Compléments d'Analyse

Isabelle Gruais
Université de Rennes 1

12 octobre 2021

Introduction

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

Dans la suite $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sauf cas particulier où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.1 Forme sesquilinéaire et produit scalaire

Définition 1.1.1. Une application $f : E \to F$ entre deux ev sur $\mathbb{C}$ est antilinéaire si

1. $\forall x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$,
2. $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.

Définition 1.1.2. Soit E un ev sur $\mathbb{K}$.

1. On appelle forme sesquilinéaire (à droite) sur $\mathbb{K}$ toute application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant. :
   (a) f est linéaire à gauche, i.e. $\forall y \in E$, $x \mapsto f(x, y)$ est linéaire ;
   (b) f est antilinéaire à droite , i.e. $\forall x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ est antilinéaire

   Par convention, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire est bilinéaire.
2. Une forme sesquilinéaire f est hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, resp. symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si en outre $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$, resp. $f(x, y) = f(y, x)$, $\forall x, y \in E$.

Proposition 1.1.1. *Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire, alors : $\forall x, y \in E$,*

$$\varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) = 2\varphi(x, x) + 2\varphi(y, y).$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$. On a

$$\varphi(x+y, x+y) = \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y),$$

$$\varphi(x-y, x-y) = \varphi(x, x) - \varphi(x, y) - \varphi(y, x) + \varphi(y, y),$$

□

Proposition 1.1.2. *Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire, alors : $\forall x, y \in E$,*

1. $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = 2\varphi(x, y) + 2\varphi(y, x)$.

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et φ symétrique : $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = 4\varphi(x, y)$.

3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et φ hermitienne : $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy) = 4\varphi(x, y)$.

Démonstration. Soit $x, y \in E$.

1. On a

$$\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y) + \\ -\varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) - \varphi(y,y).$$

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on utlise ce qui précède avec $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors, en notant $\mathbb{U}_4$ le groupe des racines quatrièmes de 1 : $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$ et on est ramené à calculer $\sum_{\zeta\in\mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x+\zeta y, x+\zeta y)$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{\zeta\in\mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x+\zeta y, x+\zeta y) &= \sum_{\zeta\in\mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x,x) + \sum_{\zeta\in\mathbb{U}_4} |\zeta|^2\varphi(x,y) + \sum_{\zeta\in\mathbb{U}_4} \zeta^2\varphi(y,x) \\ &\quad + \sum_{\zeta\in\mathbb{U}_4} \zeta\varphi(y,y) \\ &= 4\varphi(x,y).\end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.3. *Soit φ une forme sesquilinéaire sur un ev E sur $\mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. φ est hermitienne.

2. $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Si φ est hermitienne, alors $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)} \Rightarrow \varphi(x, x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$.

Inversement, on suppose que $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$. On pose : $\forall x, y \in E$, $\Phi(x, y) = \varphi(x, y) - \overline{\varphi(y, x)}$. Alors Φ est sesquilinéaire et $\Phi(x, x) = 0$, $\forall \in E$. De la Proposition 1.1.2, on déduit que $\Phi(x, y) = 0$, $\forall x, y \in E$. □

Définition 1.1.3. Une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-ev est dite positive, resp. définie positive $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x, x) \geq 0$, resp. $\varphi(x, x) > 0$.

Proposition 1.1.4. *Soit E un ev sur $\mathbb{K}$ et soit φ une forme hermitienne positive sur E. On a : $\forall x, y \in E$,*

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y).$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\lambda\varphi(x, y) = |\varphi(x, y)|$. Alors $|\lambda| = 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par hypothèse sur φ : $\varphi(\lambda x+ty, \lambda x+ty) \geq 0$. En développant cette expression, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\lambda|^2\varphi(x, x) + 2t\mathrm{Re}(\lambda\varphi(x, y)) + t^2\varphi(y, y) \geq 0,$$

avec $2t\mathrm{Re}(\lambda\varphi(x, y)) = 2t|\varphi(x, y)|$. De la théorie des équations du second degré à coefficients réels, on déduit que $4|\varphi(x, y)|^2 - 4\varphi(x, x)\varphi(y, y) \leq 0$. □

Définition 1.1.4. Une forme sesquilinéaire définie positive est appelée un produit scalaire. Si E est un ev et si φ est un produit scalaire sur E, on définit une norme sur E en posant

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}.$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Définition 1.1.5. On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien complet pour la norme associée.

