Compléments d'Analyse

Isabelle Gruais
Université de Rennes 1

2 décembre 2021

Introduction

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

Dans la suite $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sauf cas particulier où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.1 Forme sesquilinéaire et produit scalaire

Définition 1.1.1. Une application $f : E \to F$ entre deux ev sur $\mathbb{C}$ est antilinéaire si

1. $\forall x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$,
2. $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.

Définition 1.1.2. Soit E un ev sur $\mathbb{K}$.

1. On appelle forme sesquilinéaire (à droite) sur $\mathbb{K}$ toute application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant. :
   (a) f est linéaire à gauche, i.e. $\forall y \in E$, $x \mapsto f(x, y)$ est linéaire ;
   (b) f est antilinéaire à droite , i.e. $\forall x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ est antilinéaire

   Par convention, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire est bilinéaire.
2. Une forme sesquilinéaire f est hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, resp. symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si en outre $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$, resp. $f(x, y) = f(y, x)$, $\forall x, y \in E$.

Proposition 1.1.1. *Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire, alors : $\forall x, y \in E$,*

$$\varphi(x + y, x + y) + \varphi(x - y, x - y) = 2\varphi(x, x) + 2\varphi(y, y).$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$. On a

$$\varphi(x + y, x + y) = \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y),$$

$$\varphi(x - y, x - y) = \varphi(x, x) - \varphi(x, y) - \varphi(y, x) + \varphi(y, y),$$

$\square$

Proposition 1.1.2. *Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire, alors : $\forall x, y \in E$,*

1. $\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) = 2\varphi(x, y) + 2\varphi(y, x)$.

2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* φ *symétrique :* $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = 4\varphi(x, y)$.
3. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *et* φ *hermitienne :* $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy) = 4\varphi(x, y)$.

Démonstration. Soit $x, y \in E$.

1. On a

$$\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y) + \\ -\varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) - \varphi(y, y).$$

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on utlise ce qui précède avec $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors, en notant $\mathbb{U}_4$ le groupe des racines quatrièmes de 1 : $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$ et on est ramené à calculer $\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x+\zeta y, x+\zeta y)$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x+\zeta y, x+\zeta y) &= \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x, x) + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} |\zeta|^2\varphi(x, y) + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta^2\varphi(y, x) \\ &\quad + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(y, y) \\ &= 4\varphi(x, y).\end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.3. *Soit* φ *une forme sesquilinéaire sur un ev* E *sur* $\mathbb{C}$. *Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. φ *est hermitienne.*
2. $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Si φ est hermitienne, alors $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)} \Rightarrow \varphi(x, x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$.

Inversement, on suppose que $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$. On pose : $\forall x, y \in E$, $\Phi(x, y) = \varphi(x, y) - \overline{\varphi(y, x)}$. Alors Φ est sesquilinéaire et $\Phi(x, x) = 0$, $\forall \in E$. De la Proposition 1.1.2, on déduit que $\Phi(x, y) = 0$, $\forall x, y \in E$. □

Définition 1.1.3. Une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-ev est dite positive, resp. définie positive $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x, x) \geq 0$, resp. $\varphi(x, x) > 0$.

Proposition 1.1.4. *Soit* E *un ev sur* $\mathbb{K}$ *et soit* φ *une forme hermitienne positive sur* E. *On a :* $\forall x, y \in E$,

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y).$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\lambda\varphi(x, y) = |\varphi(x, y)|$. Alors $|\lambda| = 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par hypothèse sur φ : $\varphi(\lambda x + ty, \lambda x + ty) \geq 0$. En développant cette expression, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\lambda|^2\varphi(x, x) + 2t\mathrm{Re}(\lambda\varphi(x, y)) + t^2\varphi(y, y) \geq 0,$$

avec $2t\mathrm{Re}(\lambda\varphi(x, y)) = 2t|\varphi(x, y)|$. De la théorie des équations du second degré à coefficients réels, on déduit que $4|\varphi(x, y)|^2 - 4\varphi(x, x)\varphi(y, y) \leq 0$. □

Définition 1.1.4. Une forme sesquilinéaire définie positive est appelée un produit scalaire. Si E est un ev et si φ est un produit scalaire sur E, on définit une norme sur E en posant

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}.$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Définition 1.1.5. On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien complet pour la norme associée.

Exemple 1. L'espace $\mathbb{C}^d$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire : $(z,z') \mapsto \sum_{k=1}^{d} \overline{z}_k z'_k$.

Exemple 2. L'espace

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\geq 0} |u_n|^2 < +\infty\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v) \mapsto \sum_{n\geq 0} \overline{u}_n v_n$$

1.2 Orthogonalité

Définition 1.2.1. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien sur K. Deux vecteurs $x, y \in H$ sont dits orthogonaux et on note $x \perp y$ si si $\langle x,y\rangle = 0$. Si $A \subset H$, l'orthogonal de A dans H est le sev de H défini par :

$$A^\perp = \{x \in H \quad \forall a \in A, \quad \langle x,a\rangle = 0\}.$$

Proposition 1.2.1. *Soit E un espace préhilbertien. Alors :*

1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall x,y \in E$, $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*
2. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\forall x,y \in E$, $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ et $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*
3. *Si $A \subset B \subset E$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.*
4. *Si $A \subset E$, alors $A \subset (A^\perp)^\perp$.*

Démonstration. On utilise le développement :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

avec $\mathrm{Re}\langle x, iy\rangle = \mathrm{Im}\langle x,y\rangle$. □

1.3 Projection hilbertienne

Théorème 1.3.1. *Soit E un espace préhilbertien et soit $C \subset E$ un convexe complet. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in C$ unique t.q. $\|x-a\| = d(x,C)$. L'application $p_C : E \to C$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_C(x) \in C \quad \textit{et} \quad \forall y \in C, \quad \mathrm{Re}\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0.$$

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in C$ définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad x_n \in C \quad \text{et} \quad d(x,C) \leq \|x - x_n\| \leq d(x,C) + \frac{1}{n}$$

On a : $\forall n, p \geq 0$,

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \|x - x_{n+p} - (x - x_n)\|$$

avec

$$\|x - x_{n+p} - (x - x_n)\|^2 + \|(x - x_{n+p}) + (x - x_n)\|^2 = 2\|x - x_{n+p}\|^2 + 2\|x - x_n\|^2$$

$$\iff \|x_{n+p} - x_n\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2 = 2\|x - x_{n+p}\|^2 + 2\|x - x_n\|^2.$$

On en déduit

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 \leq 4\left(d(x,C) + \frac{1}{n}\right)^2 - 4\|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2 =$$

$$= 4\left(d(x,C)^2 - \|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2\right) + \frac{8}{n}d(x,C) + \frac{4}{n^2} \leq \frac{8}{n}d(x,C) + \frac{4}{n^2}$$

car C convexe $\Rightarrow \frac{1}{2}(x_n + x_{n+p}) \in C$. Il en résulte que $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans C complet donc convergente vers $a \in C$.

Par construction $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - x_n\| = d(x,C)$ donc $\|x - a\| = d(x,C)$. On suppose qu'il existe $a' \in C$ t.q. $\|x - a'\| = d(x,C)$. Alors

$$\|a - a'\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}(a + a')\|^2 = 2\|x - a\|^2 + 2\|x - a'\|^2 = 4d(x,C)^2$$

donc

$$\|a - a'\|^2 = 4d(x,C)^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(a + a')\|^2 \leq 0$$

i.e. $a = a'$. On note $p_C(x) = a$.

Soit $y \in C$ et soit $t \in]0,1[$. On a

$$\|x - tp_C(x) - (1-t)y\|^2 = \|t(x - p_C(x)) + (1-t)(x - y)\|^2 =$$

$$= t^2\|x - p_C(x)\|^2 + (1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), x - y\rangle$$

$$= t^2\|x - p_C(x)\|^2 + (1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), x - p_C(x)\rangle$$

$$+2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), p_C(x) - y\rangle$$

$$= (2t - t^2)\|x - p_C(x)\|^2 + (1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), p_C(x) - y\rangle.$$

Alors $tp_C(x) + (1-t)y \in C \Rightarrow$

$$\|x - tp_C(x) - (1-t)y\|^2 \geq \|x - p_C(x)\|^2$$

i.e. :

$$(2t-t^2)\|x-p_C(x)\|^2+(1-t)^2\|x-y\|^2+2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x-p_C(x), p_C(x)-y\rangle \geq \|x-p_C(x)\|^2$$

$$\iff (1-t)^2\|x-y\|^2+2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x-p_C(x), p_C(x)-y\rangle \geq (1-2t+t^2)\|x-p_C(x)\|^2$$

$$\iff (1-t)^2\|x-y\|^2+2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),p_C(x)-y\rangle \geq (1-t)^2\|x-p_C(x)\|^2$$

$$\iff 2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),y-p_C(x)\rangle \leq (1-t)^2(\|x-y\|^2-\|x-p_C(x)\|^2).$$

On divise les deux membres de l'inégalité par $1-t>0$. On en déduit :

$$2t\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),y-p_C(x)\rangle \leq (1-t)(\|x-y\|^2-\|x-p_C(x)\|^2).$$

Quand $t\to 1^-$, on obtient :

$$2\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),y-p_C(x)\rangle \leq 0.$$

□

Corollaire 1.3.2. *Soit E un espace de Hilbert et soit $C\subset E$ un convexe fermé. Alors : $\forall x\in E$, il existe $a\in C$ unique t.q. $\|x-a\|=d(x,C)$. L'application $p_C:E\to C$, $x\mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_C(x)\in C \quad et \quad \forall y\in C, \quad \mathrm{Re}\langle x-p_C(x),y-p_C(x)\rangle\leq 0.$$

Démonstration. On est ramené au résultat précédent en remarquant que C est un convexe complet. □

Corollaire 1.3.3. *Avec les notations du Théorème 1.3.1, l'applicaton p_C est contractante, i.e. vérifie :*

$$\forall x,y\in E, \quad \|p_C(x)-p_C(y)\|\leq\|x-y\|$$

Démonstration. Le calcul donne :

$$\mathrm{Re}\langle x-y,p_C(x)-p_C(y)\rangle = -\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),p_C(y)-p_C(x)\rangle-\mathrm{Re}\langle p_C(x),p_C(y)-p_C(x)\rangle$$

$$-\mathrm{Re}\langle y-p_C(y),p_C(x)-p_C(y)\rangle-\mathrm{Re}\langle p_C(y),p_C(x)-p_C(y)\rangle$$

$$=-\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),p_C(y)-p_C(x)\rangle-\mathrm{Re}\langle y-p_C(y),p_C(x)-p_C(y)\rangle+$$

$$+\|p_C(x)-p_C(y)\|^2\geq\|p_C(x)-p_C(y)\|^2$$

i.e. :

$$\|p_C(x)-p_C(y)\|^2\leq\mathrm{Re}\langle x-y,p_C(x)-p_C(y)\rangle\leq|\mathrm{Re}\langle x-y,p_C(x)-p_C(y)\rangle|$$

$$\leq\|x-y\|\|p_C(x)-p_C(y)\|$$

$$\Rightarrow\|p_C(x)-p_C(y)\|\leq\|x-y\|.$$

□

Proposition 1.3.4. *Soit E un espace préhilbertien et soit $F\subset E$ un sev complet. Alors : $\forall x\in E$, il existe $a\in F$ unique t.q. $\|x-a\|=d(x,F)$. L'application $p_F:E\to F$, $x\mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_F(x)\in F \quad et \quad x-p_F(x)\in F^\perp$$

Démonstration. On remarque que F est convexe et fermé, d'où l'existence et l'unicité de $p_F(x)$. On conclut en remarquant que :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y - p_F(x)\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F$$

et $y \mapsto y - p_F(x)$ est une bijection $F \to F$ donc

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F.$$

F est un espace vectoriel donc $y \in F \iff -y \in F$ et alors :

$$-\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F$$

i.e. :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle = 0, \quad \forall y \in F.$$

De même, F est un ev sur $\mathbb{C}$ donc $y \in F \iff iy \in F$. On en déduit :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), iy\rangle = \mathrm{Im}\langle x - p_F(x), iy\rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

et finalement ;

$$\langle x - p_F(x), y\rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

i.e. $x - p_F(x) \in F^\perp$.

