

# Compléments d'Analyse

Isabelle Gruais  
Université de Rennes 1

20 septembre 2023



# Introduction



# Chapitre 1

## Espaces de Hilbert

Dans la suite  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , sauf cas particulier où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

### 1.1 Forme sesquilinéaire et produit scalaire

**Définition 1.1.1.** Une application  $f : E \rightarrow F$  entre deux ev sur  $\mathbb{C}$  est antilinéaire si

1.  $\forall x, y \in E, \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$
2.  $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad f(\lambda x) = \bar{\lambda}f(x).$

**Définition 1.1.2.** Soit  $E$  un ev sur  $\mathbb{K}$ .

1. On appelle forme sesquilinéaire (à droite) sur  $\mathbb{K}$  toute application  $f : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  vérifiant. :
  - (a)  $f$  est linéaire à gauche, i.e.  $\forall y \in E, x \mapsto f(x, y)$  est linéaire ;
  - (b)  $f$  est antilinéaire à droite, i.e.  $\forall x \in E, y \mapsto f(x, y)$  est antilinéairePar convention, si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , une forme sesquilinéaire est bilinéaire.
2. Une forme sesquilinéaire  $f$  est hermitienne si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , resp. symétrique si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , si en outre  $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$ , resp.  $f(x, y) = f(y, x), \forall x, y \in E$ .

**Proposition 1.1.1.** Si  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  est une forme sesquilinéaire, alors :  $\forall x, y \in E,$

$$\varphi(x + y, x + y) + \varphi(x - y, x - y) = 2\varphi(x, x) + 2\varphi(y, y).$$

*Démonstration.* Soit  $x, y \in E$ . On a

$$\varphi(x + y, x + y) = \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y),$$

$$\varphi(x - y, x - y) = \varphi(x, x) - \varphi(x, y) - \varphi(y, x) + \varphi(y, y),$$

□

**Proposition 1.1.2.** Si  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  est une forme sesquilinéaire, alors :  $\forall x, y \in E,$

1.  $\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) = 2\varphi(x, y) + 2\varphi(y, x).$

2. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $\varphi$  symétrique :  $\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) = 4\varphi(x, y)$ .
3. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et  $\varphi$  hermitienne :  $\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) + i\varphi(x + iy, x + iy) - i\varphi(x - iy, x - iy) = 4\varphi(x, y)$ .

*Démonstration.* Soit  $x, y \in E$ .

1. On a

$$\begin{aligned} \varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) &= \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y) + \\ &\quad - \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) - \varphi(y, y). \end{aligned}$$

2. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  on utilise ce qui précède avec  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ .
3. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors, en notant  $\mathbb{U}_4$  le groupe des racines quatrièmes de 1 :  $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$  et on est ramené à calculer  $\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta \varphi(x + \zeta y, x + \zeta y)$ . On a

$$\begin{aligned} \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta \varphi(x + \zeta y, x + \zeta y) &= \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta \varphi(x, x) + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} |\zeta|^2 \varphi(x, y) + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta^2 \varphi(y, x) \\ &\quad + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta \varphi(y, y) \\ &= 4\varphi(x, y). \end{aligned}$$

□

**Proposition 1.1.3.** Soit  $\varphi$  une forme sesquilinéaire sur un ev  $E$  sur  $\mathbb{C}$ . Les propositions suivantes sont équivalentes.

1.  $\varphi$  est hermitienne.
2.  $\forall x \in E, \varphi(x, x) \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Si  $\varphi$  est hermitienne, alors  $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)} \Rightarrow \varphi(x, x) \in \mathbb{R}, \forall x \in E$ .

Inversement, on suppose que  $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}, \forall x \in E$ . On pose :  $\forall x, y \in E, \Phi(x, y) = \varphi(x, y) - \overline{\varphi(y, x)}$ . Alors  $\Phi$  est sesquilinéaire et  $\Phi(x, x) = 0, \forall x \in E$ . De la Proposition 1.1.2, on déduit que  $\Phi(x, y) = 0, \forall x, y \in E$ . □

**Définition 1.1.3.** Une forme hermitienne sur un  $\mathbb{C}$ -ev est dite positive, resp. définie positive  $\forall x \in E \setminus \{0\}, \varphi(x, x) \geq 0$ , resp.  $\varphi(x, x) > 0$ .

**Proposition 1.1.4.** Soit  $E$  un ev sur  $\mathbb{K}$  et soit  $\varphi$  une forme hermitienne positive sur  $E$ . On a :  $\forall x, y \in E$ ,

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y).$$

*Démonstration.* Soit  $x, y \in E$  et soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  t.q.  $\lambda\varphi(x, y) = |\varphi(x, y)|$ . Alors  $|\lambda| = 1$ . Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Par hypothèse sur  $\varphi : \varphi(\lambda x + ty, \lambda x + ty) \geq 0$ . En développant cette expression, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\lambda|^2 \varphi(x, x) + 2t \operatorname{Re}(\lambda\varphi(x, y)) + t^2 \varphi(y, y) \geq 0,$$

avec  $2t \operatorname{Re}(\lambda\varphi(x, y)) = 2t|\varphi(x, y)|$ . De la théorie des équations du second degré à coefficients réels, on déduit que  $4|\varphi(x, y)|^2 - 4\varphi(x, x)\varphi(y, y) \leq 0$ . □

**Définition 1.1.4.** Une forme sesquilinéaire définie positive est appelée un produit scalaire. Si  $E$  est un ev et si  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ , on définit une norme sur  $E$  en posant

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}.$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

**Définition 1.1.5.** On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien complet pour la norme associée.

**Exemple 1.** L'espace  $\mathbb{C}^d$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :  $(z, z') \mapsto \sum_{k=1}^d \bar{z}_k z'_k$ .

**Exemple 2.** L'espace

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n \geq 0} |u_n|^2 < +\infty\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) \mapsto \sum_{n \geq 0} \bar{u}_n v_n$$

**Exercice 1.**

Soit  $h^1(\mathbb{N}) = \{u \in \ell^2(\mathbb{N}), \sum_{n \geq 0} n^2 |u_n|^2 < +\infty\}$ .

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur  $h^1(\mathbb{N})$  en posant :

$$\forall a, b \in h^1(\mathbb{N}), \quad \langle a, b \rangle = \sum_{n \geq 0} (1 + n^2) a_n \bar{b}_n.$$

et que ce produit scalaire fait de  $h^1(\mathbb{N})$  un espace de Hilbert.

2. Montrer que  $h^1(\mathbb{N})$  est dense dans  $\ell^2(\mathbb{N})$ .
3. Montrer que la boule unité fermée de  $h^1(\mathbb{N})$  est compacte dans  $\ell^2(\mathbb{N})$ .

## 1.2 Orthogonalité

**Définition 1.2.1.** Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien sur  $K$ . Deux vecteurs  $x, y \in H$  sont dits orthogonaux et on note  $x \perp y$  si  $\langle x, y \rangle = 0$ . Si  $A \subset H$ , l'orthogonal de  $A$  dans  $H$  est le sev de  $H$  défini par :

$$A^\perp = \{x \in H \mid \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}.$$

**Proposition 1.2.1.** Soit  $E$  un espace préhilbertien. Alors :

1. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\forall x, y \in E$ ,  $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .
2. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\forall x, y \in E$ ,  $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$  et  $\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .
3. Si  $A \subset B \subset E$  alors  $B^\perp \subset A^\perp$ .
4. Si  $A \subset E$ , alors  $A \subset (A^\perp)^\perp$ .

*Démonstration.* On utilise le développement :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

avec  $\operatorname{Re}\langle x, iy \rangle = \operatorname{Im}\langle x, y \rangle$ . □

### 1.3 Projection hilbertienne

**Théorème 1.3.1.** *Soit  $E$  un espace préhilbertien et soit  $C \subset E$  un convexe complet. Alors :  $\forall x \in E$ , il existe  $a \in C$  unique t.q.  $\|x - a\| = d(x, C)$ . L'application  $p_C : E \rightarrow C$ ,  $x \mapsto a$  ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \forall y \in C, \quad \operatorname{Re}\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0.$$

*Démonstration.* Soit  $(x_n)_{n \geq 0} \in C$  définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad x_n \in C \quad \text{et} \quad d(x, C) \leq \|x - x_n\| \leq d(x, C) + \frac{1}{n}$$

On a :  $\forall n, p \geq 0$ ,

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \|x - x_{n+p} - (x - x_n)\|$$

avec

$$\begin{aligned} \|x - x_{n+p} - (x - x_n)\|^2 + \|(x - x_{n+p}) + (x - x_n)\|^2 &= 2\|x - x_{n+p}\|^2 + 2\|x - x_n\|^2 \\ \iff \|x_{n+p} - x_n\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}(x_{n+p} + x_n)\|^2 &= 2\|x - x_{n+p}\|^2 + 2\|x - x_n\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\|^2 &\leq 4 \left( d(x, C) + \frac{1}{n} \right)^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(x_{n+p} + x_n)\|^2 = \\ &= 4 \left( d(x, C)^2 - \|x - \frac{1}{2}(x_{n+p} + x_n)\|^2 \right) + \frac{8}{n}d(x, C) + \frac{4}{n^2} \leq \frac{8}{n}d(x, C) + \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

car  $C$  convexe  $\Rightarrow \frac{1}{2}(x_n + x_{n+p}) \in C$ . Il en résulte que  $(x_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $C$  complet donc convergente vers  $a \in C$ .

Par construction  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - x_n\| = d(x, C)$  donc  $\|x - a\| = d(x, C)$ . On suppose qu'il existe  $a' \in C$  t.q.  $\|x - a'\| = d(x, C)$ . Alors

$$\|a - a'\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}(a + a')\|^2 = 2\|x - a\|^2 + 2\|x - a'\|^2 = 4d(x, C)^2$$

donc

$$\|a - a'\|^2 = 4d(x, C)^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(a + a')\|^2 \leq 0$$

i.e.  $a = a'$ . On note  $p_C(x) = a$ .

Soit  $y \in C$  et soit  $t \in ]0, 1[$ . On a

$$\begin{aligned} \|x - tp_C(x) - (1-t)y\|^2 &= \|t(x - p_C(x)) + (1-t)(x - y)\|^2 = \\ &= t^2\|x - p_C(x)\|^2 + (1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)\operatorname{Re}\langle x - p_C(x), x - y \rangle \\ &= t^2\|x - p_C(x)\|^2 + (1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)\operatorname{Re}\langle x - p_C(x), x - p_C(x) \rangle \\ &\quad + 2t(1-t)\operatorname{Re}\langle x - p_C(x), p_C(x) - y \rangle \\ &= (2t - t^2)\|x - p_C(x)\|^2 + (1-t)^2\|x - y\|^2 + 2t(1-t)\operatorname{Re}\langle x - p_C(x), p_C(x) - y \rangle. \end{aligned}$$

Alors  $tp_C(x) + (1-t)y \in C \Rightarrow$

$$\|x - tp_C(x) - (1-t)y\|^2 \geq \|x - p_C(x)\|^2$$

i.e. :

$$(2t-t^2)\|x-p_C(x)\|^2 + (1-t)^2\|x-y\|^2 + 2t(1-t)\operatorname{Re}\langle x-p_C(x), p_C(x)-y \rangle \geq \|x-p_C(x)\|^2$$

$$\iff (1-t)^2\|x-y\|^2 + 2t(1-t)\operatorname{Re}\langle x-p_C(x), p_C(x)-y \rangle \geq (1-2t+t^2)\|x-p_C(x)\|^2$$

$$\iff (1-t)^2\|x-y\|^2 + 2t(1-t)\operatorname{Re}\langle x-p_C(x), p_C(x)-y \rangle \geq (1-t)^2\|x-p_C(x)\|^2$$

$$\iff 2t(1-t)\operatorname{Re}\langle x-p_C(x), y-p_C(x) \rangle \leq (1-t)^2(\|x-y\|^2 - \|x-p_C(x)\|^2).$$

On divise les deux membres de l'inégalité par  $1-t > 0$ . On en déduit :

$$2\operatorname{Re}\langle x-p_C(x), y-p_C(x) \rangle \leq (1-t)(\|x-y\|^2 - \|x-p_C(x)\|^2).$$

Quand  $t \rightarrow 1^-$ , on obtient :

$$2\operatorname{Re}\langle x-p_C(x), y-p_C(x) \rangle \leq 0.$$

□

**Corollaire 1.3.2.** *Soit  $E$  un espace de Hilbert et soit  $C \subset E$  un convexe fermé. Alors :  $\forall x \in E$ , il existe  $a \in C$  unique t.q.  $\|x-a\| = d(x, C)$ . L'application  $p_C : E \rightarrow C$ ,  $x \mapsto a$  ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \forall y \in C, \quad \operatorname{Re}\langle x-p_C(x), y-p_C(x) \rangle \leq 0.$$

