Compléments d'Analyse

Isabelle Gruais
Université de Rennes 1

12 octobre 2021

Introduction

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

Dans la suite $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sauf cas particulier où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.1 Forme sesquilinéaire et produit scalaire

Définition 1.1.1. Une application $f : E \to F$ entre deux ev sur $\mathbb{C}$ est antilinéaire si

1. $\forall x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$,
2. $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.

Définition 1.1.2. Soit E un ev sur $\mathbb{K}$.

1. On appelle forme sesquilinéaire (à droite) sur $\mathbb{K}$ toute application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant. :
   (a) f est linéaire à gauche, i.e. $\forall y \in E$, $x \mapsto f(x, y)$ est linéaire ;
   (b) f est antilinéaire à droite , i.e. $\forall x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ est antilinéaire

   Par convention, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire est bilinéaire.
2. Une forme sesquilinéaire f est hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, resp. symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si en outre $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$, resp. $f(x, y) = f(y, x)$, $\forall x, y \in E$.

Proposition 1.1.1. *Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire, alors : $\forall x, y \in E$,*

$$\varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) = 2\varphi(x, x) + 2\varphi(y, y).$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$. On a

$$\varphi(x+y, x+y) = \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y),$$

$$\varphi(x-y, x-y) = \varphi(x, x) - \varphi(x, y) - \varphi(y, x) + \varphi(y, y),$$

□

Proposition 1.1.2. *Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire, alors : $\forall x, y \in E$,*

1. $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = 2\varphi(x, y) + 2\varphi(y, x)$.

2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* φ *symétrique :* $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = 4\varphi(x, y)$.
3. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *et* φ *hermitienne :* $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy) = 4\varphi(x, y)$.

Démonstration. Soit $x, y \in E$.

1. On a

$$\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y) + \\ -\varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) - \varphi(y,y).$$

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on utlise ce qui précède avec $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors, en notant $\mathbb{U}_4$ le groupe des racines quatrièmes de 1 : $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$ et on est ramené à calculer $\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x+\zeta y, x+\zeta y)$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x+\zeta y, x+\zeta y) &= \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x,x) + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} |\zeta|^2\varphi(x,y) + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta^2\varphi(y,x) \\ &\quad + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(y,y) \\ &= 4\varphi(x,y).\end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.3. *Soit* φ *une forme sesquilinéaire sur un ev* E *sur* $\mathbb{C}$. *Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. φ *est hermitienne.*
2. $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Si φ est hermitienne, alors $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)} \Rightarrow \varphi(x, x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$.

Inversement, on suppose que $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$. On pose : $\forall x, y \in E$, $\Phi(x, y) = \varphi(x, y) - \overline{\varphi(y, x)}$. Alors Φ est sesquilinéaire et $\Phi(x, x) = 0$, $\forall \in E$. De la Proposition 1.1.2, on déduit que $\Phi(x, y) = 0$, $\forall x, y \in E$. □

Définition 1.1.3. Une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-ev est dite positive, resp. définie positive $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x, x) \geq 0$, resp. $\varphi(x, x) > 0$.

Proposition 1.1.4. *Soit* E *un ev sur* $\mathbb{K}$ *et soit* φ *une forme hermitienne positive sur* E. *On a :* $\forall x, y \in E$,

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y).$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\lambda\varphi(x, y) = |\varphi(x, y)|$. Alors $|\lambda| = 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par hypothèse sur φ : $\varphi(\lambda x + ty, \lambda x + ty) \geq 0$. En développant cette expression, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\lambda|^2\varphi(x, x) + 2t\mathrm{Re}(\lambda\varphi(x, y)) + t^2\varphi(y, y) \geq 0,$$

avec $2t\mathrm{Re}(\lambda\varphi(x, y)) = 2t|\varphi(x, y)|$. De la théorie des équations du second degré à coefficients réels, on déduit que $4|\varphi(x, y)|^2 - 4\varphi(x, x)\varphi(y, y) \leq 0$. □

Définition 1.1.4. Une forme sesquilinéaire définie positive est appelée un produit scalaire. Si E est un ev et si φ est un produit scalaire sur E, on définit une norme sur E en posant

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}.$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Définition 1.1.5. On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien complet pour la norme associée.

