Université de Rennes 1 **Année 2022–2023**

Préparation à l'Agrégation : compléments d'Analyse

Exercices

Exercice 1

1. Soit $h^1(\mathbb{N}) = \{u \in \ell^2(\mathbb{N}),\ \sum_{n\geq 0} n^2|u_n|^2 < +\infty\}$.
   (a) Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $h^1(\mathbb{N})$ en posant :
   $$\forall a, b \in h^1(\mathbb{N}), \quad \langle a, b\rangle = \sum_{n\geq 0}(1+n^2)a_n\bar{b}_n.$$
   et que ce produit scalaire fait de $h^1(\mathbb{N})$ un espace de Hilbert.
   (b) Montrer que $h^1(\mathbb{N})$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$.
   (c) Montrer que la boule unité fermée de $h^1(\mathbb{N})$ est compacte dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 2

Soit E un espace de Banach. On suppose E uniformément convexe, i.e. t.q.
$$\forall x, y \in B_E(0,1), \quad \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \geq 1-\delta \Rightarrow \|x-y\| \leq \varepsilon.$$
Soit $C \subset E$ un convexe fermé non vide.

1. Soit $x \in E$. On pose $\alpha = \inf_{y\in C}\|x-y\|$. Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in C^{\mathbb{N}}$ une suite t.q. :
   $$\forall n \geq 0, \quad \|x_n - x\| \leq \alpha + \frac{1}{n+1}.$$
   Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans E.
2. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers l'unique solution $p_C(x)$ du problème :
   $$p_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \|x - p_C(x)\| = \inf_{y\in C}\|x-y\|.$$
3. Montrer que
   $$\forall x, x' \in E, \quad \|x - p_C(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x-x'\| + \left\|\frac{1}{2}(x+x') - p_C\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right\|$$
4. Soit $x, x' \in E$. On suppose que $\|x' - p_C(x')\| \leq \|x - p_C(x)\| =: \alpha$. Montrer que
   $$\frac{1}{2\alpha}\|x + x' - p_C(x) - p_C(x')\| \geq 1 - \frac{\|x-x'\|}{2\alpha}.$$

5. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une constante $\eta > 0$ t.q., avec les notations de 4.,

$$\|x - x'\| \leq \eta \Rightarrow \|p_C(x) - p_C(x')\| \leq \alpha\varepsilon + \|x - x'\|.$$

6. Montrer que :

$$\forall x, x' \in E, \quad |\|x - p_C(x)\| - \|x' - p_C(x')\|| \leq \|x - x'\|.$$

7. En déduire que p_C est continue sur E.
8. En déduire que p_C est uniformément continue sur les bornés de E.

Exercice 3

Soit H un espace de Hilbert et soit $(K_n)_{n\geq 0}$ une suite de convexes fermés non vides de H. Soit $f \in H$. On pose $u_n = p_{K_n} f$, $\forall n \geq 0$.

1. On suppose que la suite $(K_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et que $\cap_{n\geq 0} K_n \neq \emptyset$.
   (a) Montrer que la suite de terme général $\|u_n - f\|$ est croissante majorée par $\|x - f\|$, $\forall x \in \cap_{n\geq 0} K_n$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n, p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|^2 \leq 2\|u_{n+p} - f\|^2 - 2\|u_n - f\|^2.$$
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite de la forme $p_K f$ où K est un convexe fermé à préciser.
2. On suppose que la suite $(K_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
   (a) Montrer que $K = \overline{\cup_{n\geq 0} K_n}$ est un convexe fermé.
   (b) Montrer que la suite de terme général $\|u_n - f\|$ converge.
   (c) Montrer que :
   $$\forall n, p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|^2 \leq 2\|u_n - f\|^2 - 2\|u_{n+p} - f\|^2.$$
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $p_K f$.
   (e) Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée inférieurement. On pose : $\forall n \geq 0$, $c_n = \inf_{K_n} \varphi$. Montrer que la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ converge. Identifier sa limite.