*Démonstration.* On est ramené au résultat précédent en remarquant que  $C$  est un convexe complet. □

**Corollaire 1.3.3.** *Avec les notations du Théorème 1.3.1, l'application  $p_C$  est contractante, i.e. vérifie :*

$$\forall x, y \in E, \quad \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|$$

*Démonstration.* Le calcul donne :

$$\operatorname{Re}\langle x-y, p_C(x)-p_C(y) \rangle = -\operatorname{Re}\langle x-p_C(x), p_C(y)-p_C(x) \rangle - \operatorname{Re}\langle p_C(x), p_C(y)-p_C(x) \rangle$$

$$\begin{aligned} & -\operatorname{Re}\langle y-p_C(y), p_C(x)-p_C(y) \rangle - \operatorname{Re}\langle p_C(y), p_C(x)-p_C(y) \rangle \\ & = -\operatorname{Re}\langle x-p_C(x), p_C(y)-p_C(x) \rangle - \operatorname{Re}\langle y-p_C(y), p_C(x)-p_C(y) \rangle + \\ & \quad + \|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \geq \|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \end{aligned}$$

i.e. :

$$\begin{aligned} \|p_C(x) - p_C(y)\|^2 & \leq \operatorname{Re}\langle x-y, p_C(x)-p_C(y) \rangle \leq |\operatorname{Re}\langle x-y, p_C(x)-p_C(y) \rangle| \\ & \leq \|x-y\| \|p_C(x)-p_C(y)\| \\ & \Rightarrow \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x-y\|. \end{aligned}$$

□

**Proposition 1.3.4.** Soit  $E$  un espace préhilbertien et soit  $F \subset E$  un sev complet. Alors :  $\forall x \in E$ , il existe  $a \in F$  unique t.q.  $\|x - a\| = d(x, F)$ . L'application  $p_F : E \rightarrow F$ ,  $x \mapsto a$  ainsi définie est caractérisée par :

$$p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad x - p_F(x) \in F^\perp$$

*Démonstration.* On remarque que  $F$  est convexe et fermé, d'où l'existence et l'unicité de  $p_F(x)$ . On conclut en remarquant que :

$$\operatorname{Re}\langle x - p_F(x), y - p_F(x) \rangle \leq 0, \quad \forall y \in F$$

et  $y \mapsto y - p_F(x)$  est une bijection  $F \rightarrow F$  donc

$$\operatorname{Re}\langle x - p_F(x), y \rangle \leq 0, \quad \forall y \in F.$$

$F$  est un espace vectoriel donc  $y \in F \iff -y \in F$  et alors :

$$-\operatorname{Re}\langle x - p_F(x), y \rangle \leq 0, \quad \forall y \in F$$

i.e. :

$$\operatorname{Re}\langle x - p_F(x), y \rangle = 0, \quad \forall y \in F.$$

De même,  $F$  est un ev sur  $\mathbb{C}$  donc  $y \in F \iff iy \in F$ . On en déduit :

$$\operatorname{Re}\langle x - p_F(x), iy \rangle = \operatorname{Im}\langle x - p_F(x), iy \rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

et finalement ;

$$\langle x - p_F(x), y \rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

i.e.  $x - p_F(x) \in F^\perp$ . □

**Exercice 2.** Soit  $E$  un espace de Banach. On suppose  $E$  uniformément convexe, i.e. :  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $\delta \in ]0, 1[$  t.q.

$$\forall x, y \in B_E(0, 1), \quad \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| \geq 1 - \delta \Rightarrow \|x - y\| \leq \varepsilon.$$

Soit  $C \subset E$  un convexe fermé non vide.

1. Soit  $x \in E$ . On pose  $\alpha = \inf_{y \in C} \|x - y\|$ . Soit  $(x_n)_{n \geq 0} \in C^{\mathbb{N}}$  une suite t.q. :

$$\forall n \geq 0, \quad \|x_n - x\| \leq \alpha + \frac{1}{n+1}.$$

Montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $E$ .

2. En déduire que la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge vers l'unique solution  $p_C(x)$  du problème :

$$p_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \|x - p_C(x)\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

3. Montrer que

$$\forall x, x' \in E, \quad \|x - p_C(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\| + \left\| \frac{1}{2}(x + x') - p_C\left(\frac{x + x'}{2}\right) \right\|$$

4. Soit  $x, x' \in E$ . On suppose que  $\|x' - p_C(x')\| \leq \|x - p_C(x)\| =: \alpha$ . Montrer que

$$\frac{1}{2\alpha} \|x + x' - p_C(x) - p_C(x')\| \geq 1 - \frac{\|x - x'\|}{2\alpha}.$$

5. Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer qu'il existe une constante  $\eta > 0$  t.q., avec les notations de 4.,

$$\|x - x'\| \leq \eta \Rightarrow \|p_C(x) - p_C(x')\| \leq \alpha\varepsilon + \|x - x'\|.$$

6. Montrer que :

$$\forall x, x' \in E, \quad \left| \|x - p_C(x)\| - \|x' - p_C(x')\| \right| \leq \|x - x'\|.$$

7. En déduire que  $p_C$  est continue sur  $E$ .  
8. En déduire que  $p_C$  est uniformément continue sur les bornés de  $E$ .

### Supplémentaire orthogonal et somme directe

**Définition 1.3.1.** On dit qu'un ev  $E$  est la somme directe algébrique de deux ev  $F$  et  $G$  si  $E = F + G$  avec  $F \cap G = \{0\}$ .

Si  $E$  est un espace préhilbertien on dit que  $E$  est la somme directe orthogonale de  $F$  et  $G$  si  $E = F \oplus G$  avec  $G = F^\perp$ . Alors  $G$  est appelé le supplémentaire orthogonal de  $F$ .

**Théorème 1.3.5.** Soit  $E$  un espace préhilbertien et soit  $F \subset E$  un sev complet.

1. La projection orthogonale  $p_F : E \rightarrow F$  est une application linéaire continue. Si  $F \neq \{0\}$ , alors  $\|p_F\| = 1$ .
2.  $E = F \oplus F^\perp$ .
3.  $F^\perp = \text{Ker}(p_F)$  et  $F^{\perp\perp} = F$ .

*Démonstration.* 1. D'après le Théorème de projection hilbertienne, la projection  $p_F$  est bien définie. Soit  $x, y \in E$  et soit  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

$$p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad p_F(y) \in F \Rightarrow \lambda p_F(x) + \mu p_F(y) \in F$$

et

$$x - p_F(x) \in F^\perp \quad \text{et} \quad y - p_F(y) \in F^\perp$$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y - (\lambda p_F(x) + \mu p_F(y)) = \lambda(x - p_F(x)) + \mu(y - p_F(y)) \in F^\perp.$$

De la Proposition 1.3.4, on déduit que  $p_F(\lambda x + \mu y) = \lambda p_F(x) + \mu p_F(y)$ , i.e.  $p_F$  est linéaire.

$p_F$  étant linéaire et contractante, on a :

$$\forall x \in E, \quad \|p_F(x)\| = \|p_F(x) - p_F(0)\| \leq \|x\| \Rightarrow \|p_F\| \leq 1.$$

De plus :  $\forall x \in E, x \in F \Rightarrow p_F(x) = x$  et  $\|p_F(x)\| = \|x\|$ . Donc  $\|p_F\| = 1$ .

2. Soit  $x \in E$ . On a  $x = x - p_F(x) + p_F(x)$  avec  $x - p_F(x) \in F^\perp$  et  $p_F(x) \in F$  donc  $E = F + F^\perp$ . De plus :

$$\forall x \in F^\perp \cap F, \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

donc  $F \cap F^\perp = \{0\}$ . Finalement,  $E = F \oplus F^\perp$ .

3. Soit  $x \in \text{Ker}(p_F)$ . Alors  $x = x - p_F(x) \in F^\perp$ . Donc  $\text{Ker}(p_F) \subset F^\perp$ .  
 Inversement soit  $x \in F^\perp$ . Par unicité de la décomposition  $x = x - p_F(x) + p_F(x) \in F^\perp \oplus F$  on déduit que  $p_F(x) = 0$ , i.e.  $x \in \text{Ker}(p_F)$ .  
 Finalement :  $\text{Ker}(p_F) = F^\perp$ .

On a :  $F \subset (F^\perp)^\perp$ . Inversement, soit  $x \in F^{\perp\perp}$ . Alors :

$$x - p_F(x) \in F^\perp \Rightarrow \langle x, x - p_F(x) \rangle = 0$$

donc

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x, p_F(x) \rangle = \langle x - p_F(x), p_F(x) \rangle + \langle p_F(x), p_F(x) \rangle = \langle p_F(x), p_F(x) \rangle \\ &= \|p_F(x)\|^2. \end{aligned}$$

De plus (Théorème d Pythagore) :

$$p_F(x) \perp x - p_F(x) \Rightarrow \|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2.$$

On en déduit  $\|x - p_F(x)\|^2 = 0$ , i.e.  $x = p_F(x) \in F$ . Donc  $F^{\perp\perp} \subset F$ .  $\square$

*Remarque 1.* Sous les mêmes hypothèses,  $I - p_F$  est la projection orthogonale sur  $F^\perp$  et on peut écrire  $I - p_F = p_{F^\perp}$ .

**Corollaire 1.3.6.** *Si  $F$  est un sev fermé d'un espace de Hilbert  $H$  alors :  $H = F \oplus F^\perp$  et  $F^{\perp\perp} = F$ .*

*Démonstration.* On se ramène au Théorème 1.3.5 en remarquant que  $F$  fermé dans  $H$  complet est complet.  $\square$

Dans le cas général où  $F$  est un sev non nécessairement fermé d'un espace de Hilbert, on a le résultat suivant.

**Corollaire 1.3.7.** *Soit  $F$  un sev d'un espace de Hilbert  $H$ . On a :*

1.  $F^{\perp\perp} = \overline{F}$ .
2.  $\overline{F} = H \iff F^\perp = \{0\}$ .

*Démonstration.* 1. On remarque que  $F^\perp = \bigcap_{y \in F} \text{Ker}(\phi_y)$  où  $\phi_y : x \mapsto \langle x, y \rangle$  est linéaire continue de norme  $\|\phi_y\| = \|y\|$ ,  $\forall y \in F$ . Donc  $F^\perp$  est fermé comme intersection de fermés. Ceci reste vrai pour  $F^{\perp\perp}$  qui est également fermé. En particulier :

$$F \subset F^{\perp\perp} \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{F^{\perp\perp}} = F^{\perp\perp}.$$

De plus, le Corollaire 1.3.6 entraîne :

$$F \subset \overline{F} \Rightarrow \overline{F}^\perp \subset F^\perp \Rightarrow F^{\perp\perp} \subset \overline{F^{\perp\perp}} = \overline{F}.$$

Finalement :  $F^{\perp\perp} = \overline{F}$ .

2. De ce qui précède on déduit :

$$\overline{F} = H \iff (F^\perp)^\perp = H \iff \overline{F^\perp} = H^\perp \iff F^\perp = \{0\}$$

car  $H^\perp = \{0\}$  par définition du produit scalaire et  $\overline{F^\perp} = F^\perp$  puisque  $F^\perp$  est fermé.  $\square$

**Définition 1.3.2.** Soit  $H$  un espace de Hilbert. Un endomorphisme  $P : H \rightarrow H$  est un opérateur autoadjoint (ou hermitien si  $K = \mathbb{C}$ ) si  $\langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle, \forall x, y \in H$ .

**Proposition 1.3.8.** Soit  $F$  un sev fermé d'un espace de Hilbert  $H$ .

1.  $p_F \circ p_F = p_F$
2.  $p_F$  est auto-adjoint :  $\forall x, y \in H, \langle p_F(x), y \rangle = \langle x, p_F(y) \rangle$ .

*Démonstration.* 1. C'est une conséquence directe de l'unicité de la projection orthogonale sur  $F$ .

2. Soit  $x, y \in H$ .

$$x - p_F(x) \in F^\perp \quad \text{et} \quad p_F(y) \in F \Rightarrow \langle x, p_F(y) \rangle = \langle p_F(x), p_F(y) \rangle.$$

De même :

$$\langle p_F(x), y \rangle = \langle p_F(x), p_F(y) \rangle.$$

Finalement :  $\langle x, p_F(y) \rangle = \langle p_F(x), y \rangle = \langle p_F(x), p_F(y) \rangle$ . □

**Exercice 3.** Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $(K_n)_{n \geq 0}$  une suite de convexes fermés non vides de  $H$ . Soit  $f \in H$ . On pose  $u_n = p_{K_n} f, \forall n \geq 0$ .

