Compléments d'Analyse

Isabelle Gruais
Université de Rennes 1

18 septembre 2024

Introduction

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

Dans la suite $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sauf cas particulier où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.1 Forme sesquilinéaire et produit scalaire

Définition 1.1.1. Une application $f : E \to F$ entre deux ev sur $\mathbb{C}$ est antilinéaire si

1. $\forall x, y \in E, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.

Définition 1.1.2. Soit E un ev sur $\mathbb{K}$.

1. On appelle forme sesquilinéaire (à droite) sur $\mathbb{K}$ toute application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant. :
   (a) f est linéaire à gauche, i.e. $\forall y \in E$, $x \mapsto f(x, y)$ est linéaire ;
   (b) f est antilinéaire à droite , i.e. $\forall x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ est antilinéaire

   Par convention, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire est bilinéaire.
2. Une forme sesquilinéaire f est hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, resp. symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si en outre $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$, resp. $f(x, y) = f(y, x)$, $\forall x, y \in E$.

Proposition 1.1.1. *Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire, alors : $\forall x, y \in E$,*

$$\varphi(x + y, x + y) + \varphi(x - y, x - y) = 2\varphi(x, x) + 2\varphi(y, y).$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$. On a

$$\varphi(x + y, x + y) = \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y),$$

$$\varphi(x - y, x - y) = \varphi(x, x) - \varphi(x, y) - \varphi(y, x) + \varphi(y, y),$$

□

Proposition 1.1.2. *Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire, alors : $\forall x, y \in E$,*

1. $\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) = 2\varphi(x, y) + 2\varphi(y, x)$.

2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* φ *symétrique :* $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = 4\varphi(x, y)$.
3. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *et* φ *hermitienne :* $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy) = 4\varphi(x, y)$.

Démonstration. Soit $x, y \in E$.

1. On a

$$\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y) + \\ -\varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) - \varphi(y, y).$$

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on utlise ce qui précède avec $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors, en notant $\mathbb{U}_4$ le groupe des racines quatrièmes de 1 : $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$ et on est ramené à calculer $\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x+\zeta y, x+\zeta y)$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x+\zeta y, x+\zeta y) &= \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x, x) + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} |\zeta|^2\varphi(x, y) + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta^2\varphi(y, x) \\ &\quad + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(y, y) \\ &= 4\varphi(x, y).\end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.3. *Soit* φ *une forme sesquilinéaire sur un ev* E *sur* $\mathbb{C}$. *Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. φ *est hermitienne.*
2. $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Si φ est hermitienne, alors $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)} \Rightarrow \varphi(x, x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$.

Inversement, on suppose que $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$. On pose : $\forall x, y \in E$, $\Phi(x, y) = \varphi(x, y) - \overline{\varphi(y, x)}$. Alors Φ est sesquilinéaire et $\Phi(x, x) = 0$, $\forall \in E$. De la Proposition 1.1.2, on déduit que $\Phi(x, y) = 0$, $\forall x, y \in E$. □

Définition 1.1.3. Une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-ev est dite positive, resp. définie positive $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x, x) \geq 0$, resp. $\varphi(x, x) > 0$.

Proposition 1.1.4. *Soit* E *un ev sur* $\mathbb{K}$ *et soit* φ *une forme hermitienne positive sur* E. *On a :* $\forall x, y \in E$,

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y).$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\lambda\varphi(x, y) = |\varphi(x, y)|$. Alors $|\lambda| = 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par hypothèse sur φ : $\varphi(\lambda x+ty, \lambda x+ty) \geq 0$. En développant cette expression, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\lambda|^2\varphi(x, x) + 2t\mathrm{Re}(\lambda\varphi(x, y)) + t^2\varphi(y, y) \geq 0,$$

avec $2t\mathrm{Re}(\lambda\varphi(x, y)) = 2t|\varphi(x, y)|$. De la théorie des équations du second degré à coefficients réels, on déduit que $4|\varphi(x, y)|^2 - 4\varphi(x, x)\varphi(y, y) \leq 0$. □

Définition 1.1.4. Une forme sesquilinéaire définie positive est appelée un produit scalaire. Si E est un ev et si φ est un produit scalaire sur E, on définit une norme sur E en posant

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}.$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Définition 1.1.5. On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien complet pour la norme associée.