Exemple 1. L'espace $\mathbb{C}^d$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire : $(z,z') \mapsto \sum_{k=1}^{d} \overline{z}_k z'_k$.

Exemple 2. L'espace

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\geq 0} |u_n|^2 < +\infty\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v) \mapsto \sum_{n\geq 0} \overline{u}_n v_n$$

1.2 Orthogonalité

Définition 1.2.1. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien sur K. Deux vecteurs $x, y \in H$ sont dits orthogonaux et on note $x \perp y$ si si $\langle x, y\rangle = 0$. Si $A \subset H$, l'orthogonal de A dans H est le sev de H défini par :

$$A^{\perp} = \{x \in H \quad \forall a \in A, \quad \langle x, a\rangle = 0\}.$$

Proposition 1.2.1. *Soit E un espace préhilbertien. Alors :*

1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*
2. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\forall x, y \in E$, $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ et $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*
3. *Si $A \subset B \subset E$ alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.*
4. *Si $A \subset E$, alors $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.*

Démonstration. On utilise le développement :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

avec $\mathrm{Re}\langle x, iy\rangle = \mathrm{Im}\langle x, y\rangle$. □

1.3 Projection hilbertienne

Théorème 1.3.1. *Soit E un espace préhilbertien et soit $C \subset E$ un convexe complet. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in C$ unique t.q. $\|x - a\| = d(x, C)$. L'application $p_C : E \to C$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \forall y \in C, \quad \mathrm{Re}\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0.$$

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in C$ définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad x_n \in C \quad \text{et} \quad d(x,C) \leq \|x - x_n\| \leq d(x,C) + \frac{1}{n}$$

On a : $\forall n, p \geq 0$,

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \|x - x_{n+p} - (x - x_n)\|$$

avec

$$\|x - x_{n+p} - (x - x_n)\|^2 + \|(x - x_{n+p}) + (x - x_n)\|^2 = 2\|x - x_{n+p}\|^2 + 2\|x - x_n\|^2$$

$$\iff \|x_{n+p} - x_n\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2 = 2\|x - x_{n+p}\|^2 + 2\|x - x_n\|^2.$$

On en déduit

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 \leq 4\left(d(x,C) + \frac{1}{n}\right)^2 - 4\|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2 =$$

$$= 4\left(d(x,C)^2 - \|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2\right) + \frac{8}{n}d(x,C) + \frac{4}{n^2} \leq \frac{8}{n}d(x,C) + \frac{4}{n^2}$$

car C convexe $\Rightarrow \frac{1}{2}(x_n + x_{n+p}) \in C$. Il en résulte que $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans C complet donc convergente vers $a \in C$.

Par construction $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - x_n\| = d(x,C)$ donc $\|x - a\| = d(x,C)$. On suppose qu'il existe $a' \in C$ t.q. $\|x - a'\| = d(x,C)$. Alors

$$\|a - a'\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}(a + a')\|^2 = 2\|x - a\|^2 + 2\|x - a'\|^2 = 4d(x,C)^2$$

donc

$$\|a - a'\|^2 = 4d(x,C)^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(a + a')\|^2 \leq 0$$

i.e. $a = a'$. On note $p_C(x) = a$.

Soit $y \in C$ et soit $t \in]0,1[$. On a

$$\|x - tp_C(x) - (1-t)y\|^2 = \|t(x - p_C(x)) + (1-t)(x - y)\|^2 =$$

$$= t^2\|x - p_C(x)\|^2 + (1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), x - y\rangle$$

$$= t^2\|x - p_C(x)\|^2 + (1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), x - p_C(x)\rangle$$

$$+2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), p_C(x) - y\rangle$$

$$= (2t - t^2)\|x - p_C(x)\|^2 + (1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), p_C(x) - y\rangle.$$