1. On suppose que la suite  $(K_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et que  $\bigcap_{n \geq 0} K_n \neq \emptyset$ .
  - (a) Montrer que la suite de terme général  $\|u_n - f\|$  est croissante majorée par  $\|x - f\|, \forall x \in \bigcap_{n \geq 0} K_n$ .
  - (b) Montrer que :

$$\forall n, p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|^2 \leq 2\|u_{n+p} - f\|^2 - 2\|u_n - f\|^2.$$

- (c) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers une limite de la forme  $p_K f$  où  $K$  est un convexe fermé à préciser.
2. On suppose que la suite  $(K_n)_{n \geq 0}$  est croissante.
  - (a) Montrer que  $K = \overline{\bigcup_{n \geq 0} K_n}$  est un convexe fermé.
  - (b) Montrer que la suite de terme général  $\|u_n - f\|$  converge.
  - (c) Montrer que :

$$\forall n, p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|^2 \leq 2\|u_n - f\|^2 - 2\|u_{n+p} - f\|^2.$$

- (d) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $p_K f$ .
- (e) Soit  $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue et bornée inférieurement. On pose :  $\forall n \geq 0, c_n = \inf_{K_n} \varphi$ . Montrer que la suite  $(c_n)_{n \geq 0}$  converge. Identifier sa limite.

## 1.4 Le Théorème de représentation de Riesz

**Corollaire 1.4.1.** Soit  $E$  un espace de Hilbert et soit  $F \subset E$  un sev fermé. Alors :  $\forall x \in E$ , il existe  $a \in F$  unique t.q.  $\|x - a\| = d(x, F)$ . L'application  $p_F : E \rightarrow F, x \mapsto a$  ainsi définie est caractérisée par :

$$p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad x - p_F(x) \in F^\perp$$

*Remarque 2.* Le Corollaire 1.4.1 montre que  $p_F$  est la projection orthogonale sur  $F$ . On en déduit que  $p_F$  est une application linéaire de  $E$  sur  $F$  t.q.  $\|p_F\| = 1$  et  $F^\perp = \text{Ker}p_F$ .

**Proposition 1.4.2** (Théorème de représentation de Riesz). *Soit  $E$  un espace de Hilbert. L'application  $\Phi : E \rightarrow E'$ ,  $x \mapsto \{\phi_x : y \mapsto \langle y, x \rangle\}$  est une isométrie antilinéaire et une bijection de  $E$  sur  $E'$ .*

*Démonstration.* On remarque que  $x \mapsto \{\phi_x : y \mapsto \langle y, x \rangle\}$  est une isométrie de  $E$  dans  $E'$ . Il reste à vérifier qu'elle est surjective. Soit  $F = \text{Ker}(f)$ . Par continuité de  $f$ ,  $F$  est fermé et donc  $E = F \oplus F^\perp$  avec  $F^\perp \sim E/F$ .

*Rappel : Par définition de la relation d'équivalence associée à  $E/F$ ,*

$$x \sim y \iff p_F(x) - p_F(y) = x - y \iff x - p_F(x) = y - p_F(y)$$

*ce qui permet de définir l'application :*

$$E/F \rightarrow F^\perp, \quad x + F \mapsto x - p_F(x).$$

D'après le théorème d'isomorphisme, on a :  $E/F \sim \text{Im}(f) = \mathbb{C}$ , i.e.  $F^\perp \sim \mathbb{C}$ . Donc  $F^\perp = \mathbb{C}u$  avec  $u \in F^\perp \setminus \{0\}$  choisi t.q.  $\|u\| = 1$ . Soit alors  $x \in E$ . De la décomposition :

$$x = \langle x, u \rangle u + p_F(x)$$

on déduit que  $f(x) = \langle x, u \rangle f(u)$ , i.e.,  $f = \phi_{f(u)u}$  avec  $f(u) \neq 0$  par construction de  $u$ . □

**Exercice 4.** Soit  $E$  un espace de Hilbert et soit  $T \in E'$ . Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \|x\|^2 - T(x).$$

1. Montrer que  $f$  est bornée inférieurement sur  $E$  et que cette borne est atteinte sur  $E$ .
2. Soit  $a \in E$  t.q.  $f(a) = \inf_E f$ . Soit  $C$  un convexe fermé. Montrer que

$$\inf_C f = f(p_C(a)).$$

**Corollaire 1.4.3.** *Tout espace de Hilbert est réflexif.*

*Démonstration.* Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $\Phi : H \rightarrow H'$  l'isométrie antilinéaire bijective entre  $H$  et  $H'$ . Comme  $\Phi$  est une isométrie, on définit un produit scalaire sur  $H'$  en posant

$$\forall f, g \in H', \quad \langle f, g \rangle_{H'} = \langle \Phi^{-1}(g), \Phi^{-1}(f) \rangle_H = \overline{\langle \Phi^{-1}(f), \Phi^{-1}(g) \rangle_H}.$$

Alors,  $(f_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $H'$  ssi  $(\Phi^{-1}(f_n))_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $H$ , i.e. convergente dans  $H$ . Par isométrie,  $(f_n)_{n \geq 0}$  est convergente dans  $H'$ . On en déduit que  $H'$  est un espace de Hilbert, donc il existe une isométrie antilinéaire bijective  $\Psi : H' \rightarrow H''$ . Alors,  $\Psi \circ \Phi$  est un isomorphisme de  $H$  sur  $H''$ , i.e.  $H$  est réflexif. □

**Exercice 5.** Soit  $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et soit  $p \in ]1, +\infty[$ . On suppose que :

$$\forall x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell^p, \quad \sum_{n \geq 0} |a_n| |x_n| < +\infty.$$

Montrer que  $a \in \ell^{p'}$ .

**Adjoint d'un opérateur**

**Proposition 1.4.4.** *Soit  $H, K$  deux espaces de Hilbert et soit  $A \in \mathcal{L}(H, K)$  une application linéaire continue. Il existe une unique application linéaire continue  $A^* \in \mathcal{L}(K, H)$  appelée adjointe de  $A$  t.q. :*

$$\forall x \in H, \quad \forall y \in K, \quad \langle Ax, y \rangle_K = \langle x, A^*y \rangle_H.$$

De plus  $\|A^*\| = \|A\|$  et  $A^{**} = A$ .

*Démonstration.* Soit  $y \in K$ . L'application  $\phi_y \circ A : H \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \mapsto \langle Ax, y \rangle$  est linéaire continue comme composée d'applications linéaires continues, et on a  $\phi_y \circ A \in H'$  avec

$$\|\phi_y \circ A\| \leq \|\phi_y\| \|A\| = \|y\|_K \|A\|.$$

On en déduit qu'il existe  $A^*y \in H$  unique t.q.  $\phi_{A^*y} = \phi_y \circ A$ . On remarque que, par antilinéarité de  $y \mapsto \phi_y : \forall y \in K, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\phi_{A^*(\lambda y)} = \phi_{\lambda y} \circ A = \overline{\lambda} \phi_y \circ A = \overline{\lambda} \phi_{A^*y} = \phi_{\lambda A^*y}$$

i.e., par définition de  $A^* : A^*(\lambda y) = \lambda A^*y$ . Donc  $A^*$  est linéaire. De plus :  $\forall y \in K$ ,

$$\|\phi_{A^*y}\| = \|A^*y\| = \|\phi_y \circ A\| \leq \|y\|_K \|A\|$$

donc  $A^*$  est continue de norme  $\|A^*\| \leq \|A\|$ . On remarque que :  $\forall x \in H, \forall y \in K$ ,

$$\phi_{A^*y}(x) = \overline{\phi_{Ax}(y)} \Rightarrow |\phi_{Ax}(y)| \leq \|\phi_{A^*y}\| \|x\| \leq \|A^*\| \|y\| \|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A^*\| \|x\|$$

i.e.  $\|A\| \leq \|A^*\|$ . Finalement :  $\|A\| = \|A^*\|$ . □

**1.5 Systèmes orthonormés et bases hilbertiennes**

**Définition 1.5.1.** Soit  $E$  un espace préhilbertien sur  $\mathbb{K}$ . Un système  $(x_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  et un système orthogonal si  $\langle x_i, x_j \rangle = 0, \forall i \neq j$ .

**Définition 1.5.2.** Soit  $E$  un espace préhilbertien sur  $\mathbb{K}$ . Un système orthogonal  $(x_i)_{i \in I}$  est orthonormé si  $\|x_i\| = 1, \forall i \in I$ .

**Exemple 3.** Dans  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$  muni du produit scalaire usuel, le système  $(e_1, \dots, e_n)$  donné par  $(e_k)_i = \delta_{ik}, i, k \in [[1, n]]$ , est un système orthonormé.

**Exemple 4.** Dans l'espace de Hilbert  $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$  muni du produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{n \geq 0} x_n \overline{y}_n, \forall x = (x_n)_{n \geq 0}, y = (y_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ , le système  $(e_n)_{n \geq 0}$  donné par  $(e_n)_k = \delta_{kn}, \forall k, n \geq 0$  est orthonormé.

**Exemple 5.** Dans l'espace de Hilbert  $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  muni du produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \overline{y}(t) dt$ , le système  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  où  $e_n$  est la fonction  $e_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{int}$ .

**Proposition 1.5.1.** *Soit  $E$  un espace préhilbertien et soit  $(e_i)_{i \in I}$  un système orthonormé. On suppose  $I$  fini. On pose  $F = \text{Vect}\{e_i, i \in I\}$ . Soit  $x, y \in E$ . On a*

1.  $p_F(x) = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ ,
2.  $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle^2$ ,
3.  $\langle p_F(x), y \rangle = \langle x, p_F(y) \rangle = \langle p_F(x), p_F(y) \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$ .

*Démonstration.* 1. Soit  $x \in E$ . On pose  $P(x) = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ . On a :

$$\forall i \in I, \quad \langle x - P(x), e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{j \in I} \langle x, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle = 0$$

donc  $x - P(x) \in F^\perp$ . Comme de plus  $P(x) \in F$ , on en déduit que  $P(x) = p_F(x)$ .

2. Soit  $x \in F$ . D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \|p_F(x)\|^2 &= \langle p_F(x), p_F(x) \rangle = \sum_{i, j \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2. \end{aligned}$$

3. Soit  $x, y \in E$ . On a

$$\langle p_F(x), y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}.$$

□

**Proposition 1.5.2** (Inégalité de Bessel). *Soit  $E$  un espace préhilbertien et soit  $(e_i)_{i \in I}$  un système orthonormé de  $E$ .*

1. Soit  $x \in E$  et soit  $J \subset I$  une partie finie de  $I$ . On a

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \|x - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2$$

2. Soit  $x \in E$ . La famille  $(|\langle x, e_i \rangle|^2)_{i \in I}$  est sommable dans  $\mathbb{R}$  de somme majorée par  $\|x\|^2$  :

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

*Démonstration.* 1. Soit  $x \in E$  et soit  $J \subset I$  une partie finie de  $I$ . On pose  $F = \text{Vect}\{x_i, i \in J\}$ . Alors

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 = \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \|x - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2.$$

2. Soit  $\Lambda$  l'ensemble des parties finies de  $I$ . De ce qui précède on déduit que :

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 := \sup_{J \in \Lambda} \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

□

**Corollaire 1.5.3.** Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $(e_i)_{i \in I}$  un système orthonormé de  $H$ . Pour tout  $x \in H$ , la famille  $(\langle x, e_i \rangle e_i)_{i \in I}$  est sommable de somme vérifiant l'estimation :

$$\left\| \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i \right\| \leq \|x\|.$$

*Démonstration.* Soit  $x \in H$ . D'après la Proposition 1.5.2 et l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$$

i.e. la famille  $(|\langle x, e_i \rangle|^2)_{i \in I}$  est sommable. Soit  $\varepsilon > 0$ . On en déduit qu'il existe  $J_\varepsilon \in \Lambda$  t.q. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \varepsilon.$$

i.e., le système  $(e_i)_{i \in I}$  étant orthonormé :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \left\| \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \varepsilon.$$

La famille  $(\langle x, e_i \rangle e_i)_{i \in I}$  vérifie le critère de Cauchy dans  $H$  qui est complet donc est sommable, de somme  $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$  vérifiant :

$$\forall J \in \Lambda, \quad \left\| \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty.$$

On en déduit :

$$\sup_{J \in \Lambda} \left\| \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty.$$

□

### Base hilbertienne

**Définition 1.5.3.** Soit  $E$  un espace préhilbertien. On appelle base hilbertienne toute famille  $(e_i)_{i \in I}$  de  $E$  orthonormée et totale.