$\square$

Supplémentaire orthogonal et somme directe

Définition 1.3.1. On dit qu'un ev E est la somme directe algébrique de deux ev F et G si $E = F + G$ avec $F \cap G = \{0\}$.

Si E est un espace préhilbertien on dit que E est la somme directe orthogonale de F et G si $E = F \oplus G$ avec $G = F^\perp$. Alors G est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Théorème 1.3.5. *Soit E un espace préhilbertien et soit $F \subset E$ un sev complet.*

1. *La projection orthogonale $p_F : E \to F$ est une application linéaire continue. Si $F \neq \{0\}$, alors $\|p_F\| = 1$.*
2. *$E = F \oplus F^\perp$.*
3. *$F^\perp = \mathrm{Ker}(p_F)$ et $F^{\perp\perp} = F$.*

Démonstration. 1. D'après le Théorème de projection hilbertienne, la projection p_F est bien définie. Soit $x, y \in E$ et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$$p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad p_F(y) \in F \Rightarrow \lambda p_F(x) + \mu p_F(y) \in F$$

et

$$x - p_F(x) \in F^\perp \quad \text{et} \quad y - p_F(y) \in F^\perp$$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y - (\lambda p_F(x) + \mu p_F(y)) = \lambda(x - p_F(x)) + \mu(y - p_F(y)) \in F^\perp.$$

De la Proposition 1.3.4, on déduit que $p_F(\lambda x + \mu y) = \lambda p_F(x) + \mu p_F(y)$, i.e. p_F est linéaire.

p_F étant linéaire et contractante, on a :

$$\forall x \in E, \quad \|p_F(x)\| = \|p_F(x) - p_F(0)\| \leq \|x\| \Rightarrow \|p_F\| \leq 1.$$

De plus : $\forall x \in E$, $x \in F \Rightarrow p_F(x) = x$ et $\|p_F(x)\| = \|x\|$. Donc $\|p_F\| = 1$.

2. Soit $x \in E$. On a $x = x - p_F(x) + p_F(x)$ avec $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x) \in F$ donc $E = F + F^\perp$. De plus :
$$\forall x \in F^\perp \cap F, \quad \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$$
donc $F \cap F^\perp = \{0\}$. Finalement, $E = F \oplus F^\perp$.
3. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p_F)$. Alors $x = x - p_F(x) \in F^\perp$. Donc $\mathrm{Ker}(p_F) \subset F^\perp$. Inversement soit $x \in F^\perp$. Par unicité de la décomposition $x = x - p_F(x) + p_F(x) \in F^\perp \oplus F$ on déduit que $p_F(x) = 0$, i.e. $x \in \mathrm{Ker}(p_F)$. Finalement : $\mathrm{Ker}(p_F) = F^\perp$.
On a : $F \subset (F^\perp)^\perp$. Inversement, soit $x \in F^{\perp\perp}$. Alors :
$$x - p_F(x) \in F^\perp \Rightarrow \langle x, x - p_F(x)\rangle = 0$$
donc
$$\|x\|^2 = \langle x, p_F(x)\rangle = \langle x - p_F(x), p_F(x)\rangle + \langle p_F(x), p_F(x)\rangle = \langle p_F(x), p_F(x)\rangle$$
$$= \|p_F(x)\|^2.$$
De plus (Théorème d Pythagore) :
$$p_F(x) \perp x - p_F(x) \Rightarrow \|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2.$$
On en déduit $\|x - p_F(x)\|^2 = 0$, i.e. $x = p_F(x) \in F$. Donc $F^{\perp\perp} \subset F$.

□

Remarque 1. Sous les mêmes hypothèses, $I - p_F$ est la projection orthognle sur $F^\perp$ et on peut écrire $I - p_F = p_{F^\perp}$.

Corollaire 1.3.6. *Si F est un sev fermé d'un espace de Hilbert H alors : $H = F \oplus F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$.*

Démonstration. On se ramène au Théorème 1.3.5 en remarquant que F fermé dans H complet est complet. □

Dans le cas général où F est un sev non nécessairement fermé d'un espace de Hilbert, on a le résultat suivant.

Corollaire 1.3.7. *Soit F un sev d'un espace de Hilbert H. On a :*
1. $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.
2. $\overline{F} = H \iff F^\perp = \{0\}$.

Démonstration. 1. On remarque que $F^\perp = \cap_{y\in F}\mathrm{Ker}(\phi_y)$ où $\phi_y : x \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire continue de norme $\|\phi_y\| = \|y\|$, $\forall y \in F$. Donc $F^\perp$ est fermé comme intersection de fermés. Ceci reste vrai pour $F^{\perp\perp}$ qui est également fermé. E particulier :
$$F \subset F^{\perp\perp} \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{F^{\perp\perp}} = F^{\perp\perp}.$$
De plus, le Corollaire 1.3.6 entraîne :
$$F \subset \overline{F} \Rightarrow \overline{F}^\perp \subset F^\perp \Rightarrow F^{\perp\perp} \subset \overline{F}^{\perp\perp} = \overline{F}.$$
Finalement : $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

2. De ce qui précède on déduit :

$$\overline{F} = H \iff (F^\perp)^\perp = H \iff \overline{F^\perp} = H^\perp \iff F^\perp = \{0\}$$

car $H^\perp = \{0\}$ par définition du produit scalaire et $\overline{F^\perp} = F^\perp$ puisque $F^\perp$ est fermé.

□

Définition 1.3.2. Soit H un espace de Hilbert. Un endomorphisme $P : H \to H$ est un opérateur autoadjoint (ou hermitien si $K = \mathbb{C}$) si $\langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle, \forall x, y \in H$.

Proposition 1.3.8. *Soit F un sev fermé d'un espace de Hilbert H.*

1. $p_F \circ p_F = p_F$
2. p_F *est auto-adjoint :* $\forall x, y \in H$, $\langle p_F(x), y\rangle = \langle x, p_F(y)\rangle$.

Démonstration. 1. C'est une conséquence directe de l'unicité de la projection orthogonale sur F.

2. Soit $x, y \in H$.

$$x - p_F(x) \in F^\perp \quad \text{et} \quad p_F(y) \in F \Rightarrow \langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle.$$

On en déduit :

$$\langle p_F(x), y\rangle = \overline{\langle y, p_F(x)\rangle} = \overline{\langle p_F(y), p_F(x)\rangle} = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle$$

Finalement : $\langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), y\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle$.

□

1.3.1 Le Théorème de représentation de Riesz

Corollaire 1.3.9. *Soit E un espace de Hilbert et soit $F \subset E$ un sev fermé. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in F$ unique t.q. $\|x - a\| = d(x, F)$. L'application $p_F : E \to F$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_F(x) \in F \quad \textit{et} \quad x - p_F(x) \in F^\perp$$

Remarque 2. Le Corollaire 1.3.9 montre que p_F est la projection orthogonale sur F. On en déduit que p_F est une application linéaire de E sur F t.q. $\|p_F\| = 1$ et $F^\perp = \mathrm{Ker} p_F$.

Proposition 1.3.10 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit E un espace de Hilbert. L'application $\Phi : E \to E'$, $x \mapsto \{\phi_x : y \mapsto \langle y, x\rangle\}$ est une isométrie antilinéaire et une bijection de E sur E'.*

Démonstration. On a déjà vu que $x \mapsto \{\phi_x : y \mapsto \langle y, x\rangle\}$ est une isométrie de E dans E'. Soit $f \in E'$, $f \neq 0$, et soit $F = \mathrm{Ker} f$. Alors F est un sev fermé de E. Soit $x_0 \in E \setminus F$. Alors $u := x_0 - p_F(x_0) \in F^\perp$ et $\mathbb{R}u \subset F^\perp$. Soit $\phi_u : y \mapsto \langle u, y\rangle$. On a $F = F^{\perp\perp} \subset (\mathbb{R}u)^\perp = \mathrm{Ker}\phi_u$. Comme $\mathrm{Ker}\phi_u$ et F sont deux hyperplans de E, on en déduit que $\mathrm{Ker}\phi_u = F$, i.e. $\exists c \in \mathbb{K}$ t.q. $f = c\phi_u = \phi_{\overline{c}u} = \Phi(\overline{c}u)$. On a $f(u) = c\phi_u(u) = c\|u\|^2 \Rightarrow c = \dfrac{f(u)}{\|u\|^2}$. Alors $f = \phi_{\overline{c}u}$ avec $c = \dfrac{f(u)}{\|u\|^2}$ et alors

$$\forall y \in E, \quad f(y) = \langle y, \overline{c}u\rangle.$$

□

Corollaire 1.3.11. *Soit H un espace de Hilbert. L'application $\Phi : H \to H'$, $y \mapsto \phi_y$ t.q. $\phi_y(x) = \langle x, y\rangle$, $\forall x \in H$, est une isométrie bijective antilinéaire de H sur H'. En particulier si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors Φ est un isomorphisme isométrique de H sur H'.*

Corollaire 1.3.12. *Tout espace de Hilbert est réflexif.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert et soit $\Phi : H \to H'$ l'isométrie antilinéaire bijective entre H et H'. Comme Φ est une isométrie, on définit un produit scalaire sur H' en posant

$$\forall f, g \in H', \quad \langle f, g\rangle_{H'} = \langle \Phi^{-1}(g), \Phi^{-1}(f)\rangle_H = \overline{\langle \Phi^{-1}(f), \Phi^{-1}(g)\rangle_H}.$$

Alors, $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H' ssi $(\Phi^{-1}(f_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H, i.e. convergente dans H. Par isométrie, $(f_n)_{n\geq 0}$ est convergente dans H'. On en déduit que H' est un espace de Hilbert, donc il existe une isométrie antilinéaire bijective $\Psi : H' \to H''$. Alors, $\Psi \circ \Phi$ est un isomorphisme de H sur H'', i.e. H est réflexif. □

Adjoint d'un opérateur

Proposition 1.3.13. *Soit H, K deux espaces de Hilbert et soit $A \in \mathcal{L}(H, K)$ une application linéaire continue. Il existe une unique application linéaire continue $A^* \in \mathcal{L}(K, H)$ appelée adjointe de A t.q. :*

$$\forall x \in H, \quad \forall y \in K, \quad \langle Ax, y\rangle_K = \langle x, A^*y\rangle_H.$$

De plus $\|A^*\| = \|A\|$ et $A^{**} = A$.