Exemple 1. L'espace $\mathbb{C}^d$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire : $(z,z') \mapsto \sum_{k=1}^{d} \overline{z}_k z'_k$.

Exemple 2. L'espace

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\geq 0} |u_n|^2 < +\infty\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v) \mapsto \sum_{n\geq 0} u_n \overline{v}_n$$

Exercice 1.

Soit $h^1(\mathbb{N}) = \{u \in \ell^2(\mathbb{N}), \sum_{n\geq 0} n^2 |u_n|^2 < +\infty\}$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $h^1(\mathbb{N})$ en posant :

$$\forall a,b \in h^1(\mathbb{N}), \quad \langle a,b\rangle = \sum_{n\geq 0} (1+n^2) a_n \overline{b}_n.$$

   et que ce produit scalaire fait de $h^1(\mathbb{N})$ un espace de Hilbert.
2. Montrer que $h^1(\mathbb{N})$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$.
3. Montrer que la boule unité fermée de $h^1(\mathbb{N})$ est compacte dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

1.2 Orthogonalité

Définition 1.2.1. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien sur K. Deux vecteurs $x, y \in H$ sont dits orthogonaux et on note $x \perp y$ si si $\langle x,y\rangle = 0$. Si $A \subset H$, l'orthogonal de A dans H est le sev de H défini par :

$$A^{\perp} = \{x \in H \quad \forall a \in A, \quad \langle x,a\rangle = 0\}.$$

Proposition 1.2.1. *Soit E un espace préhilbertien. Alors :*

1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall x,y \in E$, $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*
2. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\forall x,y \in E$, $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ et $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*
3. *Si $A \subset B \subset E$ alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.*
4. *Si $A \subset E$, alors $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.*

Démonstration. On utilise le développement :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

avec $\mathrm{Re}\langle x,iy\rangle = \mathrm{Im}\langle x,y\rangle$. □

1.3 Projection hilbertienne

Théorème 1.3.1. *Soit E un espace préhilbertien et soit $C \subset E$ un convexe complet. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in C$ unique t.q. $\|x - a\| = d(x, C)$. L'application $p_C : E \to C$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \forall y \in C, \quad \mathrm{Re}\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0.$$

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in C$ définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad x_n \in C \quad \text{et} \quad d(x, C) \leq \|x - x_n\| \leq d(x, C) + \frac{1}{n}$$

On a : $\forall n, p \geq 0$,

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \|x - x_{n+p} - (x - x_n)\|$$

avec

$$\|x - x_{n+p} - (x - x_n)\|^2 + \|(x - x_{n+p}) + (x - x_n)\|^2 = 2\|x - x_{n+p}\|^2 + 2\|x - x_n\|^2$$

$$\iff \|x_{n+p} - x_n\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2 = 2\|x - x_{n+p}\|^2 + 2\|x - x_n\|^2.$$

On en déduit

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 \leq 4\left(d(x, C) + \frac{1}{n}\right)^2 - 4\|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2 =$$

$$= 4\left(d(x, C)^2 - \|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2\right) + \frac{8}{n}d(x, C) + \frac{4}{n^2} \leq \frac{8}{n}d(x, C) + \frac{4}{n^2}$$

car C convexe $\Rightarrow \frac{1}{2}(x_n + x_{n+p}) \in C$. Il en résulte que $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans C complet donc convergente vers $a \in C$.

Par construction $\lim_{n\to+\infty} \|x - x_n\| = d(x, C)$ donc $\|x - a\| = d(x, C)$. On suppose qu'il existe $a' \in C$ t.q. $\|x - a'\| = d(x, C)$. Alors

$$\|a - a'\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}(a + a')\|^2 = 2\|x - a\|^2 + 2\|x - a'\|^2 = 4d(x, C)^2$$

donc

$$\|a - a'\|^2 = 4d(x, C)^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(a + a')\|^2 \leq 0$$

i.e. $a = a'$. On note $p_C(x) = a$.