*Remarque 3.* Soit  $H$  un espace de Hilbert. Un système orthonormé  $(e_i)_{i \in I}$  est une base hilbertienne ssi

$$\langle x, e_i \rangle = 0, \quad \forall i \in I \Rightarrow x = 0;$$

En effet, si  $(e_i)_{i \in I}$  est une base hilbertienne et si  $\langle x, e_i \rangle = 0, \forall i \in I$ , alors  $x \in \overline{\text{Vect}\{e_i, i \in I\}^\perp} = \overline{\text{Vect}\{e_i, i \in I\}^\perp} = H^\perp = \{0\}$ . Inversement, si  $\langle x, e_i \rangle = 0, \forall i \in I \Rightarrow x = 0$ , alors  $\text{Vect}\{e_i, i \in I\}^\perp = \overline{\text{Vect}\{e_i, i \in I\}^\perp} = \{0\}$ . Comme  $H = \overline{\text{Vect}\{e_i, i \in I\}} \oplus \overline{\text{Vect}\{e_i, i \in I\}^\perp}$ , alors nécessairement  $H = \overline{\text{Vect}\{e_i, i \in I\}}$ .

**Théorème 1.5.4** (Caractérisation des bases hilbertiennes). Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille orthonormée. Les conditions suivantes sont équivalentes

- (i)  $(e_i)_{i \in I}$  est une base hilbertienne.

$$\begin{aligned}
(ii) \quad & \forall x \in H, x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i \\
(iii) \quad & \forall x, y \in H, \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle} \\
(iv) \quad & \forall x \in H, \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \quad (\text{Egalité de Parseval})
\end{aligned}$$

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Soit  $x \in H$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $y_\varepsilon \in \text{Vect}\{e_i, i \in I\}$  t.q.  $\|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$ . Soit  $\Lambda$  l'ensemble des parties finies de  $I$ . Il existe  $J_\varepsilon \in \Lambda$  et il existe  $(\lambda_i)_{i \in J_\varepsilon} \in \mathbb{K}^{J_\varepsilon}$  t.q.  $y_\varepsilon = \sum_{i \in J_\varepsilon} \lambda_i e_i$ . On pose  $F_{J_\varepsilon} = \text{Vect}\{e_i, i \in J_\varepsilon\}$ .  $F_{J_\varepsilon}$  est un sev de dimension finie de  $H$  et  $p_{F_{J_\varepsilon}}(x) = \sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, e_i \rangle e_i$ . Par définition de  $p_{F_{J_\varepsilon}}$ , on a  $\|x - p_{F_{J_\varepsilon}}(x)\| \leq \|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$ . Soit  $J \in \Lambda$  t.q.  $J_\varepsilon \subset J$ .

$$F_{J_\varepsilon} \subset F_J \Rightarrow \|x - p_{F_J}(x)\| \leq \|x - p_{F_{J_\varepsilon}}(x)\| < \varepsilon$$

i.e. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \|x - p_{F_J}(x)\| < \varepsilon.$$

Donc la famille  $(\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$  est sommable de somme  $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i = x$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Soit  $x \in H$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $y \in H \setminus \{0\}$ . Il existe  $J_\varepsilon \in \Lambda$  t.q. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \|x - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i\| < \varepsilon.$$

Soit  $J \in \Lambda$  t.q.  $J_\varepsilon \subset J$ . On a :

$$\begin{aligned}
|\langle x, y \rangle - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}| &= |\langle x, y \rangle - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle| = |\langle x, y \rangle - \langle \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i, y \rangle| \\
&= |\langle x - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i, y \rangle| \leq \|x - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i\| \|y\| < \varepsilon \|y\|
\end{aligned}$$

Ceci est vrai  $\forall \varepsilon > 0$ , donc la famille  $(\langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle})_{i \in I}$  est sommable de somme :

$$\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle} = \langle x, y \rangle.$$

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Il suffit de poser  $y = x$  dans (iii) pour conclure.

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Soit  $x \in \text{Vect}\{e_i, i \in I\}^\perp$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Par hypothèse, il existe  $J_\varepsilon \in \Lambda(I)$  t.q.  $\forall J \in \Lambda(I)$ ,

$$J_\varepsilon \subset J \Rightarrow 0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 < \varepsilon^2.$$

Soit  $J \in \Lambda(I)$  t.q.  $J_\varepsilon \subset J$ . Alors :

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x - \underbrace{\sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i}_{=p_{F_J}(x)}\|^2 < \varepsilon^2.$$

Mais

$$x \in \overline{\text{Vect}\{e_i, i \in I\}}^\perp \Rightarrow \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i = 0$$

donc  $\|x\| \leq \varepsilon$ . Ceci est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , donc  $x = 0$ . □

**Théorème 1.5.5.** *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne. En particulier tout système orthonormé peut être complété en une base hilbertienne.*

*Démonstration.* Soit  $H$  un espace de Hilbert. On suppose  $H \neq \{0\}$ . Sinon, le résultat est immédiat. Soit  $L$  un système orthonormé de  $H$ . On note  $\mathcal{B}$  l'ensemble des systèmes orthonormés qui contiennent  $L$  ordonné par la relation  $\subset$ . Alors  $\mathcal{B} \neq \emptyset$  car  $L \in \mathcal{B}$ . On veut montrer que  $\mathcal{B}$  est inductif. Soit  $\mathcal{C} = (B_i)_{i \in I}$  une chaîne de  $\mathcal{B}$ . Alors  $B = \cup_{i \in I} B_i$  est un majorant de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{P}(H)$ . Soit  $x, y \in B$ ,  $x \neq y$ , et soit  $i_x, i_y \in I$  t.q.  $x \in B_{i_x}$  et  $y \in B_{i_y}$ . Alors  $\|x\| = \|y\| = 1$ . Comme  $\mathcal{C}$  est totalement ordonnée, on peut supposer  $B_{i_x} \subset B_{i_y}$  et alors  $x, y \in B_{i_y} \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$ . Donc  $B \in \mathcal{B}$ . Du Lemme de Zorn on déduit que  $\mathcal{B}$  admet un élément maximal noté  $B_L$ . Il reste à montrer que  $B_L$  est une famille totale dans  $H$  i.e. que  $\overline{\text{Vect}(B_L)} = H$ . On raisonne par l'absurde en supposant que  $\overline{\text{Vect}(B_L)} \neq H$ . Alors  $\overline{\text{Vect}(B_L)}^\perp \neq \{0\}$ . Soit alors  $x_0 \in \overline{\text{Vect}(B_L)}^\perp$  t.q.  $x_0 \neq 0$ . Alors  $\|x_0\| \neq 0$ . Quitte à remplacer  $x_0$  par  $\frac{x_0}{\|x_0\|}$ , on peut supposer que  $\|x_0\| = 1$ . On en déduit alors que  $B_L \cup \{x_0\}$  est un système orthonormé, ce qui contredit le caractère maximal de  $B_L$ . Donc  $B_L$  est total dans  $H$  et par suite, c'est une base hilbertienne de  $H$ .  $\square$

**Proposition 1.5.6.** *Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un evn et soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille sommable de  $E$  de somme  $x \in E$ . Alors :*

1.  $\forall \varepsilon > 0, \{i \in I, \|x_i\| \geq \varepsilon\}$  est fini.
2.  $\{i \in I, x_i \neq 0\}$  est au plus dénombrable.

*Démonstration.* 1. Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $J_\varepsilon \in \Lambda$  t.q.

$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \left\| \sum_{i \in J} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Soit  $i_0 \in I \setminus J_\varepsilon$ . On pose  $J = \{i_0\}$ . On en déduit :  $\|x_{i_0}\| \leq \varepsilon$ . Donc  $\{i \in I, \|x_i\| \geq \varepsilon\} \subset J_\varepsilon$  est fini.

2. On a

$$\{i \in I, x_i \neq 0\} = \{i \in I, \|x_i\| > 0\} = \cup_{n \geq 1} \left\{ i \in I, \|x_i\| \geq \frac{1}{n} \right\},$$

i.e.  $\{i \in I, x_i \neq 0\}$  est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis, éventuellement vides  $\square$

**Proposition 1.5.7.** *Dans un espace de Hilbert, deux bases hilbertiennes sont équipotentes.*

*Démonstration.* Soit  $H$  un espace de Hilbert de dimension infinie. Soit  $B$  et  $B'$  deux bases de  $H$ . Soit  $e \in B$  et soit  $D_e = \{f \in B', \langle e, f \rangle \neq 0\}$ . La famille  $(\langle e, f \rangle)_{f \in B'}$  est sommable de somme  $e = \sum_{f \in B'} \langle e, f \rangle f$  donc  $D_e$  est dénombrable d'après la Proposition 1.5.6. On note  $D_e = \{f_n^e, n \geq 0\}$ . De plus,  $\forall f \in B'$ ,

$$f = \sum_{e \in B} \langle f, e \rangle e \neq 0 \Rightarrow \exists e \in B \quad \text{t.q.} \quad \langle f, e \rangle \neq 0$$

i.e.  $B' \subset \cup_{e \in B} D_e$ . Soit  $\Phi : B' \rightarrow \mathbb{N} \times B$ ,  $f \mapsto (n, e)$  t.q.  $f \in D_e$  et  $f = f_n^e$ . On remarque que si  $\Phi(f) = \Phi(f') = (n, e)$  alors  $f = f_n^e = f'_n{}^e = f'$  donc  $\Phi$  est une injection de  $B'$  dans  $\mathbb{N} \times B$ . Comme  $B$  est infini par hypothèse sur  $H$ ,  $\mathbb{N} \times B$  est équipotent à  $B$  (admis ou Exercice). Donc  $\Phi$  est une injection de  $B'$  dans un ensemble équipotent à  $B$ . En échangeant les rôles de  $B$  et  $B'$ , on montre qu'il existe une injection  $\Psi : B \rightarrow \mathbb{N} \times B'$  de  $B$  dans un ensemble équipotent à  $B'$ . On en déduit une bijection entre  $B$  et  $B'$ .  $\square$

**Exemple 6.** Soit  $I$  un ensemble non dénombrable. On note

$$\ell^2(I, \mathbb{K}) = \{x = (x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I, \sum_{i \in I} |x_i|^2 < +\infty\}.$$

muni du produit scalaire  $(x, y) \mapsto \sum_{i \in I} x_i \bar{y}_i$ . Alors  $\ell^2(I, \mathbb{K})$  est un espace de Hilbert non séparable. Une base de  $\ell^2(I, \mathbb{K})$  est donnée par la suite  $(e_i)_{i \in I}$  définie par :  $(e_i)_j = \delta_{ij}$ ;  $\forall i, j \in I$ .

**Théorème 1.5.8.** Soit  $H$  un espace de Hilbert de dimension hilbertienne  $I$ . Alors, pour toute base hilbertienne  $(e_i)_{i \in I}$  de  $H$ , l'application

$$H \rightarrow \ell^2(I, \mathbb{K}), \quad x \mapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$$

est une bijection isométrique de  $H$  sur  $\ell^2(I, \mathbb{K})$ .

### Espaces de Hilbert séparables

**Théorème 1.5.9** (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). Soit  $E$  un espace préhilbertien de dimension infinie et soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite libre de  $E$ . On pose :

$$\forall p \geq 0, \quad V_p = \text{Vect}\{f_0, \dots, f_p\}.$$

Alors la suite  $(e_n)_{n \geq 0}$  définie par la récurrence

$$e_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|}, \quad e_{p+1} = \frac{f_{p+1} - pV_p(f_{p+1})}{\|f_{p+1} - pV_p(f_{p+1})\|}$$

est une suite orthonormée t.q. :

$$\forall p \geq 0, \quad V_p = \text{Vect}\{e_0, \dots, e_p\}.$$

Plus précisément :

$$e_{p+1} = \frac{f_{p+1} - \sum_{i=0}^p \langle f_{p+1}, e_i \rangle e_i}{\|f_{p+1} - \sum_{i=0}^p \langle f_{p+1}, e_i \rangle e_i\|}$$

*Démonstration.* Par construction  $\|e_p\| = 1$ ,  $\forall p \geq 0$ .

Soit  $\mathcal{P}(n)$  la propriété :  $(e_0, \dots, e_n)$  est une bon de  $V_n$ .