Exemple 1. L'espace $\mathbb{C}^d$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire : $(z,z') \mapsto \sum_{k=1}^{d} \overline{z}_k z'_k$.

Exemple 2. L'espace

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\geq 0} |u_n|^2 < +\infty\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v) \mapsto \sum_{n\geq 0} \overline{u}_n v_n$$

1.2 Orthogonalité

Définition 1.2.1. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien sur K. Deux vecteurs $x, y \in H$ sont dits orthogonaux et on note $x \perp y$ si si $\langle x,y\rangle = 0$. Si $A \subset H$, l'orthogonal de A dans H est le sev de H défini par :

$$A^\perp = \{x \in H \quad \forall a \in A, \quad \langle x,a\rangle = 0\}.$$

Proposition 1.2.1. *Soit E un espace préhilbertien. Alors :*

1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall x,y \in E$, $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*
2. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\forall x,y \in E$, $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ et $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*
3. *Si $A \subset B \subset E$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.*
4. *Si $A \subset E$, alors $A \subset (A^\perp)^\perp$.*

Démonstration. On utilise le développement :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

avec $\mathrm{Re}\langle x, iy\rangle = \mathrm{Im}\langle x,y\rangle$. □

1.3 Projection hilbertienne

Théorème 1.3.1. *Soit E un espace préhilbertien et soit $C \subset E$ un convexe complet. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in C$ unique t.q. $\|x-a\| = d(x,C)$. L'application $p_C : E \to C$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_C(x) \in C \quad \textit{et} \quad \forall y \in C, \quad \mathrm{Re}\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0.$$

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in C$ définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad x_n \in C \quad \text{et} \quad d(x,C) \leq \|x - x_n\| \leq d(x,C) + \frac{1}{n}$$

On a : $\forall n, p \geq 0$,

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \|x - x_{n+p} - (x - x_n)\|$$

avec

$$\|x - x_{n+p} - (x-x_n)\|^2 + \|(x - x_{n+p}) + (x - x_n)\|^2 = 2\|x - x_{n+p}\|^2 + 2\|x - x_n\|^2$$

$$\iff \|x_{n+p} - x_n\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2 = 2\|x - x_{n+p}\|^2 + 2\|x - x_n\|^2.$$

On en déduit

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 \leq 4\left(d(x,C) + \frac{1}{n}\right)^2 - 4\|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2 =$$

$$= 4\left(d(x,C)^2 - \|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2\right) + \frac{8}{n}d(x,C) + \frac{4}{n^2} \leq \frac{8}{n}d(x,C) + \frac{4}{n^2}$$

car C convexe $\Rightarrow \frac{1}{2}(x_n + x_{n+p}) \in C$. Il en résulte que $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans C complet donc convergente vers $a \in C$.

Par construction $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - x_n\| = d(x,C)$ donc $\|x - a\| = d(x,C)$. On suppose qu'il existe $a' \in C$ t.q. $\|x - a'\| = d(x,C)$. Alors

$$\|a - a'\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}(a + a')\|^2 = 2\|x - a\|^2 + 2\|x - a'\|^2 = 4d(x,C)^2$$

donc

$$\|a - a'\|^2 = 4d(x,C)^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(a + a')\|^2 \leq 0$$

i.e. $a = a'$. On note $p_C(x) = a$.

Soit $y \in C$ et soit $t \in]0,1[$. On a

$$\|x - tp_C(x) - (1-t)y\|^2 = \|t(x - p_C(x)) + (1-t)(x-y)\|^2 =$$

$$= t^2\|x - p_C(x)\|^2 + (1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), x - y\rangle$$

$$= t^2\|x - p_C(x)\|^2 + (1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), x - p_C(x)\rangle$$

$$+2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), p_C(x) - y\rangle$$

$$= (2t - t^2)\|x - p_C(x)\|^2 + (1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), p_C(x) - y\rangle.$$