Soit $y \in C$. ON a :

$$\|x - p_C(x)\|^2 \leq \|y - x\|^2 = \|y - p_C(x) - (x - p_C(x))\|^2 =$$

$$= \|y - p_C(x)\|^2 + \|x - p_C(x)\|^2 - 2\langle y - p_C(x), x - p_C(x)\rangle$$

$$\Rightarrow 2\langle y - p_C(x), x - p_C(x)\rangle \leq \|y - p_C(x)\|^2.$$

Ceci est vrai en particulier pour $y = tz + (1 - t)p_C(x)$ avec $z \in C$ et $t \in [0, 1]$. Alors :

$$2t\langle z - p_C(x), x - p_C(x)\rangle \leq t^2\|z - p_C(x)\|^2$$

i.e., si $t > 0$:

$$2\langle z - p_C(x), x - p_C(x)\rangle \leq t\|z - p_C(x)\|^2.$$

On conclut en passant à la limite quand $t \to 0^+$.

Inversement, soit $\tilde{x} \in C$ t.q. :

$$\langle y - \tilde{x}, x - \tilde{x}\rangle \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

Soit $y \in C$. on a :

$$\|y - x\|^2 = \|y - \tilde{x} - (x - \tilde{x})\|^2 = \|y - \tilde{x}\|^2 + \|\tilde{x} - x\|^2 - 2\underbrace{\langle y - \tilde{x}, x - \tilde{x}\rangle}_{\leq 0}$$

$$\geq \|y - \tilde{x}\|^2 + \|\tilde{x} - x\|^2 \geq \|\tilde{x} - x\|^2.$$

□

Corollaire 1.3.2. *Soit E un espace de Hilbert et soit $C \subset E$ un convexe fermé. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in C$ unique t.q. $\|x - a\| = d(x, C)$. L'application $p_C : E \to C$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_C(x) \in C \quad \textit{et} \quad \forall y \in C, \quad \mathrm{Re}\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0.$$

Démonstration. On est ramené au résultat précédent en remarquant que C est un convexe complet. □

Corollaire 1.3.3. *Avec les notations du Théorème 1.3.1, l'applicaton p_C est contractante, i.e. vérifie :*

$$\forall x, y \in E, \quad \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|$$

Démonstration. Le calcul donne :

$$\mathrm{Re}\langle x-y, p_C(x)-p_C(y)\rangle = -\mathrm{Re}\langle x-p_C(x), p_C(y)-p_C(x)\rangle - \mathrm{Re}\langle p_C(x), p_C(y)-p_C(x)\rangle$$

$$-\mathrm{Re}\langle y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y)\rangle - \mathrm{Re}\langle p_C(y), p_C(x) - p_C(y)\rangle$$
$$= -\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), p_C(y) - p_C(x)\rangle - \mathrm{Re}\langle y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y)\rangle +$$
$$+\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \geq \|p_C(x) - p_C(y)\|^2$$

i.e. :

$$\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \leq \mathrm{Re}\langle x - y, p_C(x) - p_C(y)\rangle \leq |\mathrm{Re}\langle x - y, p_C(x) - p_C(y)\rangle|$$

$$\leq \|x - y\|\|p_C(x) - p_C(y)\|$$
$$\Rightarrow \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|.$$

□

Proposition 1.3.4. *Soit E un espace préhilbertien et soit $F \subset E$ un sev complet. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in F$ unique t.q. $\|x - a\| = d(x, F)$. L'application $p_F : E \to F$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_F(x) \in F \quad \textit{et} \quad x - p_F(x) \in F^\perp$$

Démonstration. On remarque que F est convexe et fermé, d'où l'existence et l'unicité de $p_F(x)$. On conclut en remarquant que :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y - p_F(x)\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F$$

et $y \mapsto y - p_F(x)$ est une bijection $F \to F$ donc

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F.$$

F est un espace vectoriel donc $y \in F \iff -y \in F$ et alors :

$$-\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F$$

i.e. :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle = 0, \quad \forall y \in F.$$