$\mathcal{P}(0)$  est vraie par définition de  $e_0$ . On suppose  $\mathcal{P}(n)$  vraie et on pose :

$$e_{n+1} = \frac{f_{n+1} - pV_n(f_{n+1})}{\|f_{n+1} - pV_n(f_{n+1})\|}$$

Par définition de  $p_{V_n}$ ,  $e_{n+1} \in V_n^\perp$ . Comme  $\|e_{n+1}\| = 1$ , on en déduit que  $(e_0, \dots, e_{n+1})$  est une famille orthonormée. Par hypothèse de récurrence

$$p_{V_n}(f_{n+1}) = \sum_{i=0}^n \langle f_{n+1}, e_i \rangle e_i \Rightarrow e_{n+1} \in \text{Vect}\{e_0, \dots, e_n, f_{n+1}\} = V_{n+1}$$

donc  $(e_0, \dots, e_{n+1})$  est une bon de  $V_{n+1}$ , i.e.  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. Par récurrence sur  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie,  $\forall n \geq 0$ .  $\square$

**Exemple 7.** Soit  $H = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Par orthonormalisation de Gram-Schmit à partir de la suite  $(t \mapsto t^n)_{n \geq 0}$  on obtient la suite des polynômes de Tchebychev  $(P_n)_{n \geq 0}$  définis par :

$$P_n(t) = \cos(n \text{Arcos}(t)), \quad \forall t \in [-1, 1], \quad \forall n \geq 0.$$

**Théorème 1.5.10.** *Un espace préhilbertien  $E$  est séparable ssi il admet une base hilbertienne dénombrable. Alors, toutes les bases hilbertiennes sont dénombrables.*

*Démonstration.* On suppose que  $E$  est séparable. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite dense dans  $E$  :  $E = \overline{\text{Vect}\{u_n, n \geq 0\}}$ . Soit  $(u_{n_k})_{k \geq 0}$  une sous-suite libre de  $(u_n)_{n \geq 0}$ . Par construction :  $\forall n \geq 0$ ,  $u_n \in \text{Vect}\{u_{n_k}, k \geq 0\}$ , i.e.  $(u_{n_k})_{k \geq 0}$  est totale est libre. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on construit une bon  $(e_k)_{k \geq 0}$  t.q.  $\forall k \geq 0$ ,  $\text{Vect}\{e_0, \dots, e_k\} = \text{Vect}\{u_{n_0}, \dots, u_{n_k}\}$ . On en déduit alors :  $E = \overline{\text{Vect}\{u_{n_k}, k \geq 0\}} = \overline{\text{Vect}\{e_k, k \geq 0\}}$ , i.e.  $(e_k)_{k \geq 0}$  est orthonormée et totale, donc c'est une base hilbertienne dénombrable de  $E$ .

Inversement, on suppose que  $E$  admet une base hilbertienne dénombrable  $(e_n)_{n \geq 0}$ . Alors  $(e_n)_{n \geq 0}$  est une suite totale donc  $E$  est séparable.  $\square$

**Théorème 1.5.11.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable et soit  $(e_n)_{n \geq 0}$  une base hilbertienne de  $H$ . Alors, l'application  $\varphi : H \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ ,  $x \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n \geq 0}$  est un isomorphisme isométrique.*

*Démonstration.* Soit  $x \in H$ . D'après l'identité de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|\varphi(x)\|^2$$

On en déduit que  $\varphi$  est bien définie, i.e.  $\varphi(x) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ ,  $\forall x \in H$ , et que  $\varphi$  préserve la norme. De plus,  $\varphi$  est linéaire (immédiat) donc c'est une isométrie linéaire. Il reste à vérifier que  $\varphi$  est surjective. Soit  $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ . On pose :

$$\forall n \geq 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^n a_k e_k.$$

Alors :  $\forall n, p \geq 0$ ,

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2.$$

Par hypothèse sur  $a$ ,  $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < +\infty$  donc :

$$\lim_{n,p \rightarrow +\infty} \|S_{n+p} - S_n\|^2 = 0,$$

i.e. la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $H$  donc convergente vers une limite  $x = \sum_{n \geq 0} a_n e_n \in H$  par complétude de  $H$ . On en déduit que  $a = \varphi(x)$  et que  $\varphi$  est surjective.  $\square$

**Exemple 8.** Soit  $a < b$ . On pose  $T = b - a$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . On considère l'espace  $L^2([a, b], \mathbb{C})$  muni du produit scalaire :  $(f, g) \mapsto \frac{1}{T} \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit la fonction  $T$ -périodique  $e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto e^{in\omega t}$ .

**Proposition 1.5.12.** La suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $L^2([a, b], \mathbb{C})$ . En particulier,  $L^2([a, b], \mathbb{C})$  est isométriquement isomorphe à  $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ .

*Démonstration.* La suite  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée. En effet :  $\forall n, p \geq 0$ ,

$$\langle e_n, e_p \rangle = \frac{1}{T} \int_a^b e_n(t) \overline{e_p(t)} dt = \frac{1}{T} \int_a^b e^{i(n-p)\omega t} dt.$$

Si  $p = n$ , alors

$$\|e_n\|^2 = \frac{1}{T} \int_a^b dt = 1.$$

Si  $p \neq n$ , alors :  $\omega b = \omega a + 2\pi \Rightarrow$

$$\langle e_n, e_p \rangle = \frac{1}{T} \frac{e^{i(n-p)\omega b} - e^{i(n-p)\omega a}}{(n-p)\omega} = 0$$

Il reste à montrer que  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est totale. Soit  $f \in L^2([a, b], \mathbb{C})$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Par convolution, on construit  $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$  t.q.  $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$  et  $g(a) = g(b) = 0$ . On peut prolonger  $g$  par périodicité à  $\mathbb{R}$  en une fonction  $T$ -périodique  $g \in \mathcal{C}_{T,\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . D'après le Théorème de Stone-Weierstrass, l'ensemble des polynômes trigonométriques  $\mathcal{P} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$  est dense dans  $\mathcal{C}_{T,\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Soit  $P \in \mathcal{P}$  t.q.  $\|g - P\|_{\infty} \leq \varepsilon$ . On en déduit :

$$\|f - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_{\infty} \leq 2\varepsilon.$$

Il en résulte que  $\overline{\text{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}} = L^2([a, b], \mathbb{C})$ .  $\square$

### 1.5.1 Autres bases hilbertiennes classiques de $L^2$

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle. On se propose de construire des bases orthogonales de  $L^2(I)$  lorsque le produit scalaire considéré est :

$$(f, g) \mapsto \int_I f(x)g(x)\rho(x)dx \quad (1.1)$$

où  $\rho$  est continue sur  $I$ , à valeurs  $> 0$  et vérifie :

$$\int_I x^n \rho(x) dx < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On note  $L^2(I, \rho)$  l'espace  $L^2(I)$  muni du produit scalaire (1.1).

*Remarque 4.* Lorsque  $I$  est borné,  $\mathcal{C}^\infty(\bar{I})$  est dense dans  $L^2(I, \rho)$  et le théorème de Stone-Weierstrass implique que l'espace des fonctions polynômes est dense dans  $\mathcal{C}^\infty(\bar{I})$ , donc dense dans  $L^2(I, \rho)$  et les polynômes orthogonaux pour  $\rho$  forment une base orthogonale de  $L^2(I, \rho)$ . Si  $I$  n'est pas borné, il existe des poids pour lesquels la suite des polynômes orthogonaux n'est plus une base.

### Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont les polynômes orthogonaux associés au poids  $\rho \equiv 1$  sur  $I = ]-1, 1[$ . Ils ont donnés par la formule :

$$\ell_n(x) = ((x^2 - 1)^n)^{(n)}, \quad \forall x \in ]-1, 1[$$

et vérifient :

$$\|\ell_n\|_2 = 2^n n! \sqrt{\frac{2}{2n+1}}, \quad \forall n \geq 0.$$

Il est usuel de normaliser les polynômes de Legendre en posant :

$$L_n := \frac{\ell_n}{2^n n!}$$

et alors  $L_n(1) = 1, \forall n \geq 0$ .

### Fonctions d'Hermite

Cette base de  $L^2(\mathbb{R})$  joue un rôle important dans l'étude de la transformation de Fourier et dans l'étude de l'oscillateur harmonique.

On commence par montrer que la suite de fonctions  $g_k : x \mapsto e^{-x^2/2} x^k, k \in \mathbb{N}$ , est un système total dans  $L^2(\mathbb{R})$ . En effet, soit  $g \in L^2(\mathbb{R})$  t.q.  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} x^k g(x) dx = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ , et soit  $G$  la fonction de la variable complexe définie par :

$$G(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixz} e^{-x^2/2} g(x) dx \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Soit  $z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ . On remarque que :

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{ixz} e^{-x^2/2} g(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta x} e^{-x^2/2} |g(x)| dx.$$

Soit  $R > 0$  et soit  $|\eta| \leq R$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |e^{ixz} e^{-x^2/2} g(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{R|x|} e^{-x^2/2} |g(x)| dx = e^{R^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(|x|-R)^2/2} |g(x)| dx \\ &\leq e^{R^2/2} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-(|x|-R)^2} dx \right)^{1/2} \|g\|_2 = e^{R^2/2} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right)^{1/2} \|g\|_2 < +\infty, \end{aligned} \quad (1.2)$$

donc  $G$  est bien définie sur la bande compacte  $|\operatorname{Im} z| \leq R, \forall R > 0$ , donc sur  $\mathbb{C}$ . De plus,  $G$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  car  $z \mapsto e^{ixz} e^{-x^2/2} g(x)$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ , p.p.t.  $x \in \mathbb{R}$  et on a :  $\forall R > 0, \forall |\operatorname{Im} z| \leq R$ ,

$$|e^{ixz} e^{-x^2/2} g(x)| \leq e^{R^2/2} e^{-(|x|-R)^2/2} |g(x)|$$

où la fonction dominante  $x \mapsto e^{-(|x|-R)^2/2}|g(x)|$  est dans  $L^2(\mathbb{R})$  d'après (1.2). Du Théorème de convergence dominée de Lebesgue on déduit que  $G$  est holomorphe sur la bande compacte  $|\operatorname{Im}z| \leq R, \forall R > 0$ , donc sur  $\mathbb{C}$ . En particulier, les dérivées  $G^{(k)}$  de  $G, k \in \mathbb{N}$ , se calculent par dérivation sous le signe somme, i.e. :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad G^{(k)}(z) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{ixz} e^{-x^2/2} g(z) dz$$

d'où on déduit que :

$$G^{(k)}(0) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{-x^2/2} g(x) dx = 0$$

par hypothèse sur  $g$ . On en déduit que  $G \equiv 0$ , i.e.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixz} e^{-x^2/2} g(x) dx = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

La transformation de Fourier étant injective sur  $L^1(\mathbb{R})$ , il en résulte que  $e^{-x^2/2}g(x) = 0$  p.p. dans  $\mathbb{R}$ , i.e.  $g = 0$ . Cela achève de montrer que la suite  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est totale dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt permet d'en déduire une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$ .

### Fonctions de Laguerre

On pose :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}_n(x) = e^{-x/2} L_n(x) \quad \text{où} \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

**Exercice 6.** Soit à résoudre : trouver  $u : [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto u(t, x)$ , solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad (1.3)$$

1. Montrer que  $u$  se prolonge sur  $[0, T] \times [-1, 1]$  en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  impaire en  $x \in [-1, 1]$ .
2. Montrer qu'il existe une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  de solutions de (1.3) de la forme  $u_n(t, x) = \phi_n(t) v_n(x)$  où  $v_n$  peut être explicité dans la restriction à  $[0, 1]$  d'une base hilbertienne de  $L^2([-1, 1], \mathbb{C}), \forall n \geq 1$ .
3. Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une base hilbertienne de  $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$ . On pose :

$$\forall n \geq 0, \quad f_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n + e_{-n}), \quad f_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n - e_{-n}).$$

Montrer que la famille  $(f_n)_{n \geq 0}$  est une base hilbertienne de  $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$ .

4. En déduire que la solution générale de (1.3) s'écrit :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin(\pi n x), \quad \text{p.p. dans } [0, T] \times [0, 1].$$

où  $(\alpha_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ .

5. Résoudre (1.3) lorsque  $u$  vérifie en outre la condition initiale :  $u(0, x) = x^2$  sur  $[0, 1]$ .

6. Résoudre (1.3) dans le cas d'une condition initiale  $u(0, x) = f(x)$  sur  $[0, 1]$  avec  $f \in C^\infty([0, 1])$ .

**Exercice 7.** 1. Soit  $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto e^{-|x|}$ . Montrer que  $K$  admet une transformée de Fourier. Calculer  $\hat{K}$ .

Dans la suite on considère le problème :  $y'' - y = f$  dans  $\mathbb{R}$ .

2. On note  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$  t.q. :  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ ,  $p_{\alpha, \beta}(g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha g^{(\beta)}(x)| < +\infty$ . On suppose que  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

- (a) On suppose que  $y \in L^1(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{y}(\xi) = -\frac{\hat{f}(\xi)}{1 + 4\pi^2 \xi^2}.$$

- (b) En déduire qu'il existe une unique solution  $y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

3. On suppose que  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

- (a) Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\xi \mapsto -\frac{\hat{f}(\xi)}{1 + 4\pi^2 \xi^2}$ . Montrer que l'équation  $\hat{y} = g$  admet une unique solution  $y$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

- (b) Montrer que :  $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\int_{\mathbb{R}} y(x)(\varphi''(x) - \varphi(x))dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$ .