Alors $tp_C(x) + (1-t)y \in C \Rightarrow$

$$\|x - tp_C(x) - (1-t)y\|^2 \geq \|x - p_C(x)\|^2$$

i.e. :

$$(2t-t^2)\|x-p_C(x)\|^2+(1-t)^2\|x-y\|^2+2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x-p_C(x), p_C(x)-y\rangle \geq \|x-p_C(x)\|^2$$

$$\iff (1-t)^2\|x-y\|^2+2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x-p_C(x), p_C(x)-y\rangle \geq (1-2t+t^2)\|x-p_C(x)\|^2$$

$$\iff (1-t)^2\|x-y\|^2+2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),p_C(x)-y\rangle \geq (1-t)^2\|x-p_C(x)\|^2$$

$$\iff 2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),y-p_C(x)\rangle \leq (1-t)^2(\|x-y\|^2-\|x-p_C(x)\|^2).$$

On divise les deux membres de l'inégalité par $1-t>0$. On en déduit :

$$2t\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),y-p_C(x)\rangle \leq (1-t)(\|x-y\|^2-\|x-p_C(x)\|^2).$$

Quand $t\to 1^-$, on obtient :

$$2\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),y-p_C(x)\rangle \leq 0.$$

□

Corollaire 1.3.2. *Soit E un espace de Hilbert et soit $C\subset E$ un convexe fermé. Alors : $\forall x\in E$, il existe $a\in C$ unique t.q. $\|x-a\|=d(x,C)$. L'application $p_C:E\to C$, $x\mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_C(x)\in C \quad \textit{et} \quad \forall y\in C, \quad \mathrm{Re}\langle x-p_C(x),y-p_C(x)\rangle\leq 0.$$

Démonstration. On est ramené au résultat précédent en remarquant que C est un convexe complet. □

Corollaire 1.3.3. *Avec les notations du Théorème 1.3.1, l'applicaton p_C est contractante, i.e. vérifie :*

$$\forall x,y\in E, \quad \|p_C(x)-p_C(y)\|\leq\|x-y\|$$

Démonstration. Le calcul donne :

$$\mathrm{Re}\langle x-y,p_C(x)-p_C(y)\rangle = -\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),p_C(y)-p_C(x)\rangle-\mathrm{Re}\langle p_C(x),p_C(y)-p_C(x)\rangle$$

$$-\mathrm{Re}\langle y-p_C(y),p_C(x)-p_C(y)\rangle-\mathrm{Re}\langle p_C(y),p_C(x)-p_C(y)\rangle$$

$$=-\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),p_C(y)-p_C(x)\rangle-\mathrm{Re}\langle y-p_C(y),p_C(x)-p_C(y)\rangle+$$

$$+\|p_C(x)-p_C(y)\|^2\geq\|p_C(x)-p_C(y)\|^2$$

i.e. :

$$\|p_C(x)-p_C(y)\|^2\leq\mathrm{Re}\langle x-y,p_C(x)-p_C(y)\rangle\leq|\mathrm{Re}\langle x-y,p_C(x)-p_C(y)\rangle|$$

$$\leq\|x-y\|\|p_C(x)-p_C(y)\|$$

$$\Rightarrow\|p_C(x)-p_C(y)\|\leq\|x-y\|.$$

□

Proposition 1.3.4. *Soit E un espace préhilbertien et soit $F\subset E$ un sev complet. Alors : $\forall x\in E$, il existe $a\in F$ unique t.q. $\|x-a\|=d(x,F)$. L'application $p_F:E\to F$, $x\mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_F(x)\in F \quad \textit{et} \quad x-p_F(x)\in F^{\perp}$$

Démonstration. On remarque que F est convexe et fermé, d'où l'existence et l'unicité de $p_F(x)$. On conclut en remarquant que :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y - p_F(x)\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F$$

et $y \mapsto y - p_F(x)$ est une bijection $F \to F$ donc

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F.$$

F est un espace vectoriel donc $y \in F \iff -y \in F$ et alors :

$$-\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F$$

i.e. :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle = 0, \quad \forall y \in F.$$

De même, F est un ev sur $\mathbb{C}$ donc $y \in F \iff iy \in F$. On en déduit :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), iy\rangle = \mathrm{Im}\langle x - p_F(x), iy\rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

et finalement ;

$$\langle x - p_F(x), y\rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

i.e. $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

$\square$