Démonstration. Soit $y \in K$. L'application $\phi_y \circ A : H \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ est linéaire continue comme composée d'applications linéaires continues, et on a $\phi_y \circ A \in H'$ avec

$$\|\phi_y \circ A\| \leq \|\phi_y\|\|A\| = \|y\|_K\|A\|.$$

On en déduit qu'il existe $A^*y \in H$ unique t.q. $\phi_{A^*y} = \phi_y \circ A$. On remarque que, par antilinéarité de $y \mapsto \phi_y$: $\forall y \in K$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\phi_{A^*(\lambda y)} = \phi_{\lambda y} \circ A = \overline{\lambda}\phi_y \circ A = \overline{\lambda}\phi_{A^*y} = \phi_{\lambda A^*y}$$

i.e., par définition de A^* : $A^*(\lambda y) = \lambda A^*y$. Donc A^* est linéaire. De plus : $\forall y \in K$,

$$\|\phi_{A^*y}\| = \|A^*y\| = \|\phi_y \circ A\| \leq \|y\|_K\|A\|$$

donc A^* est continue de norme $\|A^*\| \leq \|A\|$. On remarque que : $\forall x \in H$, $\forall y \in K$,

$$\phi_{A^*y}(x) = \overline{\phi_{Ax}(y)} \Rightarrow |\phi_{Ax}(y)| \leq \|\phi_{A^*y}\|\|x\| \leq \|A^*\|\|y\|\|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A^*\|\|x\|$$

i.e. $\|A\| \leq \|A^*\|$. Finalement : $\|A\| = \|A^*\|$.

□

1.3.2 Systèmes orthonormés et bases hilbertiennes

Définition 1.3.3. Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Un système $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E et un système orthogonal si $\langle x_i, x_j\rangle = 0$, $\forall i \neq j$.

Définition 1.3.4. Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Un système orthogonal $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormé si $\|x_i\| = 1$, $\forall i \in I$.

Exemple 3. Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire usuel, le système $(e_1, \cdots, e_n)$ donné par $(e_k)_i = \delta_{ik}$, $i, k \in [[1, n]]$, est un système orthonormé.

Exemple 4. Dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{n\geq 0} x_k \overline{y}_k$, $\forall x = (x_n)_{n\geq 0}$, $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, le système $(e_n)_{n\geq 0}$ donné par $(e_n)_k = \delta_{kn}$, $\forall k, n \geq 0$ est orthonormé.

Exemple 5. Dans l'espace de Hilbert $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y}(t)dt$, le système $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où e_n est la fonction $e_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{int}$.

Proposition 1.3.14. *Soit E un espace préhilbertien et soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé. On suppose I fini. On pose $F = \mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}$. Soit $x, y \in E$. On a*

1. $p_F(x) = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$,
2. $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle^2$,
3. $\langle p_F(x), y\rangle = \langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}$.

Démonstration. 1. Soit $x \in E$. On pose $P(x) = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$. On a :

$$\forall i \in I, \quad \langle x - P(x), e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \sum_{j\in I}\langle x, e_j\rangle\langle e_i, e_j\rangle = \langle x, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle = 0$$

donc $x - P(x) \in F^{\perp}$. Comme de plus $P(x) \in F$, on en déduit que $P(x) = p_F(x)$.

2. Soit $x \in F$. D'après ce qui précède :

$$\|p_F(x)\|^2 = \langle p_F(x), p_F(x)\rangle = \sum_{i,j\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle x, e_j\rangle}\langle e_i, e_j\rangle$$
$$= \sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2.$$

3. Soit $x, y \in E$. On a

$$\langle p_F(x), y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}.$$

□

Proposition 1.3.15 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit E un espace préhilbertien et soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonrmé de E.*

1. *Soit $x \in E$ et soit $J \subset I$ une partie finie de I. On a*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle|^2 + \|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2$$

2. *Soit $x \in E$. La famille $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ de somme majorée par $\|x\|^2$:*
$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration. 1. Soit $x \in E$ et soit $J \subset I$ une partie finie de I. On pose $F = \mathrm{Vect}\{x_i,\ i \in J\}$. Alors
$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 = \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2.$$

2. Soit Λ l'ensemble des parties finies de I. De ce qui précède on déduit que :
$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 := \sup_{J\in\Lambda} \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

□

Corollaire 1.3.16. *Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé de H. Pour tout $x \in H$, la famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ est sommable de somme vérifiant l'estimation :*
$$\|\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i\| \leq \|x\|.$$

Démonstration. Soit $x \in H$. D'après la Proposition 1.3.15 et l'inégalité de Bessel :
$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$$
i.e. la famille $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable. Soit $\varepsilon > 0$. On en déduit qu'il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q. :
$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \varepsilon.$$
i.e., le système $(e_i)_{i\in I}$ étant orthonormé :
$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \|\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \varepsilon.$$

La famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy dans H qui est complet donc est sommable, de somme $\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$ vérifiant :
$$\forall J \in \Lambda, \quad \|\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty.$$

On en déduit :
$$\sup_{J\in\Lambda} \|\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \|\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty.$$

□

Base hilbertienne

Définition 1.3.5. Soit E un espace préhilbertien. On appelle base hilbertienne toute famille $(e_i)_{i\in I}$ de E orthonormée et totale.

Remarque 3. Soit H un espace de Hilbert. Un système orthonormé $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne ssi

$$\langle x, e_i\rangle = 0, \quad \forall i \in I \Rightarrow x = 0;$$

En effet, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne et si $\langle x, e_i\rangle = 0$, $\forall i \in I$, alors $x \in \mathrm{Vect}\{e_i,\ i\in I\}^\perp = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i\in I\}}^\perp = H^\perp = \{0\}$. Inversement, si $\langle x, e_i\rangle = 0$, $\forall i \in I \Rightarrow x = 0$, alors $\mathrm{Vect}\{e_i,\ i\in I\}^\perp = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i\in I\}}^\perp = \{0\}$. Comme $H = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i\in I\}} \oplus \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i\in I\}}^\perp$, alors nécessairement $H = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i\in I\}}$.

Théorème 1.3.17 (Caractérisation des bases hilbertiennes)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne.

(ii) $\forall x \in H$, $x = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$

(iii) $\forall x, y \in H$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}$

(iv) $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2$ (Egalité de Parseval)

Démonstration. (i)$\Rightarrow$ (ii) Soit $x \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $y_\varepsilon \in \mathrm{Vect}\{e_i,\ \in I\}$ t.q. $\|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$. Soit Λ l'ensemble des parties finies de I. Il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ et il existe $(\lambda_i)_{i\in J_\varepsilon} \in \mathbb{K}^{J_\varepsilon}$ t.q. $y_\varepsilon = \sum_{i\in J_\varepsilon}\lambda_i e_i$. On pose $F_{J_\varepsilon} = \mathrm{Vect}\{e_i,\ i\in J_\varepsilon\}$. F_{J_ε} est un sev de dimension finie de H et $p_{F_{J_\varepsilon}}(x) = \sum_{i\in J_\varepsilon}\langle x, e_i\rangle e_i$. Par définition de $p_{F_{J_\varepsilon}}$, on a $\|x - p_{F_{J_\varepsilon}}(x)\| \le \|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$. Soit $J \in \Lambda$ t.q. $J_\varepsilon \subset J$.

$$F_{J_\varepsilon} \subset F_J \Rightarrow \|x - p_{F_J}(x)\| \le \|x - p_{F_{J_\varepsilon}}(x)\| < \varepsilon$$

i.e. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \|x - p_{F_J}(x)\| < \varepsilon.$$

Donc la famille $(\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ et sommable de somme $\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i = x$.

(ii)$\Rightarrow$ (iii) Soit $x \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Soit $y \in H \setminus \{0\}$. Il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\| < \varepsilon.$$

Soit $J \in \Lambda$ t.q. $J_\varepsilon \subset J$. On a :

$$|\langle x, y\rangle - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}| = |\langle x, y\rangle - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle| = |\langle x, y\rangle - \langle\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i, y\rangle|$$

$$= |\langle x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i, y\rangle| \le \|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|\|y\| < \varepsilon\|y\|$$

Ceci est vrai $\forall\varepsilon > 0$, donc la famille $(\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle})_{i\in I}$ est sommable de somme :

$$\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle} = \langle x, y\rangle.$$

(iii)$\Rightarrow$ (iv) Il suffit de poser $y = x$ dans (iii) pour conclure.

(iv)$\Rightarrow$ (i) Soit $x \in \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}}^{\perp}$. Dans la somme directe $H = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}} \oplus \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}}^{\perp}$,

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \Rightarrow \|x - \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = 0 \iff x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i \in \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}}.$$

Il en résulte $x \in \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}} \cap \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}}^{\perp} = \{0\}$, i.e. $x = 0$. Il en résulte $\overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}}^{\perp} = \{0\}$. On en déduit $\overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}} = \{0\}^{\perp} = H$. $\square$

Théorème 1.3.18. *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne. En particulier tout système orthonormé peut être complété en une base hilbertienne.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert. On suppose $H \neq \{0\}$. Sinon, le résultat est immédiat. Soit L un système orthonormé de H. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des systèmes orthonormés qui contiennent L ordonné par la relation $\subset$. Alors $\mathcal{B} \neq \emptyset$ car $L \in \mathcal{B}$. On veut montrer que $\mathcal{B}$ est inductif. Soit $\mathcal{C} = (B_i)_{i\in I}$ une chaîne de $\mathcal{B}$. Alors $B = \cup_{i\in I} B_i$ est un majorant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{P}(H)$. Soit $x, y \in B$, $x \neq y$, et soit $i_x, i_y \in I$ t.q. $x \in B_{i_x}$ et $y \in B_{i_y}$. Alors $\|x\| = \|y\| = 1$. Comme $\mathcal{C}$ est totalement ordonnée, on peut supposer $B_{i_x} \subset B_{i_y}$ et alors $x, y \in B_{i_y} \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$. Donc $B \in \mathcal{B}$. Du Lemme de Zorn on déduit que $\mathcal{B}$ admet un élément maximal noté B_L. Il reste à montrer que B_L est une famille totale dans H i.e. que $\overline{\mathrm{Vect}(B_L)} = H$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\overline{\mathrm{Vect}(B_L)} \neq H$. Alors $\overline{\mathrm{Vect}(B_L)}^{\perp} \neq \{0\}$. Soit alors $x_0 \in \overline{\mathrm{Vect}(B_L)}^{\perp}$ t.q. $x_0 \neq 0$. Alors $\|x_0\| \neq 0$. Quitte à remplacer x_0 par $\dfrac{x_0}{\|x_0\|}$, on peut supposer que $\|x_0\| = 1$. On en déduit alors que $B_L \cup \{x_0\}$ est un système orthonormé, ce qui contredit le caractère maximal de B_L. Donc B_L est total dans H et par suite, c'est une base hilbertienne de H. $\square$

Proposition 1.3.19. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable de E de somme $x \in E$. Alors :*

1. *$\forall \varepsilon > 0$, $\{i \in I,\ \|x_i\| \geq \varepsilon\}$ est fini.*
2. *$\{i \in I,\ x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.*

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q.
$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \|\sum_{i\in J} x_i\| < \varepsilon.$$
Soit $i_0 \in I \setminus J_\varepsilon$. On pose $J = \{i_0\}$. On en déduit : $\|x_{i_0}\| \leq \varepsilon$. Donc $\{i \in I,\ \|x_i\| \geq \varepsilon\} \subset J_\varepsilon$ est fini.
2. On a
$$\{i \in I,\ x_i \neq 0\} = \{i \in I,\ \|x_i\| > 0\} = \cup_{n\geq 1} \left\{ i \in I,\ \|x_i\| \geq \frac{1}{n} \right\},$$
i.e. $\{i \in I,\ x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis, éventuellement vides