- (c) En déduire qu'il existe  $y'' \in L^2(\mathbb{R})$  t.q.  $y'' - y = f$ .

## 1.6 Théorèmes de Lax-Milgram et Stampacchia

Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $f : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  une forme sesquilinéaire ( bilinéaire si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ).

1. L'application  $f$  est continue ssi :  $\sup_{(x, y) \in H \times H} \frac{|f(x, y)|}{\|x\| \|y\|} < +\infty$ , i.e. ssi il existe une constante  $M > 0$  t.q.

$$\forall (x, y) \in H \times H, \quad |f(x, y)| \leq M \|x\| \|y\|.$$

2. L'application  $f$  est dite coercive si il existe  $\alpha > 0$  t.q.

$$\forall x \in H, \quad \operatorname{Re} f(x, x) \geq \alpha \|x\|^2.$$

**Théorème 1.6.1** (Stampacchia). *Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $f : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  une forme sesquilinéaire continue et coercive. Soit  $C \subset H$  un convexe fermé non vide de  $H$ . Alors,  $\forall \varphi \in H'$ , il existe un unique  $u \in H$  solution de :*

$$u \in C \quad \text{et} \quad \forall v \in C, \quad \operatorname{Re} \bar{\varphi}(v - u) \leq \operatorname{Re} f(u, v - u).$$

*De plus, si  $f$  est hermitienne (ou symétrique si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), alors  $u$  est l'unique solution de :*

$$u \in C \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} f(u, u) - \operatorname{Re} \bar{\varphi}(u) = \min_{v \in C} \left( \frac{1}{2} f(v, v) - \operatorname{Re} \bar{\varphi}(v) \right)$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in H'$ . Pour tout  $u \in H$ ,  $v \mapsto \overline{f(u, v)}$  est une forme linéaire continue sur  $H$ , donc d'après le Théorème de Représentation de Riesz, il existe un unique  $Au \in H$  t.q.

$$\forall v \in H, \quad \langle v, Au \rangle = \overline{f(u, v)} \iff \forall v \in H, \quad \langle Au, v \rangle = f(u, v).$$

et l'application  $A : H \rightarrow H$ ,  $u \mapsto Au$  est linéaire avec

$$\forall u, v \in H, \quad |\phi_{Au}(v)| = |\langle Au, v \rangle| = |f(u, v)| \leq M\|u\|\|v\| \Rightarrow \|Au\| \leq M\|u\|$$

donc  $A$  est continue de norme  $\|A\| \leq M$ . De même il existe  $a \in H$  unique t.q.

$$\forall v \in H, \quad \varphi(v) = \langle v, a \rangle.$$

Soit  $u \in C$ . On a :  $\forall v \in C$

$$\operatorname{Re}f(u, v-u) \geq \operatorname{Re}\overline{\varphi}(v-u) \iff \operatorname{Re}\langle Au, v-u \rangle \geq \operatorname{Re}\langle a, v-u \rangle \iff \operatorname{Re}\langle a-Au, v-u \rangle \leq 0$$

$$\iff \operatorname{Re}\langle \rho a - \rho Au, v-u \rangle \leq 0, \quad \forall \rho > 0$$

$$\iff \operatorname{Re}\langle (\rho a - \rho Au + u) - u, v-u \rangle \leq 0, \quad \forall \rho > 0$$

$$\iff u = p_C(\rho a - \rho Au + u), \quad \forall \rho > 0.$$

Soit  $g_\rho : C \rightarrow C$ ,  $u \mapsto p_C(\rho a - \rho Au + u)$ ,  $\forall \rho > 0$ . Comme  $H$  est complet il reste à vérifier que  $g_\rho$  est contractante pour certaines valeurs de  $\rho > 0$ . Soit  $\rho > 0$ . On a :  $\forall u, u' \in C$ ,

$$\begin{aligned} \|g_\rho(u) - g_\rho(u')\|^2 &\leq \|u - u' - \rho A(u - u')\|^2 = \\ &= \|u - u'\|^2 - 2\rho \operatorname{Re}\langle u - u', A(u - u') \rangle + \rho^2 \|A(u - u')\|^2 \end{aligned}$$

avec

$$\operatorname{Re}\langle u - u', A(u - u') \rangle = \operatorname{Re}f(u - u', u - u') \geq \alpha \|u - u'\|^2$$

donc

$$\|g_\rho(u) - g_\rho(u')\|^2 \leq \|u - u'\|^2 (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2).$$

On fixe  $\rho \in ]0, \frac{2\alpha}{M^2}[$ . Alors  $g_\rho : C \rightarrow C$  est strictement contractante de rapport  $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2 \in ]0, 1[$ . Du Théorème du point fixe de Banach, on déduit que  $g_\rho$  admet un unique point fixe  $u \in C$ . Par construction,  $u$  répond à la première partie de l'énoncé.

On suppose que  $f$  est hermitienne (symétrique si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ). Alors :  $\forall v \in C$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f(u, u) - \frac{1}{2}f(v, v) - \operatorname{Re}\overline{\varphi}(u - v) &\leq \frac{1}{2}f(u, u) - \frac{1}{2}f(v, v) - \operatorname{Re}f(u, u - v) = \\ &= -\frac{1}{2}f(u, u) - \frac{1}{2}f(v, v) + \operatorname{Re}f(u, v) = -\frac{1}{2}f(u - v, u - v) \leq -\alpha \|u - v\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

i.e. :

$$\forall v \in C, \quad \frac{1}{2}f(u, u) - \operatorname{Re}\overline{\varphi}(u) \leq \frac{1}{2}f(v, v) - \operatorname{Re}\overline{\varphi}(v).$$

□

*Remarque 5.* On a utilisé le Théorème du Point fixe de Banach.

**Théorème 1.6.2** (Point fixe de Banach). *Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $A \subset E$  un fermé. Soit  $f : E \rightarrow E$  t.q.  $f(A) \subset A$ . On suppose que  $f$  est strictement contractante i.e qu'il existe  $\lambda \in ]0, 1[$  t.q.*

$$\forall x, y \in E, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|.$$

Alors  $f$  admet un unique point fixe dans  $A$ .

*Démonstration.* Soit  $x_0 \in A$ . On pose :  $\forall n \geq 0, x_{n+1} = f(x_n)$ . On remarque que

$$\forall n \geq 1, \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \lambda \|x_n - x_{n-1}\| \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|.$$

donc :  $\forall n, p \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{p-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \lambda^k \|x_1 - x_0\| = \lambda^n \frac{1 - \lambda^p}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

On en déduit que la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy dans  $E$ , donc convergente dans  $E$ . Soit  $a \in E$  sa limite. Par construction :  $\forall n \geq 0, x_n \in A$  et  $A$  est fermé par hypothèse, donc  $a \in \bar{A} = A$ .

Par hypothèse,  $f$  est continue donc  $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$ , i.e.  $a$  est un point fixe pour  $f$ . Soit  $a' \in E$  un point fixe de  $f$ . On a :

$$\|a - a'\| = \|f(a) - f(a')\| \leq \lambda \|a - a'\| \Rightarrow (1 - \lambda) \|a - a'\| \leq 0 \Rightarrow a = a'.$$

□

**Théorème 1.6.3** (Lax-Milgram). *Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $f : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  une forme sesquilinéaire continue et coercive. Alors  $\forall \varphi \in H'$ , il existe un unique  $u \in H$  solution de :*

$$\forall v \in H, \quad f(u, v) = \overline{\varphi}(v).$$

*De plus, si  $f$  est hermitienne (ou symétrique si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), alors  $u$  est l'unique solution de :*

$$\frac{1}{2} f(u, u) - \overline{\varphi}(u) = \min_{v \in H} \left( \frac{1}{2} f(v, v) - \operatorname{Re} \overline{\varphi}(v) \right)$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in H'$ . D'après le Théorème de Stampacchia appliqué avec  $C = H$ , il existe  $u \in H$  unique solution de

$$\forall v \in H, \quad \operatorname{Re} f(u, v - u) \geq \operatorname{Re} \overline{\varphi}(v - u).$$

L'application  $v \mapsto u - v$  est une bijection de  $H$  sur  $H$ , donc

$$\forall w \in H, \quad \operatorname{Re} f(u, w) \geq \operatorname{Re} \overline{\varphi}(w).$$

On en déduit, en remplaçant  $w \in H$  par  $-w \in H$  que

$$\forall w \in H, \quad \operatorname{Re} f(u, w) = \operatorname{Re} \overline{\varphi}(w).$$

En remplaçant  $w \in H$  par  $iw \in H$ , on en déduit ensuite :

$$\forall w \in H, \quad \operatorname{Im} f(u, w) = \operatorname{Im} \bar{\varphi}(w).$$

i.e. :

$$\forall w \in H, \quad f(u, w) = \bar{\varphi}(w).$$

On suppose  $f$  hermitienne. Soit  $v \in H$ . On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f(u, u) - \frac{1}{2}f(v, v) - \operatorname{Re}\bar{\varphi}(u - v) &= \frac{1}{2}f(u, u) - \frac{1}{2}f(v, v) - \operatorname{Re} f(u, u - v) = \\ &= -\frac{1}{2}f(u, u) - \frac{1}{2}f(v, v) + \operatorname{Re} f(u, v) = -\frac{1}{2}f(u - v, u - v) \leq -\alpha\|u - v\|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

□

**Exercice 8.** Soit  $H$  un espace de Hilbert. Soit  $S \in \mathcal{L}(H)$  t.q.  $S^* = S$  et  $\langle Su, u \rangle \in \mathbb{R}^+$ ,  $\forall u \in H$ .

1. Montrer que  $\operatorname{Ker}(S) = \operatorname{Im}(S)^\perp$ .
2. Dédire du Théorème de Lax-Milgram que  $I + tS$  est bijectif,  $\forall t > 0$ .
3. Soit  $t > 0$  et soit  $f \in H$ , On pose  $u_t = (I + tS)^{-1}f$ .
  - (a) Montrer que si  $f \in \operatorname{Ker}(S)$ , alors  $u_t = f$ .
  - (b) Montrer que si  $f \in \operatorname{Im}S$ , alors il existe  $v \in H$  t.q. :  $t\|u_t\| \leq \|v\|$ .
  - (c) En déduire que :  $\forall f \in \operatorname{Im}S$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (I + tS)^{-1}f = 0$ .
  - (d) Montrer que  $\forall f \in H$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (I + tS)^{-1}f = p_{\operatorname{Ker}S}f$ .

- Exercice 9.**
1. Montrer que l'application  $(u, v) \mapsto \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$  est un produit scalaire sur  $E = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), u(0) = u(1) = 0\}$ .
  2. Montrer que l'application  $(u, v) \mapsto \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 x^2 u(x)v(x)dx$  est une forme bilinéaire symétrique et coercive sur  $E$ .
  3. Dédire du Théorème de Lax-Milgram l'existence d'une solution du problème avec conditions initiales :
 
$$-u'' + x^2u = x^3, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

# Chapitre 2

## Le Théorème de Hahn-Banach

### 2.1 Le Théorème de Hahn-Banach analytique

**Théorème 2.1.1** (Le Théorème de Hahn-Banach (Forme analytique)). Soit  $E$  un ev sur  $\mathbb{R}$  et soit  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application vérifiant :

1.  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E, p(tx) = tp(x)$  ;
2.  $\forall x, y \in E, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ .

Soit  $F \subset E$  un sev de  $E$  et soit  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire t.q. :  $\forall x \in F, f(x) \leq p(x)$ . Alors il existe une application linéaire  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.

1.  $g|_F = f$  ;
2.  $\forall x \in E, g(x) \leq p(x)$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des paires  $(F', h)$  où  $F' \subset E$  est un sev de  $E$  contenant  $F$  et où  $h : F' \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme linéaire prolongeant  $f$  sur  $F'$  t.q.  $h \leq p$  sur  $F'$ . On munit  $\mathcal{E}$  de la relation d'ordre :

$$(F'_1, h_1) \subset (F'_2, h_2) \iff F'_1 \subset F'_2 \quad \text{et} \quad h_2|_{F'_1} = h_1.$$

Alors  $\mathcal{E} \neq \emptyset$  car  $(F, f) \in \mathcal{E}$ . De plus,  $\mathcal{E}$  est inductif. En effet. Si  $C \subset \mathcal{E}$  est une chaîne, alors  $F_0 = \cup_{F' \in C} F'$  est un sev de  $E$  contenant  $F$  et  $h_0 : F_0 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h_0|_{F'} = h, \forall (F', h) \in C$ , est une forme linéaire sur  $F_0$ . De plus,  $(F_0, h_0)$  est un majorant de  $C$  dans  $\mathcal{E}$ . Du Lemme de Zorn, on déduit que  $\mathcal{E}$  admet un élément maximal  $(F_g, g) \in \mathcal{E}$ . On suppose que  $F_g \neq E$ . Soit alors  $x_0 \in E \setminus F_g$ . On a :  $\forall x, y \in F_g$ ,

$$g(x) - g(y) = g(x - y) \leq p(x - y) \leq p(x + x_0) + p(-y - x_0) \iff$$

$$\iff -g(y) - p(-y - x_0) \leq -g(x) + p(x + x_0).$$

On pose  $S = \sup_{y \in F_g} -g(y) - p(-y - x_0)$ ,  $I = \inf_{x \in F_g} -g(x) + p(x + x_0)$ . Alors  $S \leq I$ . Soit  $a \in [S, I]$ . Sur  $\mathbb{R}x_0 + F_g = \mathbb{R}x_0 \oplus F_g$  qui est une somme directe on définit  $h : \mathbb{R}x_0 \oplus F_g \rightarrow \mathbb{R}$  en posant :  $\forall w = tx_0 + x \in \mathbb{R}x_0 \oplus F_g, h(w) = ta + g(x)$ .