Exercice 4

Soit E un espace de Hilbert et soit $T \in E'$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \|x\|^2 - T(x).$$

1. Montrer que f est bornée inférieurement sur E et que cette borne est atteinte sur E.
2. Soit $a \in E$ t.q. $f(a) = \inf_E f$. Soit C un convexe fermé. Montrer que
   $$\inf_C f = f(p_C(a)).$$
   .

Exercice 5

Soit $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $p \in]1, +\infty[$. On suppose que :

$$\forall x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p, \quad \sum_{n\geq 0} |a_n||x_n| < +\infty.$$

Montrer que $a \in \ell^{p'}$.

Exercice 6

Soit à résoudre : trouver $u : [0, T] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto u(t, x)$, solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \tag{1}$$

1. Montrer que u se prolonge sur $[0, T] \times [-1, 1]$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ impaire en $x \in [-1, 1]$.
2. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de solutions de (1) de la forme $u_n(t, x) = \phi_n(t)v_n(x)$ où v_n peut être explicité comme la restriction à $[0, 1]$ d'une base hilbertienne de $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$, $\forall n \geq 1$.
3. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$. On pose :

   $$\forall n \geq 0, \quad f_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n + e_{-n}), \quad f_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n - e_{-n}).$$

   Montrer que la famille $(f_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$.
4. En déduire que la solution générale de (1) s'écrit :

   $$u(x, t) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin(\pi n x), \quad \text{p.p. dans } [0, T] \times [0, 1].$$

   où $(\alpha_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
5. Résoudre (1) lorsque u vérifie en outre la condition initiale : $u(0, x) = x^2$ sur $[0, 1]$.
6. Résoudre (1) dans le cas d'une condition initiale $u(0, x) = f(x)$ sur $[0, 1]$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty([0, 1])$.

Exercice 7

1. Soit $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-|x|}$. Montrer que K admet une transformée de Fourier. Calculer $\hat{K}$.

   Dans la suite on considère le problème : $y'' - y = f$ dans $\mathbb{R}$.
2. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ t.q. : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $p_{\alpha,\beta}(g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha g^{(\beta)}(x)| < +\infty$. On suppose que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(a) On suppose que $y \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{y}(\xi) = -\frac{\hat{f}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}.$$

(b) En déduire qu'il existe une unique solution $y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3. On suppose que $f \in L^2(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\xi \mapsto -\frac{\hat{f}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}$.. Montrer que l'équation $\hat{y} = g$ admet une unique solution y dans $L^2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que : $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \int_\mathbb{R} y(x)(\varphi''(x) - \varphi(x))dx = \int_\mathbb{R} f(x)\varphi(x)dx$.
   (c) En déduire qu'il existe $y'' \in L^2(\mathbb{R})$ t.q. $y'' - y = f$.

Exercice 8

Soit H un espace de Hilbert. Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ t.q. $S^* = S$ et $\langle Su, u\rangle \in \mathbb{R}^+$, $\forall u \in H$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(S) = \mathrm{Im}(S)^\perp$.
2. Déduire du Théorème de Lax-Milgram que $I + tS$ est bijectif, $\forall t > 0$.
3. Soit $t > 0$ et soit $f \in H$, On pose $u_t = (I + tS)^{-1}f$.
   (a) Montrer que si $f \in \mathrm{Ker}(S)$, alors $u_t = f$.
   (b) Montrer que si $f \in \mathrm{Im}S$, alors il existe $v \in H$ t.q. : $t\|u_t\| \leq \|v\|$.
   (c) En déduire que : $\forall f \in \mathrm{Im}S$, $\lim_{t\to\infty}(I + tS)^{-1}f = 0$.
   (d) Montrer que $\forall f \in H$, $\lim_{t\to\infty}(I + tS)^{-1}f = p_{\mathrm{Ker}S}f$.

Exercice 9

1. Montrer que l'application $(u, v) \mapsto \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$ est un produit scalaire sur $E = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}),\ u(0) = u(1) = 0\}$.
2. Montrer que l'application $(u, v) \mapsto \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 x^2u(x)v(x)dx$ est une forme bilinéaire symétrique et coercive sur E.
3. Déduire du Théorème de Lax-Milgram l'existence d'une solution du problème avec conditions initiales :
   $-u'' + x^2u = x^3, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$

Exercice 10

Dans l'espace de Hilbert $H = L^2([0, 1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, on considère le sev $E = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}),\ u(0) = u(1) = 0\}$.