$\square$

Proposition 1.3.20. *Dans un espace de Hilbert, deux bases hilbertiennes sont équipotentes.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Soit B et B' deux bases de H. Soit $e \in B$ et soit $D_e = \{f \in B',\ \langle e, f\rangle \neq 0\}$. La famille $(\langle e, f\rangle)_{f\in B'}$ est sommable de somme $e = \sum_{f\in B'}\langle e, f\rangle f$ donc D_e est dénombrable d'après la Proposition 1.3.19. On note $D_e = \{f_n^e,\ n \geq 0\}$. De plus, $\forall f \in B'$,

$$f = \sum_{e\in B}\langle f, e\rangle e \neq 0 \Rightarrow \exists e \in B \quad \text{t.q.} \quad \langle f, e\rangle \neq 0$$

i.e. $B' \subset \cup_{e\in B} D_e$. Soit $\Phi : B' \to \mathbb{N} \times B$, $f \mapsto (n, e)$ t.q. $f \in D_e$ et $f = f_n^e$. On remarque que si $\Phi(f) = \Phi(f') = (n, e)$ alors $f = f_n^e = {f'}_n^e = f'$ donc Φ est une injection de B' dans $\mathbb{N} \times B$. Comme B est infini par hypothèse sur H, $\mathbb{N} \times B$ est équipotent à B (admis ou Exercice). Donc Φ est une injection de B' dans un ensemble équipotent à B. En échangeant les rôles de B et B', on montre qu'il existe une injection $\Psi : B \to \mathbb{N} \times B'$ de B dans un ensemble équipotent à B'. On en déduit une bijection entre B et B'. □

Exemple 6. Soit I un ensemble non dénombrable. On note

$$\ell^2(I, \mathbb{K}) = \{x = (x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I,\ \sum_{i\in I} |x_i|^2 < +\infty\}.$$

muni du produit scalaire $(x, y) \mapsto \sum_{i\in I} x_i \overline{y}_j$. Alors $\ell^2(I, K)$ est un espace de Hilbert non séparable. Une base de $\ell^2(I, \mathbb{K})$ est donnée par la suite $(e_i)_{i\in I}$ définie par : $(e_i)_j = \delta_{ij}$; $\forall i, j \in I$.

Théorème 1.3.21. *Soit H un espace de Hilbert de dimension hilbertienne I. Alors, pour toute base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ de H, l'application*

$$H \to \ell^2(I, \mathbb{K}), \quad x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$$

est une bijection isométrique de H sur $\ell^2(I, \mathbb{K})$.

Espaces de Hilbert séparables

Théorème 1.3.22 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie et soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite libre de E. On pose :*

$$\forall p \geq 0, \quad V_p = \mathrm{Vect}\{f_0, \cdots, f_p\}.$$

Alors la suite $(e_n)_{n\geq 0}$ définie par la récurrence

$$e_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|}, \quad e_{p+1} = \frac{f_{p+1} - p_{V_p}(f_{p+1})}{\|f_{p+1} - p_{V_p}(f_{p+1})\|}$$

est une suite orthonormée t.q. :

$$\forall p \geq 0, \quad V_p = \mathrm{Vect}\{e_0, \cdots, e_p\}.$$

Plus précisément :

$$e_{p+1} = \frac{f_{p+1} - \sum_{i=0}^{p}\langle f_{p+1}, e_i\rangle e_i}{\|f_{p+1} - \sum_{i=0}^{p}\langle f_{p+1}, e_i\rangle e_i\|}$$

Démonstration. Par construction $\|e_p\| = 1$, $\forall p \geq 0$.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $(e_0, \cdots, e_n)$ est une bon de V_n.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie par définition de e_0. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et on pose :

$$e_{n+1} = \frac{f_{n+1} - p_{V_n}(f_{n+1})}{\|f_{n+1} - p_{V_n}(f_{n+1})\|}$$

Par définition de p_{V_n}, $e_{n+1} \in V_n^{\perp}$. Comme $\|e_{n+1}\| = 1$, on en déduit que $(e_0, \cdots, e_{n+1})$ est une famille orthonormée. Par hypothèse de récurrence

$$p_{V_n}(f_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} \langle f_{n+1}, e_i \rangle e_i \Rightarrow e_{n+1} \in \text{Vect}\{e_0, \cdots, e_n, f_{n+1}\} = V_{n+1}$$

donc $(e_0, \cdots, e_{n+1})$ est une bon de V_{n+1}, i.e. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence sur $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\forall n \geq 0$. □

Exemple 7. Soit $H = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Par orthonormalisation de Gram-Schmit à partir de la suite $(t \mapsto t^n)_{n \geq 0}$ on obtient la suite des polynômes de Tchebychev $(P_n)_{n \geq 0}$ définis par :

$$P_n(t) = \cos(nArcos(t)), \quad \forall t \in [-1, 1], \quad \forall n \geq 0.$$

Théorème 1.3.23. *Un espace préhilbertien E est séparable ssi il admet une base hilbertienne dénombrable. Alors, toutes les bases hilbertiennes sont dénombrables.*

Démonstration. On suppose que E est séparable. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite dense dans E : $E = \overline{\text{Vect}\{u_n,\ n \geq 0\}}$. Soit $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ une sous-suite libre de $(u_n)_{n \geq 0}$. Par constrctin : $\forall n \geq 0$, $u_n \in \text{Vect}\{u_{n_k},\ k \geq 0\}$, i.e. $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ est totale est libre. Par le procédé d'orthonormalisatin de Gram-Schmidt, on construit une bon $(e_k)_{k \geq 0}$ t.q. $\forall k \geq 0$, $\text{Vect}\{e_0, \cdots, e_k\} = \text{Vect}\{u_{n_0}, \cdots, u_{n_k}\}$. On en déduit alors : $E = \overline{\text{Vect}\{u_{n_k},\ k \geq 0\}} = \overline{\text{Vect}\{e_k,\ k \geq 0\}}$, i.e. $(e_k)_{k \geq 0}$ est orthonormée et totale, donc c'est une base hilbertienne dénombrable de E.

Inversement, on suppose que E admet une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n \geq 0}$. Alors $(e_n)_{n \geq 0}$ st une suite totale donc E est séparable. □

Théorème 1.3.24. *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $(e_n)_{n \geq 0}$ une base hilbertienne de H. Alors, l'application $\varphi : H \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $x \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n \geq 0}$ est un isomorphisme isométrique.*

Démonstration. Soit $x \in H$. D'après l'identité de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|\varphi(x)\|^2$$

On en déduit que φ est bien définie, i.e. $\varphi(x) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\forall x \in H$, et que φ préserve la norme. De plus, φ est linéaire (immédiat) donc c'est une isométrie linéaire. Il reste à vérifier que φ est surjective. Soit $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. On pose :

$$\forall n \geq 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k.$$

Alors : $\forall n, p \geq 0$,

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2.$$

Par hypothèse sur a, $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < +\infty$ donc :

$$\lim_{n,p\to+\infty} \|S_{n+p} - S_n\|^2 = 0,$$

i.e. la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H donc convergente vers une limite $x = \sum_{n\geq 0} a_n e_n \in H$ par complétude de H. On en déduit que $a = \varphi(x)$ et que φ est surjective. □

Exemple 8. Soit $a < b$. On pose $T = b - a$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On considère l'espace $L^2([a, b], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire : $(f, g) \mapsto \frac{1}{T} \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction T-périodique $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{in\omega t}$.

Proposition 1.3.25. *La suite* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est un base hilbertienne de* $L^2([a, b], \mathbb{C})$. *En particulier,* $L^2([a, b], \mathbb{C})$ *est isométriquement isomorphe à* $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Démonstration. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée. En effet : $\forall n, p \geq 0$,

$$\langle e_n, e_p\rangle = \frac{1}{T}\int_a^b e_n(t)\overline{e_p(t)}dt = \frac{1}{T}\int_a^b e^{i(n-p)\omega t}dt.$$

Si $p = n$, alors

$$\|e_n\|^2 = \frac{1}{T}\int_a^b dt = 1.$$

Si $p \neq n$, alors : $\omega b = \omega a + 2\pi \Rightarrow$

$$\langle e_n, e_p\rangle = \frac{1}{T}\frac{e^{i(n-p)\omega b} - e^{i(n-p)\omega a}}{(n-p)\omega} = 0$$

Il reste à montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est totale. Soit $f \in L^2([a, b], \mathbb{C})$ et soit $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ dans $L^2([a, b], \mathbb{C})$, il existe $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ t.q. $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$. Quitte à modifier g au voisinage de a et de b on peut supposer que $g(a) = g(b) = 0$. On peut prolonger g par périodicité à $\mathbb{R}$ en une fonction T-périodique $g \in \mathcal{C}_{T,\mathrm{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. D'après le Théorème de Stone-Weierstrass, l'ensemble des polynômes trigonométriques $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathcal{C}_{T,\mathrm{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit $P \in \mathcal{P}$ t.q. $\|g - P\|_\infty \leq \varepsilon$. On en déduit :

$$\|f - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

Il en résulte que $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}} = L^2([a, b], \mathbb{C})$.

□

1.4 Autres bases hilbertiennes classiques de L^2

1.4.1 Polynômes de Legendre

Exercice 1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On considère la suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définis par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P_k(X) = c_k \frac{d^k}{dX^k}((X - a)^k (X - b)^k).$$

(a) Montrer que P_k est de degré k, $\forall k \in \mathbb{N}$, et montrer que la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale dans $L^2(a,b)$.
(b) Montrer que la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire usuel de $L^2(a,b)$.
(c) Montrer qu'il existe un choix unique de la suite $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ faisant de $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne.
(d) (i) On pose $a = -1$, $b = 1$. On pose :

$$V = \{f \in \mathcal{C}^2(-1,1),\ \lim_{x\to\pm1} f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un vecteur propre de l'opérateur $L : V \to \mathcal{C}^0(-1,1)$ défini par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad L(f)(x) = ((1-x^2)f'(x))'.$$

associé à la valeur propre $\lambda_n = -n(n+1)$.

(ii) Soit $f \in L^2(-1,1)$, dérivable sur $[-1,1]$, continue par morceaux ainsi que sa dérivée. On suppose que

$$\int_{-1}^{1} (f'(x))^2(1-x^2)dx < +\infty.$$

Montrer que le développement de f sous la forme : $f = \sum_{n\geq 0} \alpha_n P_n$ converge uniformément sur $[-1,1]$.

1.4.2 Fonctions d'Hermite

Cette base de $L^2(\mathbb{R})$ joue un rôle important dans l'étude de la transformation de Fourier et dans l'étude de l'oscillateur harmonique.