Alors $tp_C(x) + (1-t)y \in C \Rightarrow$

$$\|x - tp_C(x) - (1-t)y\|^2 \geq \|x - p_C(x)\|^2$$

i.e. :

$$(2t - t^2)\|x - p_C(x)\|^2 + (1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), p_C(x) - y\rangle \geq \|x - p_C(x)\|^2$$

$$\iff (1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), p_C(x) - y\rangle \geq (1 - 2t + t^2)\|x - p_C(x)\|^2$$

$$\iff (1-t)^2\|x-y\|^2+2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),p_C(x)-y\rangle \geq (1-t)^2\|x-p_C(x)\|^2$$

$$\iff 2t(1-t)\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),y-p_C(x)\rangle \leq (1-t)^2(\|x-y\|^2-\|x-p_C(x)\|^2).$$

On divise les deux membres de l'inégalité par $1-t>0$. On en déduit :

$$2t\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),y-p_C(x)\rangle \leq (1-t)(\|x-y\|^2-\|x-p_C(x)\|^2).$$

Quand $t\to 1^-$, on obtient :

$$2\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),y-p_C(x)\rangle \leq 0.$$

□

Corollaire 1.3.2. *Soit E un espace de Hilbert et soit $C\subset E$ un convexe fermé. Alors : $\forall x\in E$, il existe $a\in C$ unique t.q. $\|x-a\|=d(x,C)$. L'application $p_C:E\to C$, $x\mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_C(x)\in C \quad et \quad \forall y\in C,\quad \mathrm{Re}\langle x-p_C(x),y-p_C(x)\rangle\leq 0.$$

Démonstration. On est ramené au résultat précédent en remarquant que C est un convexe complet. □

Corollaire 1.3.3. *Avec les notations du Théorème 1.3.1, l'applicaton p_C est contractante, i.e. vérifie :*

$$\forall x,y\in E,\quad \|p_C(x)-p_C(y)\|\leq\|x-y\|$$

Démonstration. Le calcul donne :

$$\mathrm{Re}\langle x-y,p_C(x)-p_C(y)\rangle=-\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),p_C(y)-p_C(x)\rangle-\mathrm{Re}\langle p_C(x),p_C(y)-p_C(x)\rangle$$

$$-\mathrm{Re}\langle y-p_C(y),p_C(x)-p_C(y)\rangle-\mathrm{Re}\langle p_C(y),p_C(x)-p_C(y)\rangle$$

$$=-\mathrm{Re}\langle x-p_C(x),p_C(y)-p_C(x)\rangle-\mathrm{Re}\langle y-p_C(y),p_C(x)-p_C(y)\rangle+$$

$$+\|p_C(x)-p_C(y)\|^2\geq\|p_C(x)-p_C(y)\|^2$$

i.e. :

$$\|p_C(x)-p_C(y)\|^2\leq\mathrm{Re}\langle x-y,p_C(x)-p_C(y)\rangle\leq|\mathrm{Re}\langle x-y,p_C(x)-p_C(y)\rangle|$$

$$\leq\|x-y\|\|p_C(x)-p_C(y)\|$$

$$\Rightarrow\|p_C(x)-p_C(y)\|\leq\|x-y\|.$$

□

Proposition 1.3.4. *Soit E un espace préhilbertien et soit $F\subset E$ un sev complet. Alors : $\forall x\in E$, il existe $a\in F$ unique t.q. $\|x-a\|=d(x,F)$. L'application $p_F:E\to F$, $x\mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_F(x)\in F \quad et \quad x-p_F(x)\in F^\perp$$

Démonstration. On remarque que F est convexe et fermé, d'où l'existence et l'unicité de $p_F(x)$. On conclut en remarquant que :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y - p_F(x)\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F$$

et $y \mapsto y - p_F(x)$ est une bijection $F \to F$ donc

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F.$$

F est un espace vectoriel donc $y \in F \iff -y \in F$ et alors :

$$-\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F$$

i.e. :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle = 0, \quad \forall y \in F.$$

De même, F est un ev sur $\mathbb{C}$ donc $y \in F \iff iy \in F$. On en déduit :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), iy\rangle = \mathrm{Im}\langle x - p_F(x), iy\rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

et finalement ;

$$\langle x - p_F(x), y\rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

i.e. $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

□

Supplémentaire orthogonal et somme directe

Définition 1.3.1. On dit qu'un ev E est la somme directe algébrique de deux ev F et G si $E = F + G$ avec $F \cap G = \{0\}$.