De même, F est un ev sur $\mathbb{C}$ donc $y \in F \iff iy \in F$. On en déduit :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), iy\rangle = \mathrm{Im}\langle x - p_F(x), iy\rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

et finalement ;

$$\langle x - p_F(x), y\rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

i.e. $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

□

Exercice 2. Soit E un espace de Banach. On suppose E uniformément convexe, i.e. : $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta \in]0, 1[$ t.q.

$$\forall x, y \in B_E(0,1), \quad \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| \geq 1 - \delta \Rightarrow \|x - y\| \leq \varepsilon.$$

Soit $C \subset E$ un convexe fermé non vide.

1. Soit $x \in E$. On pose $\alpha = \inf_{y \in C} \|x - y\|$. Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in C^{\mathbb{N}}$ une suite t.q. :
$$\forall n \geq 0, \quad \|x_n - x\| \leq \alpha + \frac{1}{n+1}.$$
Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans E.
2. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers l'unique solution $p_C(x)$ du problème :
$$p_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \|x - p_C(x)\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$
3. Montrer que
$$\forall x, x' \in E, \quad \|x - p_C(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\| + \left\| \frac{1}{2}(x + x') - p_C\left(\frac{x + x'}{2}\right) \right\|$$
4. Soit $x, x' \in E$. On suppose que $\|x' - p_C(x')\| \leq \|x - p_C(x)\| =: \alpha$. Montrer que
$$\frac{1}{2\alpha}\|x + x' - p_C(x) - p_C(x')\| \geq 1 - \frac{\|x - x'\|}{2\alpha}.$$

5. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une constante $\eta > 0$ t.q., avec les notations de 4.,

$$\|x - x'\| \leq \eta \Rightarrow \|p_C(x) - p_C(x')\| \leq \alpha\varepsilon + \|x - x'\|.$$

6. Montrer que :

$$\forall x, x' \in E, \quad |\|x - p_C(x)\| - \|x' - p_C(x')\|| \leq \|x - x'\|.$$

7. En déduire que p_C est continue sur E.
8. En déduire que p_C est uniformément continue sur les bornés de E.

Supplémentaire orthogonal et somme directe

Définition 1.3.1. On dit qu'un ev E est la somme directe algébrique de deux ev F et G si $E = F + G$ avec $F \cap G = \{0\}$.

Si E est un espace préhilbertien on dit que E est la somme directe orthogonale de F et G si $E = F \oplus G$ avec $G = F^\perp$. Alors G est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Théorème 1.3.5. *Soit E un espace préhilbertien et soit $F \subset E$ un sev complet.*

1. *La projection orthogonale $p_F : E \to F$ est une application linéaire continue. Si $F \neq \{0\}$, alors $\|p_F\| = 1$.*
2. *$E = F \oplus F^\perp$.*
3. *$F^\perp = \mathrm{Ker}(p_F)$ et $F^{\perp\perp} = F$.*

Démonstration. 1. D'après le Théorème de projection hilbertienne, la projection p_F est bien définie. Soit $x, y \in E$ et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$$p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad p_F(y) \in F \Rightarrow \lambda p_F(x) + \mu p_F(y) \in F$$

et

$$x - p_F(x) \in F^\perp \quad \text{et} \quad y - p_F(y) \in F^\perp$$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y - (\lambda p_F(x) + \mu p_F(y)) = \lambda(x - p_F(x)) + \mu(y - p_F(y)) \in F^\perp.$$

De la Proposition 1.3.4, on déduit que $p_F(\lambda x + \mu y) = \lambda p_F(x) + \mu p_F(y)$, i.e. p_F est linéaire.

p_F étant linéaire et contractante, on a :

$$\forall x \in E, \quad \|p_F(x)\| = \|p_F(x) - p_F(0)\| \leq \|x\| \Rightarrow \|p_F\| \leq 1.$$

De plus : $\forall x \in E, x \in F \Rightarrow p_F(x) = x$ et $\|p_F(x)\| = \|x\|$. Donc $\|p_F\| = 1$.