On commence par montrer que la suite de fonctions $g_k : x \mapsto e^{-x^2/2}x^k$, $k \in \mathbb{N}$, est un système total dans $L^2(\mathbb{R})$. En effet, soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ t.q. $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}x^k g(x)dx = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, et soit G la fonction de la variabl complexe définie par :

$$G(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixz}e^{-x^2/2}g(x)dx \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Soit $z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$. On remarque que :

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{ixz}e^{-x^2/2}g(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta x}e^{-x^2/2}|g(x)|dx.$$

Sot $R > 0$ et soit $|\eta| \leq R$. On en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{ixz}e^{-x^2/2}g(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} e^{R|x|}e^{-x^2/2}|g(x)|dx = e^{R^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-(|x|-R)^2/2}|g(x)|dx$$

$$\leq e^{R^2/2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(|x|-R)^2}dx\right)^{1/2}\|g\|_2 = e^{R^2/2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy\right)^{1/2}\|g\|_2 < +\infty, \quad (1.1)$$

donc G est bien définie sur la bande compacte $|\text{Im}z| \leq R$, $\forall R > 0$, donc sur $\mathbb{C}$. De plus, G est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car $z \mapsto e^{ixz}e^{-x^2/2}g(x)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$ et on a : $\forall R > 0$, $\forall |\text{Im}z| \leq R$,

$$|e^{ixz}e^{-x^2/2}g(x)| \leq e^{R^2/2}e^{-(|x|-R)^2/2}|g(x)|$$

où la fonction dominante $x \mapsto e^{-(|x|-R)^2/2}|g(x)|$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ d'après (1.1). Du Théor eme de convergence dominée de Lebesgue on déduit que G est holomorphe sur la bande compacte $|\mathrm{Im} z| \leq R$, $\forall R > 0$, donc sur $\mathbb{C}$. En particulier, les dérivées $G^{(k)}$ de G, $k \in \mathbb{N}$, se calculent par dérivation sous le signe somme, i .e. : :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad G^{(k)}(z) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{ixz} e^{-x^2/2} g(z) dz$$

d'où on déduit que :

$$G^{(k)}(0) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{-x^2/2} g(z) dz = 0$$

par hypothèse sur g. On en déduit que $G \equiv 0$, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixz} e^{-x^2/2} g(x) dx = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

La transformation de Fourier étant injective sur $L^1(\mathbb{R})$, il en résulte que $e^{-x^2/2} g(x) = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}$, i.e. $g = 0$. Cela achève de monrer que la suite $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est totale dans $L^2(\mathbb{R})$. Le procédé d'orthonormlisation de Gramm-Schmidt permet d'en déduire une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

La définition de l'exercice ci-dessous est plus directe.

Exercice 2. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x)$$

où H_n est un polynôme, appelé polynôme d'Hermite, de degré n dont on calculera le coefficient du terme de plus haut degré.

(b) Soit $(c_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Psi_n(x) = c_n e^{-x^2/2} H_n(x).$$

Montrer que $\Psi_n \in L^2(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et que la suite $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale dans $L^2(\mathbb{R})$.

(c) On pose

$$c_n = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{2^n n!}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et on appelle fonctions d'Hermite les fonctions Ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, associées. Montrer que les fonctions d'Hermite forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

1.4.3 Fonctions de Laguerre

On pose :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}_n(x) = e^{-x/2} L_n(x) \quad \text{où} \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

Exercice 3. [a) Soit $g \in L^2([0, +\infty[)$. Montrer que la fnction G définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad G(z) = \int_0^{+\infty} e^{izx} e^{-x/2} g(x) dx$$

est holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Im} z > -\dfrac{1}{2}$. Exprimer les dérivées successives en l'origine $G^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$, sous forme intégrale.

(b) On suppose que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x/2} x^k g(x) dx = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On pose :

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} e^{-x/2} g(x) & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{F}(\tilde{g}) = 0$. En déduire que $g = 0$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que L_n est un polynôme de degré n. En déduire que les fonctions de Laguerre forment une suite totale de $L^2([0, +\infty[)$.

(d) Montrer que la suite des fonctions de Laguerre est orthogonale. En déduire que c'est une base hilbertienne de $L^2([0, +\infty[)$.

Chapitre 2

Grands Théorèmes

2.1 Théorèmes de Lax-Milgram et Stampacchia

Soit H un espace de Hilbert et soit $f : H \times H \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire (bilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

1. L'application f est continue ssi : $\sup_{(x,y)\in H\times H} \frac{|f(x,y)|}{\|x\|\|y\|} < +\infty$, i.e. ssi il existe une constante $M > 0$ t.q.
$$\forall (x, y) \in H \times H, \quad |f(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|.$$
2. L'application f est dite coercive si il existe $\alpha > 0$ t.q.
$$\forall x \in H, \quad \mathrm{Re} f(x, x) \geq \alpha\|x\|^2.$$

Théorème 2.1.1 (Stampacchia)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit $f : H \times H \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire continue et coercive. Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide de H. Alors= $\forall \varphi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ solution de :*

$$u \in C \quad et \quad \forall v \in C, \quad \mathrm{Re}\,\overline{\varphi}(v - u) \leq \mathrm{Re} f(u, v - u).$$

De plus, si f est hermitienne (ou symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), alors u est l'unique solution de :

$$u \in C \quad et \quad \frac{1}{2} f(u, u) - \mathrm{Re}\overline{\varphi}(u) = \min_{v\in C} \left(\frac{1}{2} f(v, v) - \mathrm{Re}\overline{\varphi}(v)\right)$$

Démonstration. Soit $\varphi \in H'$. Pour tout $u \in H$, $v \mapsto \overline{f(u, v)}$ est une forme linéaire continue sur H, donc d'après le Théorème de Représentation de Riesz, il existe un unique $Au \in H$ t.q.

$$\forall v \in H, \quad \langle v, Au\rangle = \overline{f(u, v)} \iff \forall v \in H, \quad \langle Au, v\rangle = f(u, v).$$

et l'application $A : H \to H$, $u \mapsto Au$ est linéaire avec

$$\forall u, v \in H, \quad |\phi_{Au}(v)| = |\langle Au, v\rangle| = |f(u, v)| \leq M\|u\|\|v\| \Rightarrow \|Au\| \leq M\|u\|$$

donc A est continue de norme $\|A\| \leq M$. De même il existe $a \in H$ unique t.q.

$$\forall v \in H, \quad \varphi(v) = \langle v, a\rangle.$$

Soit $u \in C$. On a : $\forall v \in C$

$$\mathrm{Re} f(u, v-u) \geq \mathrm{Re}\overline{\varphi}(v-u) \iff \mathrm{Re}\langle Au, v-u\rangle \geq \mathrm{Re}\langle a, v-u\rangle \iff \mathrm{Re}\langle a-Au, v-u\rangle \leq 0$$

$$\iff \mathrm{Re}\langle \rho a - \rho Au, v-u\rangle \leq 0, \quad \forall \rho > 0$$

$$\iff \mathrm{Re}\langle (\rho a - \rho Au + u) - u, v-u\rangle \leq 0, \quad \forall \rho > 0$$

$$\iff u = p_C(\rho a - \rho Au + u), \quad \forall \rho > 0.$$

Soit $g_\rho : C \to C$, $u \mapsto p_C(\rho a - \rho Au + u)$, $\forall \rho > 0$. Comme H est complet il reste à vérifier que g_ρ est contractante pour certaines valeurs de $\rho > 0$. Soit $\rho > 0$. On a : $\forall u, u' \in C$,

$$\|g_\rho(u) - g_\rho(u')\|^2 \leq \|u - u' - \rho A(u-u')\|^2 =$$

$$= \|u-u'\|^2 - 2\rho \mathrm{Re}\langle u-u', A(u-u')\rangle + \rho^2 \|A(u-u')\|^2$$

avec

$$\mathrm{Re}\langle u-u', A(u-u')\rangle = \mathrm{Re} f(u-u', u-u') \geq \alpha \|u-u'\|^2$$

donc

$$\|g_\rho(u) - g_\rho(u')\|^2 \leq \|u-u'\|^2 (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2).$$

On fixe $\rho \in \left]0, \frac{2\alpha}{M^2}\right[$. Alors $g_\rho : C \to C$ est strictement contractante de rapport $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2 \in]0,1[$. Du Théorème du point fixe de Banach, on déduit que g_ρ admet un unique point fixe $u \in C$. Par construction, u répond à la première partie de l'énoncé.

On suppose que f est hermitienne (symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Alors : $\forall v \in C$,

$$\frac{1}{2} f(u,u) - \frac{1}{2} f(v,v) - \mathrm{Re}\overline{\varphi}(u-v) \leq \frac{1}{2} f(u,u) - \frac{1}{2} f(v,v) - \mathrm{Re} f(u, u-v) =$$

$$= -\frac{1}{2} f(u,u) - \frac{1}{2} f(v,v) + \mathrm{Re} f(u,v) = -\frac{1}{2} f(u-v, u-v) \leq -\alpha \|u-v\|^2 \leq 0$$

i.e. :

$$\forall v \in C, \quad \frac{1}{2} f(u,u) - \mathrm{Re}\overline{\varphi}(u) \leq \frac{1}{2} f(v,v) - \mathrm{Re}\overline{\varphi}(v).$$

□

Remarque 4. On a utilisé le Théorème du Point fixe de Banach.

Théorème 2.1.2 (Point fixe de Banach)**.** *Soit E un espace de Banach et soit $A \subset E$ un fermé. Soit $f : E \to E$ t.q. $f(A) \subset A$. On suppose que f est strictement contractante i.e qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ t.q.*

$$\forall x, y \in E, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|.$$

Alors f admet un unique point fixe dans A.

Démonstration. Soit $x_0 \in A$. On pose : $\forall n \geq 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$. On remarque que

$$\forall n \geq 1, \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \lambda \|x_n - x_{n-1}\| \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|.$$

donc : $\forall n, p \geq 0$,

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{p-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \lambda^k \|x_1 - x_0\| = \lambda^n \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\|$$

$$\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\|x_1 - x_0\|$$

On en déduit que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans E, donc convergente dans E. Soit $a \in E$ sa limite. Par construction : $\forall n \geq 0$, $x_n \in A$ et A est fermé par hypotèse, donc $a \in \overline{A} = A$.

Par hypothèse, f est continue donc $a = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$, i.e. a est un point fixe pour f. Soit $a' \in E$ un point fixe de f. On a :

$$\|a - a'\| = \|f(a) - f(a')\| \leq \lambda\|a - a'\| \Rightarrow (1-\lambda)\|a - a'\| \leq 0 \Rightarrow a = a'.$$

$\square$

Théorème 2.1.3 (Lax-Milgram)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit $f : H \times H \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire continue et coercive. Alors $\forall \varphi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ solution de :*

$$\forall v \in H, \quad f(u, v) = \overline{\varphi}(v).$$

De plus, si f est hermitienne (ou symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), alors u est l'unique solution de :

$$\frac{1}{2}f(u,u) - \overline{\varphi}(u) = \min_{v\in H}\left(\frac{1}{2}f(v,v) - \mathrm{Re}\,\overline{\varphi}(v)\right)$$

Démonstration. Soit $\varphi \in H'$. D'après le Théorème de Stampaccha appliqué avec $C = H$, il existe $u \in H$ unique solution de

$$\forall v \in H, \quad \mathrm{Re} f(u, v-u) \geq \mathrm{Re}\overline{\varphi}(v-u).$$

L'application $v \mapsto u - v$ est une bijection de H sur H, donc

$$\forall w \in H, \quad \mathrm{Re} f(u, w) \geq \mathrm{Re}\overline{\varphi}(w).$$

On en déduit, en remplaçant $w \in H$ par $-w \in H$ que

$$\forall w \in H, \quad \mathrm{Re} f(u, w) = \mathrm{Re}\overline{\varphi}(w).$$

En remplaçant $w \in H$ par $iw \in H$, on en déduit ensuite :

$$\forall w \in H, \quad \mathrm{Im} f(u, w) = \mathrm{Im}\overline{\varphi}(w).$$

i.e. :

$$\forall w \in H, \quad f(u, w) = \overline{\varphi}(w).$$

On suppose f hermitienne. Soit $v \in H$. On a :

$$\frac{1}{2}f(u,u) - \frac{1}{2}f(v,v) - \mathrm{Re}\overline{\varphi}(u-v) = \frac{1}{2}f(u,u) - \frac{1}{2}f(v,v) - \mathrm{Re}\, f(u, u-v) =$$

$$= -\frac{1}{2}f(u,u) - \frac{1}{2}f(v,v) + \mathrm{Re}\, f(u,v) = -\frac{1}{2}f(u-v, u-v) \leq -\alpha\|u-v\|^2 \leq 0$$

$\square$

2.2 Le Théorème de Hahn-Banach

Théorème 2.2.1 (Le Théorème de Hahn-Banach (Forme analytique))**.** *Soit E un ev sur $\mathbb{R}$ et soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :*

1. $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in E$, $p(tx) = tp(x)$;
2. $\forall x, y \in E$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Soit $F \subset E$ un sev de E et soit $f : F \to \mathbb{R}$ une application linéaire t.q. : $\forall x \in F$, $f(x) \leq p(x)$. Alors il existe une application linéaire $g : E \to \mathbb{R}$ t.q.