Si E est un espace préhilbertien on dit que E est la somme directe orthogonale de F et G si $E = F \oplus G$ avec $G = F^{\perp}$. Alors G est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Théorème 1.3.5. *Soit E un espace préhilbertien et soit $F \subset E$ un sev complet.*

1. *La projection orthogonale $p_F : E \to F$ est une application linéaire continue. Si $F \neq \{0\}$, alors $\|p_F\| = 1$.*
2. *$E = F \oplus F^{\perp}$.*
3. *$F^{\perp} = \mathrm{Ker}(p_F)$ et $F^{\perp\perp} = F$.*

Démonstration. 1. D'après le Théorème de projection hilbertienne, la projection p_F est bien définie. Soit $x, y \in E$ et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$$p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad p_F(y) \in F \Rightarrow \lambda p_F(x) + \mu p_F(y) \in F$$

et

$$x - p_F(x) \in F^{\perp} \quad \text{et} \quad y - p_F(y) \in F^{\perp}$$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y - (\lambda p_F(x) + \mu p_F(y)) = \lambda(x - p_F(x)) + \mu(y - p_F(y)) \in F^{\perp}.$$

De la Proposition 1.3.4, on déduit que $p_F(\lambda x + \mu y) = \lambda p_F(x) + \mu p_F(y)$, i.e. p_F est linéaire.

p_F étant linéaire et contractante, on a :

$$\forall x \in E, \quad \|p_F(x)\| = \|p_F(x) - p_F(0)\| \leq \|x\| \Rightarrow \|p_F\| \leq 1.$$

De plus : $\forall x \in E$, $x \in F \Rightarrow p_F(x) = x$ et $\|p_F(x)\| = \|x\|$. Donc $\|p_F\| = 1$.

2. Soit $x \in E$. On a $x = x - p_F(x) + p_F(x)$ avec $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x) \in F$ donc $E = F + F^\perp$. De plus :
$$\forall x \in F^\perp \cap F, \quad \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$$
donc $F \cap F^\perp = \{0\}$. Finalement, $E = F \oplus F^\perp$.
3. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p_F)$. Alors $x = x - p_F(x) \in F^\perp$. Donc $\mathrm{Ker}(p_F) \subset F^\perp$. Inversement soit $x \in F^\perp$. Par unicité de la décomposition $x = x - p_F(x) + p_F(x) \in F^\perp \oplus F$ on déduit que $p_F(x) = 0$, i.e. $x \in \mathrm{Ker}(p_F)$. Finalement : $\mathrm{Ker}(p_F) = F^\perp$.
On a : $F \subset (F^\perp)^\perp$. Inversement, soit $x \in F^{\perp\perp}$. Alors :
$$x - p_F(x) \in F^\perp \Rightarrow \langle x, x - p_F(x)\rangle = 0$$
donc
$$\|x\|^2 = \langle x, p_F(x)\rangle = \langle x - p_F(x), p_F(x)\rangle + \langle p_F(x), p_F(x)\rangle = \langle p_F(x), p_F(x)\rangle$$
$$= \|p_F(x)\|^2.$$
De plus (Théorème d Pythagore) :
$$p_F(x) \perp x - p_F(x) \Rightarrow \|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2.$$
On en déduit $\|x - p_F(x)\|^2 = 0$, i.e. $x = p_F(x) \in F$. Donc $F^{\perp\perp} \subset F$.

□

Remarque 1. Sous les mêmes hypothèses, $I - p_F$ est la projection orthognle sur $F^\perp$ et on peut écrire $I - p_F = p_{F^\perp}$.