2. Soit $x \in E$. On a $x = x - p_F(x) + p_F(x)$ avec $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x) \in F$ donc $E = F + F^\perp$. De plus :

$$\forall x \in F^\perp \cap F, \quad \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$$

donc $F \cap F^\perp = \{0\}$. Finalement, $E = F \oplus F^\perp$.

3. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p_F)$. Alors $x = x - p_F(x) \in F^\perp$. Donc $\mathrm{Ker}(p_F) \subset F^\perp$. Inversement soit $x \in F^\perp$. Par unicité de la décomposition $x = x - p_F(x) + p_F(x) \in F^\perp \oplus F$ on déduit que $p_F(x) = 0$, i.e. $x \in \mathrm{Ker}(p_F)$. Finalement : $\mathrm{Ker}(p_F) = F^\perp$.
   On a : $F \subset (F^\perp)^\perp$. Inversement, soit $x \in F^{\perp\perp}$. Alors :
   $$x - p_F(x) \in F^\perp \Rightarrow \langle x, x - p_F(x)\rangle = 0$$
   donc
   $$\|x\|^2 = \langle x, p_F(x)\rangle = \langle x - p_F(x), p_F(x)\rangle + \langle p_F(x), p_F(x)\rangle = \langle p_F(x), p_F(x)\rangle$$
   $$= \|p_F(x)\|^2.$$
   De plus (Théorème de Pythagore) :
   $$p_F(x) \perp x - p_F(x) \Rightarrow \|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2.$$
   On en déduit $\|x - p_F(x)\|^2 = 0$, i.e. $x = p_F(x) \in F$. Donc $F^{\perp\perp} \subset F$.

□

Remarque 1. Sous les mêmes hypothèses, $I - p_F$ est la projection orthognle sur $F^\perp$ et on peut écrire $I - p_F = p_{F^\perp}$.

Corollaire 1.3.6. *Si F est un sev fermé d'un espace de Hilbert H alors : $H = F \oplus F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$.*

Démonstration. On se ramène au Théorème 1.3.5 en remarquant que F fermé dans H complet est complet. □

Dans le cas général où F est un sev non nécessairement fermé d'un espace de Hilbert, on a le résultat suivant.

Corollaire 1.3.7. *Soit F un sev d'un espace de Hilbert H. On a :*

1. $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

2. $\overline{F} = H \iff F^\perp = \{0\}$.

Démonstration.

1. On remarque que $F^\perp = \cap_{y \in F} \mathrm{Ker}(\phi_y)$ où $\phi_y : x \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire continue de norme $\|\phi_y\| = \|y\|$, $\forall y \in F$. Donc $F^\perp$ est fermé comme intersection de fermés. Ceci reste vrai pour $F^{\perp\perp}$ qui est également fermé. En particulier :
   $$F \subset F^{\perp\perp} \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{F^{\perp\perp}} = F^{\perp\perp}.$$
   De plus, le Corollaire 1.3.6 entraîne :
   $$F \subset \overline{F} \Rightarrow \overline{F}^\perp \subset F^\perp \Rightarrow F^{\perp\perp} \subset \overline{F}^{\perp\perp} = \overline{F}.$$
   Finalement : $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.
2. De ce qui précède on déduit :
   $$\overline{F} = H \iff (F^\perp)^\perp = H \iff \overline{F^\perp} = H^\perp \iff F^\perp = \{0\}$$
   car $H^\perp = \{0\}$ par définition du produit scalaire et $\overline{F^\perp} = F^\perp$ puisque $F^\perp$ est fermé.

□

Définition 1.3.2. Soit H un espace de Hilbert. Un endomorphisme $P : H \to H$ est un opérateur autoadjoint (ou hermitien si $K = \mathbb{C}$) si $\langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle$,$\forall x, y \in H$.