1. $g|_F = f$;
2. $\forall x \in E$, $g(x) \leq p(x)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des paires (F', h) où $F' \subset E$ est un sev de E contenant F et où $h : F' \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire prolongeant f sur F' t.q. $h \leq p$ sur F'. On munit $\mathcal{E}$ de la relation d'ordre :

$$(F_1', h_1) \subset (F_2', h_2) \iff F_1' \subset F_2' \quad \text{et} \quad h_2|_{F_1'} = h_1.$$

Alors $\mathcal{E} \neq \emptyset$ car $(F, f) \in \mathcal{E}$. De plus, $\mathcal{E}$ est inductif. En effet. Si $C \subset \mathcal{E}$ est une chaîne, alors $F_0 = \cup_{F' \in C} F'$ est un sev de E contenant F et $h_0 : F_0 \to \mathbb{R}$ définie par $h_0|_{F'} = h$, $\forall (F', h) \in C$, est une forme linéaire sur F_0. De plus, (F_0, h_0) est un majorant de C dans $\mathcal{E}$. Du Lemme de Zorn, on déduit que $\mathcal{E}$ admet un élément maximal $(F_g, g) \in \mathcal{E}$. On suppose que $F_g \neq E$. Soit alors $x_0 \in E \setminus F_g$. On a : $\forall x, y \in F_g$,

$$g(x) - g(y) = g(x-y) \leq p(x-y) \leq p(x+x_0) + p(-y-x_0) \iff$$

$$\iff -g(y) - p(-y-x_0) \leq -g(x) + p(x+x_0).$$

On pose $S = \sup_{y \in F_g} -g(y) - p(-y-x_0)$, $I = \inf_{x \in F_g} -g(x) + p(x+x_0)$. Alors $S \leq I$. Soit $a \in [S, I]$. Sur $\mathbb{R}x_0 + F_g = \mathbb{R}x_0 \oplus F_g$ qui est une somme directe on définit $h : \mathbb{R}x_0 \oplus F_g \to \mathbb{R}$ en posant : $\forall w = tx_0 + x \in \mathbb{R}x_0 \oplus F_g$, $h(w) = ta + g(x)$. On vérifie immédiatement que h est une forme linéaire sur $\mathbb{R}x_0 \oplus F_g$. Si $t > 0$, on a :

$$\frac{h(w)}{t} = a + g\left(\frac{x}{t}\right) \leq I + g\left(\frac{x}{t}\right) \leq -g\left(\frac{x}{t}\right)) + p\left(\frac{x}{t} + x_0\right) + g\left(\frac{x}{t}\right) = p\left(\frac{x}{t} + x_0\right) =$$

$$= \frac{1}{t} p\left(x + tx_0\right) = \frac{1}{t} p(w).$$

Alors $t > 0 \Rightarrow h(w) \leq p(w)$. Si $t < 0$, alors

$$-\frac{h(w)}{t} = -a - g\left(\frac{x}{t}\right) \leq -S - g\left(\frac{x}{t}\right) \leq g\left(\frac{x}{t}\right)) + p\left(-\frac{x}{t} - x_0\right) - g\left(\frac{x}{t}\right) = p\left(-\frac{x}{t} - x_0\right) =$$

$$= -\frac{1}{t} p\left(x + tx_0\right) = -\frac{1}{t} p(w).$$

Alors $t < 0 \Rightarrow h(w) \leq p(w)$. Dans tous les cas : $t \neq 0 \Rightarrow h(w) \leq p(w)$. Si $t = 0$, alors $w = x \in F_g$ et $h(w) \leq p(w)$ par définition de $\mathcal{E}$. Finalement : $\forall w \in \mathbb{R}x_0 \oplus F_g$, $h(w) \leq p(w)$, ce qui contredit le caractère maximal de (F_g, h). Donc $F_g = E$. $\square$

Corollaire 2.2.2 (Prolongement par continuité)**.** *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un evn sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Soit* $F \subset E$ *un sev de* E *et soit* $f : F \to \mathbb{K}$ *une forme linéaire continue. Alors, il existe* $g \in E'$ *t.q.* $g|_F = f$ *et* $\|g\| = \|f\|$*.*

Démonstration.

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on pose : $\forall x \in E$, $p(x) = \|f\|\|x\|$, Alors $f(x) \leq |f(x)| \leq p(x), \forall x \in F$. Du Théorème de Hahn-Banach analytique, on déduit qu'il existe $g : E \to \mathbb{R}$ linéaire t.q. $g|_F = f$ et $g(x) \leq p(x)$, $\forall x \in E$. On a $\forall x \in E$, $g(-x) = -g(x) \leq p(-x) = p(x)$, donc : $-p(x) \leq g(x) \leq p(x)$, i.e. $|g(x)| \leq \|f\|\|x\|$. Il en résulte : $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{|g(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|$, donc $\|g\| \leq \|f\|$. De plus, $g|_F = f \Rightarrow \|g\| \geq \|f\|$. Donc $\|g\| = \|f\|$.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on pose $f_1 = \mathrm{Re}(f)$, $f_2 = \mathrm{Im}(f)$. On vérifie immédiatement que f_1 et f_2 sont des formes $\mathbb{R}$-linéaires sur F. On a : $\forall x \in F$, $|f_1(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$, donc f_1 est continue sur F avec $\|f_1\| \leq \|f\|$. Du cas réel, on déduit qu'il existe $g_1 : E \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$-linéaire et continue sur E t.q. $\|g_1\| = \|f_1\|$. On remarque que :

$$\forall x \in E, \quad f(ix) = if(x) \iff f_1(ix) + if_2(ix) = if_1(x) - f_2(x)$$

$$\Rightarrow f_2(x) = -f_1(ix).$$

On en déduit que l'application $g_2 : E \to \mathbb{R}$ définie par $g_2(x) = -g_1(ix)$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue sur E qui prolonge f_2. Alors $g(x) := g_1(x) + ig_2(x)$ prolonge f sur E par construction. On a aussi :

$$\forall x \in E, \quad g_1(ix) = -g_2(x), \quad g_2(ix) = g_1(x).$$

Il en résulte : $\forall \lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, $\forall x \in E$,

$$g(\lambda x) = g_1(ax) + g_1(ibx) + ig_2(ax) + ig_2(ibx) =$$

$$= ag_1(x) + bg_1(ix) + iag_2(x) + ibg_2(ix) =$$

$$= ag_1(x) - bg_2(x) + iag_2(x) + ibg_1(x) = (a + ib)g(x)$$

i.e. $g(\lambda x) = \lambda g(x)$, donc g est une forme $\mathbb{C}$-linéaire sur E. Soit $x \in E$ t.q. $g(x) \neq 0$. On pose : $g(x) = |g(x)|e^{i\alpha(x)}$. Alors

$$|g(x)| = g(x)e^{-i\alpha(x)} = g(e^{-i\alpha(x)}x) = g_1(e^{-i\alpha(x)}x) = |g_1(e^{-i\alpha(x)}x)| \leq$$

$$\leq \|g_1\|\|e^{-i\alpha(x)}x\| = \|g_1\|\|x\| = \|f_1\|\|x\| \leq \|f\|\|x\|.$$

On en déduit que $\|g\| \leq \|f\|$. De plus $g|_F = f \Rightarrow \|g\| \geq \|f\|$.Il en résulte que $\|g\| = \|f\|$.

□

Corollaire 2.2.3. *Soit* $E \neq \{0\}$ *un ev sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et soit* $x_0 \in E \setminus \{0\}$*. Il existe* $\phi \in E'$ *t.q.* $\phi(x_0) = \|x_0\|$ *et* $\|\phi\| = 1$*.*

Démonstration. Soit $\phi : \mathbb{K}x_0 \to \mathbb{K}$ définie par $\phi(tx_0) = t\|x_0\|$, $\forall t \in \mathbb{K}$. Alors $|\phi(tx_0)| = |t|\|x_0\| = \|tx_0\|$, donc $\|\phi\| = 1$ et ϕ est une forme linéaire continue sur $F = \mathbb{K}x_0$. On en déduit que ϕ se prolonge en une application encore notée ϕ linéaire sur E t.q. $\|\phi\| = 1$. Par construction $\phi(x_0) = \|x_0\|$. □

Corollaire 2.2.4. *Soit $E \neq \{0\}$ un ev. Alors :*

$$\forall x, y \in E, \quad x \neq y \Rightarrow \exists f \in E' \quad t.q. \quad f(x) \neq f(y).$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$, $x \neq y$. Alors $x_0 := x - y \neq 0$. Soit $f \in E'$ t.q. $f(x_0) = \|x_0\|$ et $\|f\| = 1$. Alors $f(x) - f(y) = f(x_0) = \|x - y\| > 0$ car $x - y \neq 0$, i.e. $f(x) \neq f(y)$. □

Exercice 4. *Soit E un evn et soit $F \subset E$, $F \neq E$, un sev fermé de E. Soit $x_0 \in E \setminus F$. Alors $\exists f \in E'$ t.q. $f(x_0) = d(x_0, F) > 0$ et $f|_F = 0$.*

Soit ϕ définie sur $\mathbb{R}x_0$ par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(tx_0) = td(x_0, F)$. Comme F est fermé, $x_0 \notin F \Rightarrow d(x_0F) > 0$ et $\phi \neq 0$. Alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(tx_0) \leq |t|d(x_0, F) = d(tx_0, F)$. On vérifie immédiatement que $p : x \mapsto d(x, F)$ est une semi-norme sur E. Du théorème de Hahn-Banach on déduit que ϕ se prolonge à E en une forme linéaire encore notée ϕ t.q. $\phi(x) \leq d(x, F)$, $\forall x \in E$. On a alors : $\forall x \in E$,

$$\phi(x) \leq d(x, F) \text{ et } \phi(-x) = -\phi(x) \leq d(-x, F) = d(x, F) \Rightarrow |\phi(x)| \leq d(x, F).$$

En particulier : $\forall x \in E$, $|\phi(x)| \leq d(x, F) \leq \|x\|$, donc $\phi \in E'$ et $\|\phi\| \leq 1$. De plus :

$$\phi\left(\frac{\|x_0\|}{d(x_0, F)} x_0\right) = \|x_0\| \Rightarrow \|\phi\| = 1$$

Par construction, $\phi(x_0) = d(x_0, F)$.