Corollaire 1.3.6. *Si F est un sev fermé d'un espace de Hilbert H alors : $H = F \oplus F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$.*

Démonstration. On se ramène au Théorème 1.3.5 en remarquant que F fermé dans H complet est complet. □

Dans le cas général où F est un sev non nécessairement fermé d'un espace de Hilbert, on a le résultat suivant.

Corollaire 1.3.7. *Soit F un sev d'un espace de Hilbert H. On a :*
1. $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.
2. $\overline{F} = H \iff F^\perp = \{0\}$.

Démonstration. 1. On remarque que $F^\perp = \cap_{y\in F}\mathrm{Ker}(\phi_y)$ où $\phi_y : x \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire continue de norme $\|\phi_y\| = \|y\|$, $\forall y \in F$. Donc $F^\perp$ est fermé comme intersection de fermés. Ceci reste vrai pour $F^{\perp\perp}$ qui est également fermé. E particulier :
$$F \subset F^{\perp\perp} \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{F^{\perp\perp}} = F^{\perp\perp}.$$
De plus, le Corollaire 1.3.6 entraîne :
$$F \subset \overline{F} \Rightarrow \overline{F}^\perp \subset F^\perp \Rightarrow F^{\perp\perp} \subset \overline{F}^{\perp\perp} = \overline{F}.$$
Finalement : $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

2. De ce qui précède on déduit :

$$\overline{F} = H \iff (F^{\perp})^{\perp} = H \iff \overline{F^{\perp}} = H^{\perp} \iff F^{\perp} = \{0\}$$

car $H^{\perp} = \{0\}$ par définition du produit scalaire et $\overline{F^{\perp}} = F^{\perp}$ puisque $F^{\perp}$ est fermé.

□

Définition 1.3.2. Soit H un espace de Hilbert. Un endomorphisme $P : H \to H$ est un opérateur autoadjoint (ou hermitien si $K = \mathbb{C}$) si $\langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle, \forall x, y \in H$.

Proposition 1.3.8. *Soit F un sev fermé d'un espace de Hilbert H.*

1. $p_F \circ p_F = p_F$

2. p_F est auto-adjoint : $\forall x, y \in H$, $\langle p_F(x), y\rangle = \langle x, p_F(y)\rangle$.

Démonstration. 1. C'est une conséquence directe de l'unicité de la projection orthogonale sur F.

2. Soit $x, y \in H$.

$$x - p_F(x) \in F^{\perp} \quad \text{et} \quad p_F(y) \in F \Rightarrow \langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle.$$

On en déduit :

$$\langle p_F(x), y\rangle = \overline{\langle y, p_F(x)\rangle} = \overline{\langle p_F(y), p_F(x)\rangle} = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle$$

Finalement : $\langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), y\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle$.

□

1.3.1 Le Théorème de représentation de Riesz

Corollaire 1.3.9. *Soit E un espace de Hilbert et soit $F \subset E$ un sev fermé. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in F$ unique t.q. $\|x - a\| = d(x, F)$. L'application $p_F : E \to F$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_F(x) \in F \quad \textit{et} \quad x - p_F(x) \in F^{\perp}$$

Remarque 2. Le Corollaire 1.3.9 montre que p_F est la projection orthogonale sur F. On en déduit que p_F est une application linéaire de E sur F t.q. $\|p_F\| = 1$ et $F^{\perp} = \mathrm{Ker} p_F$.

Proposition 1.3.10 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit E un espace de Hilbert. L'application $\Phi : E \to E'$, $x \mapsto \{\phi_x : y \mapsto \langle y, x\rangle\}$ est une isométrie antilinéaire et une bijection de E sur E'.*