Proposition 1.3.8. *Soit F un sev fermé d'un espace de Hilbert H.*

1. $p_F \circ p_F = p_F$
2. p_F *est auto-adjoint :* $\forall x, y \in H$, $\langle p_F(x), y\rangle = \langle x, p_F(y)\rangle$.

Démonstration.

1. C'est une conséquence directe de l'unicité de la projection orthogonale sur F.
2. Soit $x, y \in H$.

$$x - p_F(x) \in F^{\perp} \quad \text{et} \quad p_F(y) \in F \Rightarrow \langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle.$$

De même :

$$\langle p_F(x), y\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle.$$

Finalement : $\langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), y\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle$.

□

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert et soit $(K_n)_{n\geq 0}$ une suite de convexes fermés non vides de H. Soit $f \in H$. On pose $u_n = p_{K_n} f$, $\forall n \geq 0$.

1. On suppose que la suite $(K_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et que $\cap_{n\geq 0} K_n \neq \emptyset$.
   (a) Montrer que la suite de terme général $\|u_n - f\|$ est croissante majorée par $\|x - f\|$, $\forall x \in \cap_{n\geq 0} K_n$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n, p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|^2 \leq 2\|u_{n+p} - f\|^2 - 2\|u_n - f\|^2.$$
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite de la forme $p_K f$ où K est un convexe fermé à préciser.
2. On suppose que la suite $(K_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
   (a) Montrer que $K = \overline{\cup_{n\geq 0} K_n}$ est un convexe fermé.
   (b) Montrer que la suite de terme général $\|u_n - f\|$ converge.
   (c) Montrer que :
   $$\forall n, p \geq 0, \quad \|u_{n+p} - u_n\|^2 \leq 2\|u_n - f\|^2 - 2\|u_{n+p} - f\|^2.$$
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $p_K f$.
   (e) Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée inférieurement. On pose : $\forall n \geq 0$, $c_n = \inf_{K_n} \varphi$. Montrer que la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ converge. Identifier sa limite.

1.4 Le Théorème de représentation de Riesz

Corollaire 1.4.1. *Soit E un espace de Hilbert et soit $F \subset E$ un sev fermé. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in F$ unique t.q. $\|x-a\| = d(x,F)$. L'application $p_F : E \to F$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_F(x) \in F \quad \textit{et} \quad x - p_F(x) \in F^{\perp}$$

Remarque 2. Le Corollaire 1.4.1 montre que p_F est la projection orthogonale sur F. On en déduit que p_F est une application linéaire de E sur F t.q. $\|p_F\| = 1$ et $F^{\perp} = \mathrm{Ker} p_F$.

Proposition 1.4.2 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit E un espace de Hilbert. L'application $\Phi : E \to E'$, $x \mapsto \{\phi_x : y \mapsto \langle y, x\rangle\}$ est une isométrie antilinéaire et une bijection de E sur E'.*

Démonstration. On remarque que $x \mapsto \{\phi_x : y \mapsto \langle y, x\rangle\}$ est une isométrie de E dans E'. Il reste à vérifier qu'elle est surjective. Soit $F = \mathrm{Ker}(f)$. Par continuité de f, F est fermé et donc $E = F \oplus F^{\perp}$ avec $F^{\perp} \sim E/F$.

Rappel : Par définition de la relation d'équivalence associée à E/F,

$$x \sim y \iff p_F(x) - p_F(y) = x - y \iff x - p_F(x) = y - p_F(y)$$

ce qui permet de définir l'application :

$$E/F \to F^{\perp}, \quad x + F \mapsto x - p_F(x).$$

D'après le théorème d'isomorphisme, on a : $E/F \sim \mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}$, i.e. $F^{\perp} \sim \mathbb{C}$. Donc $F^{\perp} = \mathbb{C}u$ avec $u \in F^{\perp} \setminus \{0\}$ choisi t.q. $\|u\| = 1$. Soit alors $x \in E$. De la décomposition :

$$x = \langle x, u\rangle u + p_F(x)$$

on déduit que $f(x) = \langle x, u\rangle f(u)$, i.e., $f = \phi_{f(u)u}$ avec $f(u) \neq 0$ par construction de u.