Corollaire 2.2.5. *Soit E un evn etv soit $F \subset E$ un sev. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\overline{F} = E$

(ii) $\forall f \in E'$, $f|_F = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

Démonstration. Si $\overline{F} = E$, alors (ii) est vrai par densité de F dans E et continuité de $f \in E'$.

On suppose que $\overline{F} \neq E$. Soit alors $x_0 \in E \setminus \overline{F}$. De l'Exercice 4 on déduit qu'il existe $f \in E'$ t.q. $f|_{\overline{F}} = 0$ et $\|f\| = 1$, i.e. (ii) n'est pas vérifié. □

2.3 Théorème de Hahn-Banach : forme géométrique

Définition 2.3.1. Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On appelle *hyperplan affine* de E tout sous-espae affine de E de codimension 1, i.e. toute partie de la forme

$$H = f^{-1}(\alpha) = \{x \in E,\ f(x) = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

où f est une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur E. Alors $f = \alpha$ est une équation de H.

1. On dit qu'un hyperplan affine H d'équation $f = \alpha$ sépare (au sens large) deux ensembles A et B si, quitte à échanger les rôles de A et B, on a $A \subset f^{-1}([\alpha, +\infty[)$ et $B \subset f^{-1}(]-\infty, \alpha])$.
2. On dit qu'un hyperplan affine H d'équation $f = \alpha$ sépare strictement deux ensembles A et B s'il existe $\varepsilon > 0$ t.q., quitte à échanger les rôles de A et B, on a $A \subset f^{-1}([\alpha + \varepsilon, +\infty[)$ et $B \subset f^{-1}(]-\infty, \alpha - \varepsilon])$.

Proposition 2.3.1. *Un hyperplan affine H d'équation $f = \alpha$ est fermé ssi $f \in E'$.*

Démonstration. Soit H un hyperplan affine d'équation $f = \alpha$. On suppose $f \neq 0$. Alors f est surjective. Soit $a \in E$ t.q. $f(a) = \alpha$. Alors

$$x \in H \iff f(x) = f(a) \iff x - a \in \mathrm{Ker}(f).$$

On en déduit que $H = a + \mathrm{Ker}(f)$. L'applicaton $x \mapsto a + x$ est un homéomorphisme de E sur E donc H est fermé ssi $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé, i.e. ssi f est continue. En effet, si $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé et f n'est pas bornée alors il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0} \in E$ t.q. $\|x_n\| = 1$ et $|f(x_n)| > n$, $\forall n \geq 0$. Soit $y \in E$. On pose :

$$y_n = y - \frac{f(y)}{f(x_n)} x_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Par construction : $\forall n \geq 0$, $y_n \in \mathrm{Ker}(f)$ et

$$\|y_n - y\| \leq \frac{|f(y)|}{|f(x_n)|} \leq \frac{1}{n}|f(y)|$$

donc $y_n \to y \in \overline{\mathrm{Ker}(f)} = \mathrm{Ker}(f)$. Ceci étant vrai $\forall y \in E$, on en déduit que $f = 0$. Contradiction. Donc f est continue ssi $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé. $\square$

Lemme 2.3.2. *Soit E un evn et soit $C \subset E$ un ouvert convexe non vide t.q. $0 \in C$. On pose :*

$$p_C(x) = \inf\{\alpha > 0,\ \frac{x}{\alpha} \in C\}.$$

1. *Il existe $M > 0$ t.q. $\forall x \in E$, $0 \leq p_C(x) \leq M\|x\|$.*
2. *$C = \{x \in E,\ p_C(x) < 1\}$.*
3. *$\forall \lambda > 0$, $\forall x \in E$, $p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x)$.*
4. *$\forall x, y \in E$, $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$.*

Démonstration. 1. Par hypothèse, C est ouvert et contient 0, donc il existe $r > 0$ t.q ; $B(0, r) \subset C$. Soit $x \in E$, $\neq 0$. Alors

$$\frac{r}{2\|x\|} x \in C \Rightarrow p_C(x) \leq \frac{2}{r}\|x\| =: M\|x\|$$

2. $\subset$ Soit $x \in C \setminus \{0\}$. Comme C est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $B(x, \varepsilon) \subset C$. Alors

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\|x\|}\right) x \in C \Rightarrow p_C(x) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\|x\|}\right)^{-1} = \frac{2\|x\|}{2\|x\| + \varepsilon} < 1.$$

$\supset$ Réciproquement, soit $x \in E$ t.q. $p_C(x) < 1$. Par défintion de la boren inférieure, il existe $\alpha > 0$ t.q. $p_C(x) < \alpha < 1$ et $\frac{x}{\alpha} \in C$. On en déduit, C étant convexe :

$$x = \alpha \frac{x}{\alpha} + (1 - \alpha) 0 \in C.$$

3. Soit $x \in E$ et soit $\lambda > 0$. On a

$$\lambda p_C(x) = \lambda \inf\left\{\alpha > 0,\ \frac{x}{\alpha} \in C\right\} = \inf\left\{\lambda\alpha > 0,\ \frac{x}{\alpha} \in C\right\} =$$

$$= \inf\left\{\lambda\alpha > 0,\ \frac{\lambda x}{\lambda\alpha} \in C\right\} = p_C(\lambda x).$$

car $\alpha \mapsto \lambda\alpha$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

4. On note :
$$\forall x \in E, \quad \Lambda(x) = \{\alpha > 0,\ \frac{x}{\alpha} \in C\}.$$
Soit $x, y \in E$ et soit $\alpha \in \Lambda(x)$, $\beta \in \Lambda(y)$. On a
$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{y}{\beta}.$$
Par convexité de C :
$$\frac{x}{\alpha} \in C \quad \text{et} \quad \frac{y}{\beta} \in C \Rightarrow \frac{x+y}{\alpha+\beta} \in C$$
donc $p_C(x+y) \leq \alpha + \beta$. On fixe $\lambda \in \Lambda(x)$. Alors :
$$\forall \beta \in \Lambda(y), \quad p_C(x+y) - \alpha \leq \beta \Rightarrow p_C(x+y) - \alpha \leq p_C(y).$$
Finalement :
$$\forall \alpha \in \Lambda(x), \quad p_C(x+y) - p_C(y) \leq \alpha \Rightarrow p_C(x+y) - p_C(y) \leq p_C(x).$$

□

Proposition 2.3.3. *Soit E un evn, soit $C \subset E$ un ouvert convexe non vide et soit $x_0 \in E \setminus C$. Alors il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ t.q. : $\forall x \in C$, $f(x) < f(x_0)$.*

Démonstration. Quitte à rempacer C par $a + C$ et x_0 par $x_0 + a$ avec $a \in E$, on peut supposer que $0 \in C$. Soit $f : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par : $f(tx_0) = tp_C(x_0)$. Alors $f \neq 0$ car $x_0 \notin C \Rightarrow p_C(x_0) \geq 1 > 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t \geq 0$, alors $f(tx_0) = tp_C(x_0) = p_C(tx_0)$. Si $t \leq 0$, alors $f(tx_0) = tp_C(x_0) \leq 0 \leq p_C(tx_0)$. Finalement, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(tx_0) \leq p_C(tx_0)$. Du Théorème de Hahn-Banach analytique on déduit que f se prolonge à E en une forme linéaire encore notée f t.q. : $\forall x \in E$, $f(x) \leq p_C(x) \leq M\|x\|$. Par linéarité de f, $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x) \leq p_C(-x) \leq M\|-x\| = M\|x\|$. On en déduit : $\forall x \in E$, $|f(x)| \leq M\|x\|$, i.e. $f \in E'$. Par construction : $\forall x \in C$, $f(x) \leq p_C(x) < 1 \leq p_C(x_0) = f(x_0)$. □

Théorème 2.3.4 (Théorème de Hahn-Banach (formes géométriques))**.** *Soit E un evn sur $\mathbb{R}$ et soit $A \subset E$, $B \subset E$ deux convexes non vides disjoints de E.*

1. *Si A est ouvert, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B.*
2. *Si A est compact et B fermé, il existe un hyperplan affine fermé qui sépare strictement A et B.*

Démonstration. 1. On pose $C = A - B$. Alors $C = \cup_{b \in B}(-b + A)$ est ouvert comme réunion d'ouverts. De plus : $\forall t \in [0,1]$, $\forall a, a' \in A$, $\forall b, b' \in B$, $t(a-b) + (1-t)(a'-b') = ta + (1-t)a' - tb - (1-t)b'$ avec A et B convexes $\Rightarrow ta + (1-t)a \in A$ et $tb + (1-t)b' \in B$. Il en résulte que $t(a-b) + (1-t)(a'-b') \in C$ et finalement, C est un ouvert convexe t.q. $0 \notin C$ car $A \cap B = \emptyset$. De la Proposition 2.3.3, on déduit qu'il existe $f \in E'$ t.q. : $\forall x \in C$, $f(x) < f(0) = 0$, i.e. $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $f(a-b) = f(a) - f(b) < 0$. Soit $\alpha = \sup_A f$, $\beta = \inf_B f$. Alors : $\alpha \leq \beta$ et $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $f(a) \leq \alpha \leq \beta \leq f(b)$. Autrement dit, A et B sont séparés par l'hyperplan affine fermé H d'équation $f = \alpha$.

2. Soit $C = A - B$. Le même raisonnement montre que C est convexe et $0 \notin C$. Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in C$ une suite convegente de C de limite $x \in \overline{C}$. On pose ; $\forall n \geq 0$, $x_n = a_n - b_n$, $a_n \in A$, $b_n \in B$. Par compacité de A, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ convergeant vers $a \in A$. Alors $b_{n_k} \to a - x =: b$ et $b \in B$ car B est fermé. On en déduit que $x = a - b \in C$ et donc C est fermé. On en déduit que $0 \in C^c \Rightarrow \exists B(0, r) \subset C^c$. Comme $B(0, r)$ est un ouvert convexe non vide, il existe $f \in E'$ t.q. ; $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $\forall x \in B(0, 1)$,

$$f(a - b) \leq r f(x) \iff f(a) - f(b) \leq r f(x).$$

On a :

$$\inf_{z\in B(0,1)} f(z) = - \sup_{x\in B(0,1)} |f(x)| = -\|f\|,$$

donc $\forall a \in A$, $\forall b \in B$,

$$f(a) - f(b) \leq -r\|f\| \iff f(a) + \frac{r}{2}\|f\| \leq f(b) - \frac{r}{2}\|f\|.$$

On pose $\alpha = \sup_{a\in A} f(a) + \frac{r}{2}\|f\|$, $\varepsilon = \dfrac{r}{2}\|f\|$. Alors :

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad f(a) + \varepsilon \leq \alpha \leq f(b) - \varepsilon.$$

Donc A et B sont séparés strictement par l'hyperplan affine d'équation $f = \alpha$.