Démonstration. On a déjà vu que $x \mapsto \{\phi_x : y \mapsto \langle y, x\rangle\}$ est une isométrie de E dans E'. Soit $f \in E'$, $f \neq 0$, et soit $F = \mathrm{Ker} f$. Alors F est un sev fermé de E. Soit $x_0 \in E \setminus F$. Alors $u := x_0 - p_F(x_0) \in F^{\perp}$ et $\mathbb{R}u \subset F^{\perp}$. Soit $\phi_u : y \mapsto \langle u, y\rangle$. On a $F = F^{\perp\perp} \subset (\mathbb{R}u)^{\perp} = \mathrm{Ker}\phi_u$. Comme $\mathrm{Ker}\phi_u$ et F sont deux hyperplans de E, on en déduit que $\mathrm{Ker}\phi_u = F$, i.e. $\exists c \in \mathbb{K}$ t.q. $f = c\phi_u = \phi_{\overline{c}u} = \Phi(\overline{c}u)$. On a $f(u) = c\phi_u(u) = c\|u\|^2 \Rightarrow c = \dfrac{f(u)}{\|u\|^2}$. Alors $f = \phi_{\overline{c}u}$ avec $c = \dfrac{f(u)}{\|u\|^2}$ et alors

$$\forall y \in E, \quad f(y) = \langle y, \overline{c}u\rangle.$$

□

Corollaire 1.3.11. *Soit H un espace de Hilbert. L'application $\Phi : H \to H'$, $y \mapsto \phi_y$ t.q. $\phi_y(x) = \langle x, y\rangle$, $\forall x \in H$, est une isométrie bijective antilinéaire de H sur H'. En particulier si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors Φ est un isomorphisme isométrique de H sur H'.*

Corollaire 1.3.12. *Tout espace de Hilbert est réflexif.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert et soit $\Phi : H \to H'$ l'isométrie antilinéaire bijective entre H et H'. Comme Φ est une isométrie, on définit un produit scalaire sur H' en posant

$$\forall f, g \in H', \quad \langle f, g\rangle_{H'} = \langle \Phi^{-1}(g), \Phi^{-1}(f)\rangle_H = \overline{\langle \Phi^{-1}(f), \Phi^{-1}(g)\rangle_H}.$$

Alors, $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H' ssi $(\Phi^{-1}(f_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H, i.e. convergente dans H. Par isométrie, $(f_n)_{n\geq 0}$ est convergente dans H'. On en déduit que H' est un espace de Hilbert, donc il existe une isométrie antilinéaire bijective $\Psi : H' \to H''$. Alors, $\Psi \circ \Phi$ est un isomorphisme de H sur H'', i.e. H est réflexif. □

Adjoint d'un opérateur

Proposition 1.3.13. *Soit H, K deux espaces de Hilbert et soit $A \in \mathcal{L}(H, K)$ une application linéaire continue. Il existe une unique application linéaire continue $A^* \in \mathcal{L}(K, H)$ appelée adjointe de A t.q. :*

$$\forall x \in H, \quad \forall y \in K, \quad \langle Ax, y\rangle_K = \langle x, A^*y\rangle_H.$$

De plus $\|A^*\| = \|A\|$ et $A^{**} = A$.

Démonstration. Soit $y \in K$. L'application $\phi_y \circ A : H \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ est linéaire continue comme composée d'applications linéaires continues, et on a $\phi_y \circ A \in H'$ avec

$$\|\phi_y \circ A\| \leq \|\phi_y\|\|A\| = \|y\|_K\|A\|.$$

On en déduit qu'il existe $A^*y \in H$ unique t.q. $\phi_{A^*y} = \phi_y \circ A$. On remarque que, par antilinéarité de $y \mapsto \phi_y$: $\forall y \in K$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\phi_{A^*(\lambda y)} = \phi_{\lambda y} \circ A = \overline{\lambda}\phi_y \circ A = \overline{\lambda}\phi_{A^*y} = \phi_{\lambda A^*y}$$

i.e., par définition de A^* : $A^*(\lambda y) = \lambda A^*y$. Donc A^* est linéaire. De plus : $\forall y \in K$,

$$\|\phi_{A^*y}\| = \|A^*y\| = \|\phi_y \circ A\| \leq \|y\|_K\|A\|$$

donc A^* est continue de norme $\|A^*\| \leq \|A\|$. On remarque que : $\forall x \in H$, $\forall y \in K$,

$$\phi_{A^*y}(x) = \overline{\phi_{Ax}(y)} \Rightarrow |\phi_{Ax}(y)| \leq \|\phi_{A^*y}\|\|x\| \leq \|A^*\|\|y\|\|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A^*\|\|x\|$$

i.e. $\|A\| \leq \|A^*\|$. Finalement : $\|A\| = \|A^*\|$.