□

Exercice 4. Soit E un espace de Hilbert et soit $T \in E'$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \|x\|^2 - T(x).$$

1. Montrer que f est bornée inférieurement sur E et que cette borne est atteinte sur E.
2. Soit $a \in E$ t.q. $f(a) = \inf_E f$. Soit C un convexe fermé. Montrer que

$$\inf_C f = f(p_C(a)).$$

.

Corollaire 1.4.3. *Tout espace de Hilbert est réflexif.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert et soit $\Phi : H \to H'$ l'isométrie antilinéaire bijective entre H et H'. Comme Φ est une isométrie, on définit un produit scalaire sur H' en posant

$$\forall f, g \in H', \quad \langle f, g\rangle_{H'} = \langle \Phi^{-1}(g), \Phi^{-1}(f)\rangle_H = \overline{\langle \Phi^{-1}(f), \Phi^{-1}(g)\rangle_H}.$$

Alors, $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H' ssi $(\Phi^{-1}(f_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H, i.e. convergente dans H. Par isométrie, $(f_n)_{n\geq 0}$ est convergente dans H'. On en déduit que H' est un espace de Hilbert, donc il existe une isométrie antilinéaire bijective $\Psi : H' \to H''$. Alors, $\Psi \circ \Phi$ est un isomorphisme de H sur H'', i.e. H est réflexif. $\square$

Exercice 5. Soit $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $p \in]1, +\infty[$. On suppose que :

$$\forall x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p, \quad \sum_{n\geq 0} |a_n||x_n| < +\infty.$$

Montrer que $a \in \ell^{p'}$.

Adjoint d'un opérateur

Proposition 1.4.4. *Soit H, K deux espaces de Hilbert et soit $A \in \mathcal{L}(H, K)$ une application linéaire continue. Il existe une unique application linéaire continue $A^* \in \mathcal{L}(K, H)$ appelée adjointe de A t.q. :*

$$\forall x \in H, \quad \forall y \in K, \quad \langle Ax, y\rangle_K = \langle x, A^*y\rangle_H.$$

De plus $\|A^*\| = \|A\|$ et $A^{**} = A$.

Démonstration. Soit $y \in K$. L'application $\phi_y \circ A : H \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ est linéaire continue comme composée d'applications linéaires continues, et on a $\phi_y \circ A \in H'$ avec

$$\|\phi_y \circ A\| \leq \|\phi_y\|\|A\| = \|y\|_K\|A\|.$$

On en déduit qu'il existe $A^*y \in H$ unique t.q. $\phi_{A^*y} = \phi_y \circ A$. On remarque que, par antilinéarité de $y \mapsto \phi_y$: $\forall y \in K$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\phi_{A^*(\lambda y)} = \phi_{\lambda y} \circ A = \overline{\lambda}\phi_y \circ A = \overline{\lambda}\phi_{A^*y} = \phi_{\lambda A^*y}$$

i.e., par définition de A^* : $A^*(\lambda y) = \lambda A^*y$. Donc A^* est linéaire. De plus : $\forall y \in K$,

$$\|\phi_{A^*y}\| = \|A^*y\| = \|\phi_y \circ A\| \leq \|y\|_K\|A\|$$

donc A^* est continue de norme $\|A^*\| \leq \|A\|$. On remarque que : $\forall x \in H$, $\forall y \in K$,

$$\phi_{A^*y}(x) = \overline{\phi_{Ax}(y)} \Rightarrow |\phi_{Ax}(y)| \leq \|\phi_{A^*y}\|\|x\| \leq \|A^*\|\|y\|\|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A^*\|\|x\|$$

i.e. $\|A\| \leq \|A^*\|$. Finalement : $\|A\| = \|A^*\|$.

$\square$

1.5 Systèmes orthonormés et bases hilbertiennes

Définition 1.5.1. Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Un système $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E et un système orthogonal si $\langle x_i, x_j\rangle = 0$, $\forall i \neq j$.