1. Montrer que

$$(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$$

est un produit scalaire sur E.

2. On note $|\cdot|$ la norme associée et $V = \overline{E}^{|\cdot|}$ le complété de E pour la norme $|\cdot|$. Montrer que : $V \subset H$ et que l'injection est continue. Dans la suite, on admet que E est dense dans H pour la norme $\|\cdot\|_2$ de H
3. Pour tout $u \in V$ on note ϕ'_u l'application $V \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \varphi \in V, \quad \phi'_u(\varphi) = \int_0^1 u(x)\varphi'(x)dx$$

   Montrer que $\phi'_u \in V'$ et que $\|\phi'_u\|_{V'} \leq \|u\|_2$.
4. Soit $u \in V$. Montrer que ϕ'_u se prolonge en un élément de H' de norme $\|\phi'_u\|_{H'} = \|u'\|_2$.
5. On considère l'application $\Phi' : H \to V'$, $u \mapsto \phi'_u$. Montrer que :

$$\forall u \in H, \quad \|\phi'_u\|_{V'} \leq \|u\|_2.$$

6. Déduire que pour tout $u \in V$, il existe $u' \in H$ t.q. $\phi'_u = \phi_{-u'}$. *Indication :* on admet que V est dense dans H.

Exercice 11

Soit H un espace de Hilbert et soit $V \subset H$ un sev dense dans H. On suppose que V est muni d'une norme $\|\cdot\|_V$ qui en fait un espace réflexif et qui rend continue m'injection canonique $V \subset H$, i.e. qu'il existe une constante $C > 0$ t.q.

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_H \leq C\|v\|_V.$$

1. On considère l'opérateur antilinéaire $T : H \to V'$, $f \mapsto Tf$ t.q.

$$\forall v \in V, \quad Tf(v) = \langle v, f \rangle.$$

   Montrer que : $\forall f \in H$, $\|Tf\|_{V'} \leq C\|f\|_H$.
2. Montrer que T est injective.
3. Soit $v \in V$ t.q. $Tf(v) = 0$, $\forall f \in H$. Que peut-on dire de v ?
4. En déduire que $T(H)$ est dense dans V'.
5. Soit $\varphi \in V'$. Montrer que $\varphi \in T(H)$ ssi il existe une constante $a > 0$ t.q. $\forall v \in V$, $|\varphi(v)| \leq a\|v\|_H$.

Exercice 12

Soit E un evn et soit $F \subset E$, $F \neq E$, un sev fermé de E. Soit $x_0 \in E \setminus F$. Alors $\exists f \in E'$ t.q. $f(x_0) = d(x_0, F) > 0$ et $f|_F = 0$.

Exercice 13

Soit E un evn de dimension finie. Soit $C \subset E$ un convexe non vide t.q. $0 \notin C$.

1. Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in C^{\mathbb{N}}$ et soit $D = \{x_n, \quad n \geq 0\}$. On suppose que D est dense dans C. On pose :

$$\forall n \geq 0, \quad C_n = \mathrm{Conv}\{x_0, \cdots, x_n\}.$$

   Montrer que C_n est compact et que $\cup_{n\geq 0} C_n$ est dense dans C.
2. Montrer qu'il existe $(f_n)_{n\geq 0} \in (E')^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\forall n \geq 0, \quad \|f_n\| = 1 \quad \text{et} \quad f_n(x) \geq 0, \quad \forall x \in C_n.$$

3. Montrer qu'il existe $f \in E'$ t.q.

$$\|f\| = 1 \quad \text{et} \quad f(x) \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

4. En déduire qu'il existe un hyperplan qui sépare C et $\{0\}$ au sens large.
5. Soit $A \subset E$ et soit $B \subset E$ deux ensembles convexes disjoints de E. Montrer qu'il existe un hyperplan qui sépare A et B au sens large.