□

Corollaire 2.3.5. *Tout sous-ensemble convexe compact K d'un evn E est l'intersection des semi-espaces fermés qui contiennent K.*

Démonstration. Soit $K \subset E$ un convexe compact et soit L l'intersection des semi-espaces fermés qui contiennent K. On a $K \subset L$. On suppose $K \neq L$. Soit $x_0 \notin K$. Le Théorème de séparation de Hahn-Banach appliqué avec $A = K$ et $B = \{x_0\}$ entraîne l'existence d'un hyperplan affine fermé séparant strictement A et $\{x_0\}$: $\exists f \in E'$ t.q. $\alpha := \sup_{x\in K} f(x) < f(x_0)$. Alors $K \subset \{f \leq \alpha\} =: H$, $L \subset H$ et $x_0 \in H^c \subset L^c$. □

2.3.1 Théorèmes de Carathéodory et de Krein-Milman

Enveloppe convexe

Définition 2.3.2. L'enveloppe convexe d'une partie A d'un ev sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble noté $Conv(A)$ des barycentres à coefficients positifs des éléments de A, i.e.

$$Conv(A) = \{\sum_{i\in I} \lambda_i a_i,\ |I| < +\infty,\ (a_i)_{i\in I} \in A^I,\ \lambda_i \in [0,1],\ \sum_{i\in I} \lambda_i = 1\}$$

Théorème 2.3.6 (Théorème de Carathéodory)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors*

$$Conv(A) = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i,\ (a_i)_{i\in[[0,n]]} \in A^{n+1},\ \lambda_i \in [0,1],\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Démonstration. Soit $x = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i a_i \in Conv(A)$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1$. On suppose que $d > n$. Alors la famille $\{a_1 - a_0, \cdots, a_d - a_0\}$ est liée dans $\mathbb{R}^n$ et il existe $\mu_1, \cdots, \mu_d \in \mathbb{R}$ t.q. $\sum_{i=1}^{d} \mu_i(a_i - a_0) = 0$. On pose $\mu_0 = -\sum_{i=1}^{d} \mu_i$. Alors $\sum_{i=0}^{d} \mu_i a_i = 0$ et $\sum_{i=0}^{d} \mu_i = 0$. Soit $k \in [[0,d]]$ t.q. $\dfrac{\lambda_k}{\mu_k} = \inf\limits_{\mu_i>0} \dfrac{\lambda_i}{\mu_i}$. Alors

$$a_k = -\sum_{i\neq k} \frac{\mu_i}{\mu_k} a_i \Rightarrow x = \sum_{i\neq k} \left(\lambda_i - \mu_i \frac{\lambda_k}{\mu_k}\right) a_i.$$

Si $\mu_i > 0$, alors

$$\mu_i \frac{\lambda_k}{\mu_k} \leq \lambda_i \Rightarrow \lambda_i - \mu_i \frac{\lambda_k}{\mu_k} \geq 0.$$

Si $\mu_i < 0$, alors

$$\lambda_i - \mu_i \frac{\lambda_k}{\mu_k} = \lambda_i + |\mu_i| \frac{\lambda_k}{\mu_k} \geq 0.$$

De plus

$$\sum_{i\neq k} \left(\lambda_i - \mu_i \frac{\lambda_k}{\mu_k}\right) = 1 - \lambda_k + \mu_k \frac{\lambda_k}{\mu_k} = 1$$

donc $x = \sum_{i\neq k} \delta_i a_i$ avec $\delta_i \geq 0$ et $\sum_{i\neq k} \delta_i = 1$. Il en résulte que tout $x \in Conv(A)$ peut s'écrore comme combinaison convexe d'au plus $n+1$ éléments de A. □

Corollaire 2.3.7. *L'enveloppe convexe de tout compact de $\mathbb{R}^n$ est compacte.*

Démonstration. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. On pose :

$$\Delta = \{\lambda \in [0,1]^{n+1},\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Alors Δ est fermé comme image réciproque par l'application continue $\lambda \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ du fermé $\{1\}$. De plus, $\forall \lambda \in \Delta$,

$$\|\lambda\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

i.e. Δ est contenu dans la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. Finalement, Δ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^{n+1}$, donc compact.

Soit $\phi : \Delta \times (\mathbb{R}^n)^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par :

$$\phi(\lambda, (x_i)_{0\leq i\leq n}) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i, \quad \forall(\lambda, (x_i)_{0\leq i\leq n}) \in \Delta \times (\mathbb{R}^n)^{n+1}.$$

D'après le Théorème de Carathéodory, $Conv(K) = \phi(\Delta \times K^{n+1})$. On en déduit que $Conv(K)$ est compact comme image par l'application continue ϕ du compact $\Delta \times K^{n+1}$. □

Le Théorème de Krein-Milman

Dans tout ce paragraphe, E est un evn sur $\mathbb{K}$.

Définition 2.3.3. Soit K un convexe non vide de E. Un sous-ensemble $S \subset K$ est dit extremal dans K si

1. S est un convexe non vide fermé ;
2. $\forall x \in S$, $x = ty + (1-t)z$ avec $y, z \in K$ et $t \in]0,1[\Rightarrow y \in S$ et $z \in S$.

On appelle point extrémal de K tout $x \in K$ t.q. $\{x\}$ est extrémal dans K. Autrement dit, un point extrémal de K ne peut pas être un point intérieur à un segment contenu dans K. On note $Ext(K)$ l'ensemble des points extrémaux de K.

Remarque 5.
1. Tout ensemble convexe est extrémal dans lui-même.
2. $\forall x \in E$, x est un point extrémal de K ssi $K \setminus \{x\}$ est convexe.

Le lemme suivant fournit une méthode canonique de construction d'ensembles extrémaux.

Lemme 2.3.8. *Soit $f \in E'$ et soit $K \subset E$ un convexe compact non vide. On pose :*

$$S_f := \{x \in K,\ f(x) = \max_{y\in K} f(y)\}$$

Alors, si f n'est pas constante, l'ensemble S_f est extrémal dans K et strictement contenu dans K.

Démonstration. On commence par remarquer que $f|_K$ étant non constante, S_f est strictemnt contenu dans K. Par hypothèse, f est continue sur E et K est compact, donc f atteint sa borne supérieure sur K, i.e. $S_f \neq \emptyset$. Par linéarité de f, K est convexe. Soit $x \in S_f$ et soit $y, z \in K$ t.q. $x = ty + (1-t)z$ avec $t \in]0,1[$. Alors, f étant linéaire

$$f(x) = tf(y) + (1-t)f(z) \iff t(f(x) - f(y)) + (1-t)(f(x) - f(z)) = 0$$

avec $t(f(x) - f(y)) \geq 0$ et $(1-t)(f(x) - f(z)) \geq 0 \Rightarrow$

$$t(f(x) - f(y)) = (1-t)(f(x) - f(z)) = 0.$$

Alors $0 < t < 1 \Rightarrow f(y) = f(z) = f(x)$, i.e. $y \in S_f$ et $z \in S_f$. Donc S_f est extrémal. □

Lemme 2.3.9. *Soit $K \subset E$ un convexe compact non vide et soit $S \subset K$ un sous-ensemble extrémal de K. Alors $S' \subset S$ est extrémal dans S ssi S' est extrémal dans K.*

Démonstration. $\Rightarrow$ Soit $S' \subset S$ extrémal dans S et soit $x \in S'$ t.q. $x = ty + (1-t)z$ avec $y, z \in K$ et $t \in]0,1[$. Alors $x \in S$ et S extrémal dans $K \Rightarrow y \in S$ et $z \in S$. Par hypothèse, S' est extrémal dans S donc $y \in S'$ et $z \in S'$.

$\Leftarrow$ Soit $S' \subset S$ extrémal dans K et soit $x \in S'$ t.q. $x = ty + (1-t)z$ avec $y, z \in S$ et $t \in]0,1[$. Alors S' extrémal dans K et $y \in S \subset K$, $z \in S \subset K \Rightarrow y \in S'$ et $z \in S'$. □

Théorème 2.3.10 (Théorème de Krein-Milman)**.** *Soit E un evn et soit $K \subset E$ un convexe compact non vide.*

1. *$Ext(K) \neq \emptyset$, i.e. K admet au moins un point extrémal.*
2. *$K = \overline{Conv(Ext(K))}$ i.e. K coïncide avec l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Démonstration.
1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-ensembles extrémaux de K muni de la relation d'ordre : $A \leq A' \iff A' \subset A$. Par hypothèses, K est convexe donc extrémal dans lui-même et $K \in \mathcal{E}$. Soit $C = \{A_i,\ i \in I\}$ une chaîne de $\mathcal{E}$ pour $\leq$ et soit $A = \cap_{i \in I} A_i$ un majorant. On remarque que A est non vide. Sinon, les A_i, $i \in I$, étant fermés par hypothèse et K étant compact, on en déduit qu'il existe $A_{i_1}, \cdots, A_{i_k}$ t.q. $\cap_{j=1}^{k} A_{i_j} = \emptyset$ et comme C est une chaîne, on peut supposer $A_{i_1} \subset \cdots \subset A_{i_k}$ et donc $A_{i_1} = \emptyset$, contradiction. De plus, A est fermé comme intersection de fermés. On vérifie immédiatement que A est convexe. Soit $x \in A$ t.q. $x = ty + (1-t)z$ avec $y, z \in K$ et $0 < t < 1$. Alors : $\forall i \in I$, $x \in A_i$ et A_i extrémal dans $K \Rightarrow y \in A_i$ et $z \in A_i$. Ceci est vrai $\forall i \in I$, donc $y \in A$ et $z \in A$. Donc $A \in \mathcal{E}$. Du Lemme de Zorn on déduit que $\mathcal{E}$ admet un élément maximal S. On suppose que S n'est pas réduit à un point, i.e. que S admet au moins deux points distincts. Alors il existe $f_0 \in E'$ qui les sépare. Soit $S_{f_0} = \{x \in S,\ f(x) = \max_S f\}$. Comme $S \in \mathcal{E}$, S est fermé dans K compact donc compact. On en déduit que S_{f_0} est extrémal dans S, donc dans K car S est extrémal dans K. De plus, f_0 séparant deux points distincts de S, $f_0|_S$ n'est pas constante par construction et l'inclusion $S_{f_0} \subset S$ est stricte, ce qui contredit le caractère maximal de S. Donc $S = \{p\}$ est un singleton et $p \in K$ est un point extrémal.
2. Soit $K_e = \overline{Conv(Ext(K))}$. Alors $K_e \subset \overline{Conv(K)} = K$ puisque K est convexe et fermé. Il reste à montrer que $K = K_e$. On suppose que l'inclusion $K \subset K_e$ est stricte. Soit $x_0 \in K \setminus K_e$. Comme $K_e \subset K$ est fermé, K_e est compact. Du Théorème de Hahn-Banach géométrique, on déduit qu'il existe $\ell \in E'$ et $c \in \mathbb{R}$ t.q. l'hyperplan fermé $\ell = c$ sépare strictemnt $\{x_0\}$ et K_e, i.e. $\ell(x) \leq c < \ell(x_0)$, $\forall x \in K_e$. Soit $S_\ell = \{x \in K,\ \ell(x) = \max_K \ell\}$. Alors S_ℓ est extrémal dans K et contient au moins un point extrémal $p \in Ext(K) \subset K_e$ par compacité. Alors $p \in K_e \Rightarrow \ell(p) \leq c < \ell(x_0)$. De plus, $x_0 \in K$ et $p \in S_\ell \Rightarrow \ell(x_0) \leq \ell(p) \leq c$. Contradiction.

□

Bibliographie

[1] Brezis, H. Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[2] Dixmier, J., Topologie Générale, P.U.F., Paris, 1981.

[3] Aubin, J.P., Analyse Fonctionnelle Appliquée, tomes 1 et 2, P.U.F., Paris, 1987.