On vérifie immédiatement que  $h$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}x_0 \oplus F_g$ . Si  $t > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{h(w)}{t} &= a + g\left(\frac{x}{t}\right) \leq I + g\left(\frac{x}{t}\right) \leq -g\left(\frac{x}{t}\right) + p\left(\frac{x}{t} + x_0\right) + g\left(\frac{x}{t}\right) = p\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = \\ &= \frac{1}{t}p(x + tx_0) = \frac{1}{t}p(w). \end{aligned}$$

Alors  $t > 0 \Rightarrow h(w) \leq p(w)$ . Si  $t < 0$ , alors

$$\begin{aligned} -\frac{h(w)}{t} &= -a - g\left(\frac{x}{t}\right) \leq -S - g\left(\frac{x}{t}\right) \leq g\left(\frac{x}{t}\right) + p\left(-\frac{x}{t} - x_0\right) - g\left(\frac{x}{t}\right) = p\left(-\frac{x}{t} - x_0\right) = \\ &= -\frac{1}{t}p(x + tx_0) = -\frac{1}{t}p(w). \end{aligned}$$

Alors  $t < 0 \Rightarrow h(w) \leq p(w)$ . Dans tous les cas :  $t \neq 0 \Rightarrow h(w) \leq p(w)$ . Si  $t = 0$ , alors  $w = x \in F_g$  et  $h(w) \leq p(w)$  par définition de  $\mathcal{E}$ . Finalement :  $\forall w \in \mathbb{R}x_0 \oplus F_g$ ,  $h(w) \leq p(w)$ , ce qui contredit le caractère maximal de  $(F_g, h)$ . Donc  $F_g = E$ .  $\square$

**Corollaire 2.1.2** (Prolongement par continuité). *Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un evn sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $F \subset E$  un sev de  $E$  et soit  $f : F \rightarrow \mathbb{K}$  une forme linéaire continue. Alors, il existe  $g \in E'$  t.q.  $g|_F = f$  et  $\|g\| = \|f\|$ .*

*Démonstration.* 1. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on pose :  $\forall x \in E$ ,  $p(x) = \|f\|\|x\|$ , Alors  $f(x) \leq |f(x)| \leq p(x)$ ,  $\forall x \in F$ . Du Théorème de Hahn-Banach analytique, on déduit qu'il existe  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  linéaire t.q.  $g|_F = f$  et  $g(x) \leq p(x)$ ,  $\forall x \in E$ . On a  $\forall x \in E$ ,  $g(-x) = -g(x) \leq p(-x) = p(x)$ , donc :  $-p(x) \leq g(x) \leq p(x)$ , i.e.  $|g(x)| \leq \|f\|\|x\|$ . Il en résulte :  $\forall x \in E \setminus \{0\}$ ,  $\frac{|g(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|$ , donc  $\|g\| \leq \|f\|$ . De plus,  $g|_F = f \Rightarrow \|g\| \geq \|f\|$ . Donc  $\|g\| = \|f\|$ .

2. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , on pose  $f_1 = \operatorname{Re}(f)$ ,  $f_2 = \operatorname{Im}(f)$ . On vérifie immédiatement que  $f_1$  et  $f_2$  sont des formes  $\mathbb{R}$ -linéaires sur  $F$ . On a :  $\forall x \in F$ ,  $|f_1(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$ , donc  $f_1$  est continue sur  $F$  avec  $\|f_1\| \leq \|f\|$ . Du cas réel, on déduit qu'il existe  $g_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$ -linéaire et continue sur  $E$  t.q.  $\|g_1\| = \|f_1\|$ . On remarque que :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad f(ix) = if(x) &\iff f_1(ix) + if_2(ix) = if_1(x) - f_2(x) \\ &\Rightarrow f_2(x) = -f_1(ix). \end{aligned}$$

On en déduit que l'application  $g_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g_2(x) = -g_1(ix)$  est une forme  $\mathbb{R}$ -linéaire continue sur  $E$  qui prolonge  $f_2$ . Alors  $g(x) := g_1(x) + ig_2(x)$  prolonge  $f$  sur  $E$  par construction. On a aussi :

$$\forall x \in E, \quad g_1(ix) = -g_2(x), \quad g_2(ix) = g_1(x).$$

Il en résulte :  $\forall \lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ ,  $\forall x \in E$ ,

$$\begin{aligned} g(\lambda x) &= g_1(ax) + g_1(ibx) + ig_2(ax) + ig_2(ibx) = \\ &= ag_1(x) + bg_1(ix) + iag_2(x) + ibg_2(ix) = \\ &= ag_1(x) - bg_2(x) + iag_2(x) + ibg_1(x) = (a + ib)g(x) \end{aligned}$$

i.e.  $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ , donc  $g$  est une forme  $\mathbb{C}$ -linéaire sur  $E$ . Soit  $x \in E$  t.q.  $g(x) \neq 0$ . On pose :  $g(x) = |g(x)|e^{i\alpha(x)}$ . Alors

$$\begin{aligned} |g(x)| &= g(x)e^{-i\alpha(x)} = g(e^{-i\alpha(x)}x) = g_1(e^{-i\alpha(x)}x) = |g_1(e^{-i\alpha(x)}x)| \leq \\ &\leq \|g_1\| \|e^{-i\alpha(x)}x\| = \|g_1\| \|x\| = \|f_1\| \|x\| \leq \|f\| \|x\|. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\|g\| \leq \|f\|$ . De plus  $g|_F = f \Rightarrow \|g\| \geq \|f\|$ . Il en résulte que  $\|g\| = \|f\|$ . □

**Exercice 10.** Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $V \subset H$  un sev dense dans  $H$ . On suppose que  $V$  est muni d'une norme  $\|\cdot\|_V$  qui en fait un espace réflexif et qui rend continue l'injection canonique  $V \subset H$ , i.e. qu'il existe une constante  $C > 0$  t.q.

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_H \leq C\|v\|_V.$$

1. On considère l'opérateur antilinéaire  $T : H \rightarrow V'$ ,  $f \mapsto Tf$  t.q.

$$\forall v \in V, \quad Tf(v) = \langle v, f \rangle.$$

Montrer que :  $\forall f \in H, \|Tf\|_{V'} \leq C\|f\|_H$ .

2. Montrer que  $T$  est injective.
3. Soit  $v \in V$  t.q.  $Tf(v) = 0, \forall f \in H$ . Que peut-on dire de  $v$  ?
4. En déduire que  $T(H)$  est dense dans  $V'$ .
5. Soit  $\varphi \in V'$ . Montrer que  $\varphi \in T(H)$  ssi il existe une constante  $a > 0$  t.q.  $\forall v \in V, |\varphi(v)| \leq a\|v\|_H$ .

**Corollaire 2.1.3.** Soit  $E \neq \{0\}$  un ev sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et soit  $x_0 \in E \setminus \{0\}$ . Il existe  $\phi \in E'$  t.q.  $\phi(x_0) = \|x_0\|$  et  $\|\phi\| = 1$ .

*Démonstration.* Soit  $\phi : \mathbb{K}x_0 \rightarrow \mathbb{K}$  définie par  $\phi(tx_0) = t\|x_0\|, \forall t \in \mathbb{K}$ . Alors  $|\phi(tx_0)| = |t|\|x_0\| = \|tx_0\|$ , donc  $\|\phi\| = 1$  et  $\phi$  est une forme linéaire continue sur  $F = \mathbb{K}x_0$ . On en déduit que  $\phi$  se prolonge en une application encore notée  $\phi$  linéaire sur  $E$  t.q.  $\|\phi\| = 1$ . Par construction  $\phi(x_0) = \|x_0\|$ . □

**Corollaire 2.1.4.** Soit  $E \neq \{0\}$  un ev. Alors :

$$\forall x, y \in E, \quad x \neq y \Rightarrow \exists f \in E' \quad \text{t.q.} \quad f(x) \neq f(y).$$

*Démonstration.* Soit  $x, y \in E, x \neq y$ . Alors  $x_0 := x - y \neq 0$ . Soit  $f \in E'$  t.q.  $f(x_0) = \|x_0\|$  et  $\|f\| = 1$ . Alors  $f(x) - f(y) = f(x_0) = \|x - y\| > 0$  car  $x - y \neq 0$ , i.e.  $f(x) \neq f(y)$ . □

**Exercice 11.** Soit  $E$  un evn et soit  $F \subset E, F \neq E$ , un sev fermé de  $E$ . Soit  $x_0 \in E \setminus F$ . Alors  $\exists f \in E'$  t.q.  $f(x_0) = d(x_0, F) > 0$  et  $f|_F = 0$ .

Soit  $\phi$  définie sur  $\mathbb{R}x_0$  par :  $\forall t \in \mathbb{R}, \phi(tx_0) = td(x_0, F)$ . Comme  $F$  est fermé,  $x_0 \notin F \Rightarrow d(x_0, F) > 0$  et  $\phi \neq 0$ . Alors :  $\forall t \in \mathbb{R}, \phi(tx_0) \leq |t|d(x_0, F) = d(tx_0, F)$ . On vérifie immédiatement que  $p : x \mapsto d(x, F)$  est une semi-norme sur  $E$ . Du théorème de Hahn-Banach on déduit que  $\phi$  se prolonge à  $E$  en une forme linéaire encore notée  $\phi$  t.q.  $\phi(x) \leq d(x, F), \forall x \in E$ . On a alors :  $\forall x \in E,$

$$\phi(x) \leq d(x, F) \text{ et } \phi(-x) = -\phi(x) \leq d(-x, F) = d(x, F) \Rightarrow |\phi(x)| \leq d(x, F).$$

En particulier :  $\forall x \in E, |\phi(x)| \leq d(x, F) \leq \|x\|$ , donc  $\phi \in E'$  et  $\|\phi\| \leq 1$ . De plus :

$$\phi \left( \frac{\|x_0\|}{d(x_0, F)} x_0 \right) = \|x_0\| \Rightarrow \|\phi\| = 1$$

Par construction,  $\phi(x_0) = d(x_0, F)$ .

**Corollaire 2.1.5.** *Soit  $E$  un evn et soit  $F \subset E$  un sev. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\overline{F} = E$
- (ii)  $\forall f \in E', f|_F = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ .

*Démonstration.* Si  $\overline{F} = E$ , alors (ii) est vrai par densité de  $F$  dans  $E$  et continuité de  $f \in E'$ .

On suppose que  $\overline{F} \neq E$ . Soit alors  $x_0 \in E \setminus \overline{F}$ . De l'Exercice 11 on déduit qu'il existe  $f \in E'$  t.q.  $f|_{\overline{F}} = 0$  et  $\|f\| = 1$ , i.e. (ii) n'est pas vérifié.  $\square$

## 2.2 Théorème de Hahn-Banach géométrique

**Définition 2.2.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev. On appelle *hyperplan affine* de  $E$  tout sous-espace affine de  $E$  de codimension 1, i.e. toute partie de la forme

$$H = f^{-1}(\alpha) = \{x \in E, f(x) = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

où  $f$  est une forme  $\mathbb{R}$ -linéaire sur  $E$ . Alors  $f = \alpha$  est une équation de  $H$ .

1. On dit qu'un hyperplan affine  $H$  d'équation  $f = \alpha$  sépare (au sens large) deux ensembles  $A$  et  $B$  si, quitte à échanger les rôles de  $A$  et  $B$ , on a  $A \subset f^{-1}([\alpha, +\infty[)$  et  $B \subset f^{-1}(]-\infty, \alpha])$ .
2. On dit qu'un hyperplan affine  $H$  d'équation  $f = \alpha$  sépare strictement deux ensembles  $A$  et  $B$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  t.q., quitte à échanger les rôles de  $A$  et  $B$ , on a  $A \subset f^{-1}([\alpha + \varepsilon, +\infty[)$  et  $B \subset f^{-1}(]-\infty, \alpha - \varepsilon])$ .

