses coefficients de Fourier sont réels et pairs en  $k$  donc sa série de Fourier à un ordre  $n$

$$S_n(g) := \sum_{k=-n}^n c_k(g) e^{ik \cdot} = c_0(g) + \sum_{k=1}^n c_k(g) \cos(k \cdot)$$

est un polynôme réel en  $\cos(\cdot)$  de degré au plus  $n$ . De plus on a pour tout  $n$

$$\begin{aligned} \|g - S_n(g)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} &\leq \sum_{|k| \geq n+1} |c_k(g)| \\ &\leq \sqrt{\sum_{|k| \geq n+1} \frac{1}{|k|^{2N}}} \times \sqrt{\sum_{k \in \mathbf{Z}} |k|^{2N} |c_k(g)|^2} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{\int_n^\infty \frac{dx}{x^{2N}}} \times \sqrt{\sum_{k \in \mathbf{Z}} |c_k(g^{(N)})|^2} \\ &\leq \frac{\|g^{(N)}\|_{L^2([-\pi, \pi])}}{\sqrt{\pi(2N-1)}} \frac{1}{n^{N-\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

■