□

1.3.2 Systèmes orthonormés et bases hilbertiennes

Définition 1.3.3. Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Un système $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E et un système orthogonal si $\langle x_i, x_j\rangle = 0$, $\forall i \neq j$.

Définition 1.3.4. Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Un système orthogonal $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormé si $\|x_i\| = 1$, $\forall i \in I$.

Exemple 3. Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire usuel, le système $(e_1, \cdots, e_n)$ donné par $(e_k)_i = \delta_{ik}$, $i, k \in [[1, n]]$, est un système orthonormé.

Exemple 4. Dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{n\geq 0} x_k \overline{y}_k$, $\forall x = (x_n)_{n\geq 0}$, $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, le système $(e_n)_{n\geq 0}$ donné par $(e_n)_k = \delta_{kn}$, $\forall k, n \geq 0$ est orthonormé.

Exemple 5. Dans l'espace de Hilbert $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y}(t)dt$, le système $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où e_n est la fonction $e_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{int}$.

Proposition 1.3.14. *Soit E un espace préhilbertien et soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé. On suppose I fini. On pose $F = \mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}$. Soit $x, y \in E$. On a*

1. $p_F(x) = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$,
2. $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle^2$,
3. $\langle p_F(x), y\rangle = \langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}$.

Démonstration. 1. Soit $x \in E$. On pose $P(x) = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$. On a :

$$\forall i \in I, \quad \langle x - P(x), e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \sum_{j\in I}\langle x, e_j\rangle\langle e_i, e_j\rangle = \langle x, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle = 0$$

donc $x - P(x) \in F^{\perp}$. Comme de plus $P(x) \in F$, on en déduit que $P(x) = p_F(x)$.

2. Soit $x \in F$. D'après ce qui précède :

$$\|p_F(x)\|^2 = \langle p_F(x), p_F(x)\rangle = \sum_{i,j\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle x, e_j\rangle}\langle e_i, e_j\rangle$$
$$= \sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2.$$

3. Soit $x, y \in E$. On a

$$\langle p_F(x), y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}.$$

□

Proposition 1.3.15 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit E un espace préhilbertien et soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonrmé de E.*

1. *Soit $x \in E$ et soit $J \subset I$ une partie finie de I. On a*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle|^2 + \|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2$$

2. *Soit $x \in E$. La famille $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ de somme majorée par $\|x\|^2$:*
$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

Démonstration. 1. Soit $x \in E$ et soit $J \subset I$ une partie finie de I. On pose $F = \mathrm{Vect}\{x_i,\ i \in J\}$. Alors
$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 = \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2.$$

2. Soit Λ l'ensemble des parties finies de I. De ce qui précède on déduit que :
$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 := \sup_{J\in\Lambda}\sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

□

Corollaire 1.3.16. *Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé de H. Pour tout $x \in H$, la famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ est sommable de somme vérifiant l'estimation :*
$$\|\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i\| \le \|x\|.$$

Démonstration. Soit $x \in H$. D'après la Proposition 1.3.15 et l'inégalité de Bessel :
$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2 < +\infty$$
i.e. la famille $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable. Soit $\varepsilon > 0$. On en déduit qu'il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q. :
$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \varepsilon.$$
i.e., le système $(e_i)_{i\in I}$ étant orthonormé :
$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \|\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \varepsilon.$$

La famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy dans H qui est complet donc est sommable, de somme $\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$ vérifiant :
$$\forall J \in \Lambda, \quad \|\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2 < +\infty.$$

On en déduit :
$$\sup_{J\in\Lambda}\|\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \|\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2 < +\infty.$$

□