**Proposition 2.2.1.** *Un hyperplan affine  $H$  d'équation  $f = \alpha$  est fermé ssi  $f \in E'$ .*

*Démonstration.* Soit  $H$  un hyperplan affine d'équation  $f = \alpha$ . On suppose  $f \neq 0$ . Alors  $f$  est surjective. Soit  $a \in E$  t.q.  $f(a) = \alpha$ . Alors

$$x \in H \iff f(x) = f(a) \iff x - a \in \text{Ker}(f).$$

On en déduit que  $H = a + \text{Ker}(f)$ . L'application  $x \mapsto a + x$  est un homéomorphisme de  $E$  sur  $E$  donc  $H$  est fermé ssi  $\text{Ker}(f)$  est fermé, i.e. ssi  $f$  est continue. En effet, si  $\text{Ker}(f)$  est fermé et  $f$  n'est pas bornée alors il existe une suite  $(x_n)_{n \geq 0} \in E$  t.q.  $\|x_n\| = 1$  et  $|f(x_n)| > n, \forall n \geq 0$ . Soit  $y \in E$ . On pose :

$$y_n = y - \frac{f(y)}{f(x_n)} x_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Par construction :  $\forall n \geq 0, y_n \in \text{Ker}(f)$  et

$$\|y_n - y\| \leq \frac{|f(y)|}{|f(x_n)|} \leq \frac{1}{n} |f(y)|$$

donc  $y_n \rightarrow y \in \overline{\text{Ker}(f)} = \text{Ker}(f)$ . Ceci étant vrai  $\forall y \in E$ , on en déduit que  $f = 0$ . Contradiction. Donc  $f$  est continue ssi  $\text{Ker}(f)$  est fermé.  $\square$

**Lemme 2.2.2.** Soit  $E$  un evn et soit  $C \subset E$  un ouvert convexe non vide t.q.  $0 \in C$ . On pose :

$$p_C(x) = \inf\{\alpha > 0, \frac{x}{\alpha} \in C\}.$$

1. Il existe  $M > 0$  t.q.  $\forall x \in E, 0 \leq p_C(x) \leq M\|x\|$ .
2.  $C = \{x \in E, p_C(x) < 1\}$ .
3.  $\forall \lambda > 0, \forall x \in E, p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x)$ .
4.  $\forall x, y \in E, p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$ .

*Démonstration.* 1. Par hypothèse,  $C$  est ouvert et contient 0, donc il existe  $r > 0$  t.q.  $B(0, r) \subset C$ . Soit  $x \in E, \neq 0$ . Alors

$$\frac{r}{2\|x\|}x \in C \Rightarrow p_C(x) \leq \frac{2}{r}\|x\| =: M\|x\|$$

2. Soit  $x \in C \setminus \{0\}$ . Comme  $C$  est ouvert, il existe  $\varepsilon > 0$  t.q.  $B(x, \varepsilon) \subset C$ . Alors

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\|x\|}\right)x \in C \Rightarrow p_C(x) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\|x\|}\right)^{-1} = \frac{2\|x\|}{2\|x\| + \varepsilon} < 1.$$

$\supset$  Réciproquement, soit  $x \in E$  t.q.  $p_C(x) < 1$ . Par définition de la borne inférieure, il existe  $\alpha > 0$  t.q.  $p_C(x) < \alpha < 1$  et  $\frac{x}{\alpha} \in C$ . On en déduit,  $C$  étant convexe :

$$x = \alpha \frac{x}{\alpha} + (1 - \alpha)0 \in C.$$

3. Soit  $x \in E$  et soit  $\lambda > 0$ . On a

$$\begin{aligned} \lambda p_C(x) &= \lambda \inf\left\{\alpha > 0, \frac{x}{\alpha} \in C\right\} = \inf\left\{\lambda\alpha > 0, \frac{x}{\alpha} \in C\right\} = \\ &= \inf\left\{\lambda\alpha > 0, \frac{\lambda x}{\lambda\alpha} \in C\right\} = p_C(\lambda x). \end{aligned}$$

car  $\alpha \mapsto \lambda\alpha$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $]0, +\infty[$ .

4. On note :

$$\forall x \in E, \quad \Lambda(x) = \{\alpha > 0, \frac{x}{\alpha} \in C\}.$$

Soit  $x, y \in E$  et soit  $\alpha \in \Lambda(x), \beta \in \Lambda(y)$ . On a

$$\frac{x + y}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{y}{\beta}.$$

Par convexité de  $C$  :

$$\frac{x}{\alpha} \in C \quad \text{et} \quad \frac{y}{\beta} \in C \Rightarrow \frac{x + y}{\alpha + \beta} \in C$$

donc  $p_C(x + y) \leq \alpha + \beta$ . On fixe  $\lambda \in \Lambda(x)$ . Alors :

$$\forall \beta \in \Lambda(y), \quad p_C(x + y) - \alpha \leq \beta \Rightarrow p_C(x + y) - \alpha \leq p_C(y).$$

Finalement :

$$\forall \alpha \in \Lambda(x), \quad p_C(x + y) - p_C(y) \leq \alpha \Rightarrow p_C(x + y) - p_C(y) \leq p_C(x).$$

□

**Proposition 2.2.3.** *Soit  $E$  un evn, soit  $C \subset E$  un ouvert convexe non vide et soit  $x_0 \in E \setminus C$ . Alors il existe  $f \in E' \setminus \{0\}$  t.q. :  $\forall x \in C, f(x) < f(x_0)$ .*

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $C$  par  $a + C$  et  $x_0$  par  $x_0 + a$  avec  $a \in E$ , on peut supposer que  $0 \in C$ . Soit  $f : \mathbb{R}x_0 \rightarrow \mathbb{R}$  la forme linéaire définie par :  $f(tx_0) = tp_C(x_0)$ . Alors  $f \neq 0$  car  $x_0 \notin C \Rightarrow p_C(x_0) \geq 1 > 0$ . Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $t \geq 0$ , alors  $f(tx_0) = tp_C(x_0) = p_C(tx_0)$ . Si  $t \leq 0$ , alors  $f(tx_0) = tp_C(x_0) \leq 0 \leq p_C(tx_0)$ . Finalement,  $\forall t \in \mathbb{R}, f(tx_0) \leq p_C(tx_0)$ . Du Théorème de Hahn-Banach analytique on déduit que  $f$  se prolonge à  $E$  en une forme linéaire encore notée  $f$  t.q. :  $\forall x \in E, f(x) \leq p_C(x) \leq M\|x\|$ . Par linéarité de  $f, \forall x \in E, f(-x) = -f(x) \leq p_C(-x) \leq M\|-x\| = M\|x\|$ . On en déduit :  $\forall x \in E, |f(x)| \leq M\|x\|$ , i.e.  $f \in E'$ . Par construction :  $\forall x \in C, f(x) \leq p_C(x) < 1 \leq p_C(x_0) = f(x_0)$ .  $\square$

**Théorème 2.2.4** (Théorème de Hahn-Banach (formes géométriques)). *Soit  $E$  un evn sur  $\mathbb{R}$  et soit  $A \subset E, B \subset E$  deux convexes non vides disjoints de  $E$ .*

1. *Si  $A$  est ouvert, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare  $A$  et  $B$ .*
2. *Si  $A$  est compact et  $B$  fermé, il existe un hyperplan affine fermé qui sépare strictement  $A$  et  $B$ .*

*Démonstration.* 1. On pose  $C = A - B$ . Alors  $C = \cup_{b \in B} (-b + A)$  est ouvert comme réunion d'ouverts. De plus :  $\forall t \in [0, 1], \forall a, a' \in A, \forall b, b' \in B, t(a - b) + (1 - t)(a' - b') = ta + (1 - t)a' - tb - (1 - t)b'$  avec  $A$  et  $B$  convexes  $\Rightarrow ta + (1 - t)a' \in A$  et  $tb + (1 - t)b' \in B$ . Il en résulte que  $t(a - b) + (1 - t)(a' - b') \in C$  et finalement,  $C$  est un ouvert convexe t.q.  $0 \notin C$  car  $A \cap B = \emptyset$ . De la Proposition 2.2.3, on déduit qu'il existe  $f \in E'$  t.q. :  $\forall x \in C, f(x) < f(0) = 0$ , i.e.  $\forall a \in A, \forall b \in B, f(a - b) = f(a) - f(b) < 0$ . Soit  $\alpha = \sup_A f, \beta = \inf_B f$ . Alors :  $\alpha \leq \beta$  et  $\forall a \in A, \forall b \in B, f(a) \leq \alpha \leq \beta \leq f(b)$ . Autrement dit,  $A$  et  $B$  sont séparés par l'hyperplan affine fermé  $H$  d'équation  $f = \alpha$ .

2. Soit  $C = A - B$ . Le même raisonnement montre que  $C$  est convexe et  $0 \notin C$ . Soit  $(x_n)_{n \geq 0} \in C$  une suite convexe de  $C$  de limite  $x \in \overline{C}$ . On pose ;  $\forall n \geq 0, x_n = a_n - b_n, a_n \in A, b_n \in B$ . Par compacité de  $A$ , il existe une suite extraite  $(x_{n_k})_{k \geq 0}$  convergeant vers  $a \in A$ . Alors  $b_{n_k} \rightarrow a - x =: b$  et  $b \in B$  car  $B$  est fermé. On en déduit que  $x = a - b \in C$  et donc  $C$  est fermé. On en déduit que  $0 \in C^c \Rightarrow \exists B(0, r) \subset C^c$ . Comme  $B(0, r)$  est un ouvert convexe non vide, il existe  $f \in E'$  t.q. ;  $\forall a \in A, \forall b \in B, \forall x \in B(0, 1),$

$$f(a - b) \leq rf(x) \iff f(a) - f(b) \leq rf(x).$$

On a :

$$\inf_{z \in B(0,1)} f(z) = - \sup_{x \in B(0,1)} |f(x)| = -\|f\|,$$

donc  $\forall a \in A, \forall b \in B,$

$$f(a) - f(b) \leq -r\|f\| \iff f(a) + \frac{r}{2}\|f\| \leq f(b) - \frac{r}{2}\|f\|.$$

On pose  $\alpha = \sup_{a \in A} f(a) + \frac{r}{2}\|f\|, \varepsilon = \frac{r}{2}\|f\|$ . Alors :

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad f(a) + \varepsilon \leq \alpha \leq f(b) - \varepsilon.$$

Donc  $A$  et  $B$  sont séparés strictement par l'hyperplan affine d'équation  $f = \alpha$ .

□

**Exercice 12.** Soit  $E$  un evn de dimension finie. Soit  $C \subset E$  un convexe non vide t.q.  $0 \notin C$ .

1. Soit  $(x_n)_{n \geq 0} \in C^{\mathbb{N}}$  et soit  $D = \{x_n, n \geq 0\}$ . On suppose que  $D$  est dense dans  $C$ . On pose :

$$\forall n \geq 0, \quad C_n = \text{conv}\{x_0, \dots, x_n\}.$$

Montrer que  $C_n$  est compact et que  $\cup_{n \geq 0} C_n$  est dense dans  $C$ .

2. Montrer qu'il existe  $(f_n)_{n \geq 0} \in (E')^{\mathbb{N}}$  t.q.

$$\forall n \geq 0, \quad \|f_n\| = 1 \quad \text{et} \quad f_n(x) \geq 0, \quad \forall x \in C_n.$$

3. Montrer qu'il existe  $f \in E'$  t.q.

$$\|f\| = 1 \quad \text{et} \quad f(x) \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

4. En déduire qu'il existe un hyperplan qui sépare  $C$  et  $\{0\}$  au sens large.
5. Soit  $A \subset E$  et soit  $B \subset E$  deux ensembles convexes non disjoints de  $E$ . Montrer qu'il existe un hyperplan qui sépare  $A$  et  $B$  au sens large.

**Corollaire 2.2.5.** *Tout sous-ensemble convexe compact  $K$  d'un evn  $E$  est l'intersection des semi-espaces fermés qui contiennent  $K$ .*

*Démonstration.* Soit  $K \subset E$  un convexe compact et soit  $L$  l'intersection des semi-espaces fermés qui contiennent  $K$ . On a  $K \subset L$ . On suppose  $K \neq L$ . Soit  $x_0 \notin K$ . Le Théorème de séparation de Hahn-Banach appliqué avec  $A = K$  et  $B = \{x_0\}$  entraîne l'existence d'un hyperplan affine fermé séparant strictement  $A$  et  $\{x_0\}$  :  $\exists f \in E'$  t.q.  $\alpha := \sup_{x \in K} f(x) < f(x_0)$ . Alors  $K \subset \{f \leq \alpha\} =: H$ ,  $L \subset H$  et  $x_0 \in H^c \subset L^c$ . □