Définition 1.5.2. Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Un système orthogonal $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormé si $\|x_i\| = 1$, $\forall i \in I$.

Exemple 3. Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire usuel, le système $(e_1, \cdots, e_n)$ donné par $(e_k)_i = \delta_{ik}$, $i, k \in [[1, n]]$, est un système orthonormé.

Exemple 4. Dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{n\geq 0} x_k \overline{y}_k$, $\forall x = (x_n)_{n\geq 0}$, $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, le système $(e_n)_{n\geq 0}$ donné par $(e_n)_k = \delta_{kn}$, $\forall k, n \geq 0$ est orthonormé.

Exemple 5. Dans l'espace de Hilbert $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y}(t)dt$, le système $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où e_n est la fonction $e_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{int}$.

Proposition 1.5.1. *Soit E un espace préhilbertien et soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé. On suppose I fini. On pose $F = \mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}$. Soit $x, y \in E$. On a*

1. $p_F(x) = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$,
2. $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle^2$,
3. $\langle p_F(x), y\rangle = \langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}$.

Démonstration. 1. Soit $x \in E$. On pose $P(x) = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$. On a :

$$\forall i \in I, \quad \langle x - P(x), e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \sum_{j\in I}\langle x, e_j\rangle\langle e_i, e_j\rangle = \langle x, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle = 0$$

donc $x - P(x) \in F^\perp$. Comme de plus $P(x) \in F$, on en déduit que $P(x) = p_F(x)$.

2. Soit $x \in F$. D'après ce qui précède :

$$\|p_F(x)\|^2 = \langle p_F(x), p_F(x)\rangle = \sum_{i,j\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle x, e_j\rangle}\langle e_i, e_j\rangle$$

$$= \sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2.$$

3. Soit $x, y \in E$. On a

$$\langle p_F(x), y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}.$$

□

Proposition 1.5.2 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit E un espace préhilbertien et soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé de E.*

1. *Soit $x \in E$ et soit $J \subset I$ une partie finie de I. On a*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle|^2 + \|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2$$

2. *Soit $x \in E$. La famille $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ de somme majorée par $\|x\|^2$:*

$$\sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration. 1. Soit $x \in E$ et soit $J \subset I$ une partie finie de I. On pose $F = \mathrm{Vect}\{x_i,\ i \in J\}$. Alors

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 = \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \|x - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2.$$

2. Soit Λ l'ensemble des parties finies de I. De ce qui précède on déduit que :

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 := \sup_{J \in \Lambda} \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

□

Corollaire 1.5.3. *Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_i)_{i \in I}$ un système orthonormé de H. Pour tout $x \in H$, la famille $(\langle x, e_i \rangle e_i)_{i \in I}$ est sommable de somme vérifiant l'estimation :*

$$\| \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i \| \leq \|x\|.$$

Démonstration. Soit $x \in H$. D'après la Proposition 1.5.2 et l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$$

i.e. la famille $(|\langle x, e_i \rangle|^2)_{i \in I}$ est sommable. Soit $\varepsilon > 0$. On en déduit qu'il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \varepsilon.$$

i.e., le système $(e_i)_{i \in I}$ étant orthonormé :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \| \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i \|^2 = \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \varepsilon.$$

La famille $(\langle x, e_i \rangle e_i)_{i \in I}$ vérifie le critère de Cauchy dans H qui est complet donc est sommable, de somme $x' := \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \|x' - \sum_{i \in J} \langle x_i, e_i \rangle e_i\| \leq \varepsilon.$$

Soit $J \in \Lambda$ t.q. $J_\varepsilon \subset J$. On a :

$$\|x'\| \leq \varepsilon + \| \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i \| \leq \varepsilon + \|x\|.$$

Ceci est vrai $\forall \varepsilon > 0$, donc, quand $\varepsilon \to 0$, on obtient : $\|x'\| \leq \|x\|$. □

Base hilbertienne

Définition 1.5.3. Soit E un espace préhilbertien. On appelle base hilbertienne toute famille $(e_i)_{i \in I}$ de E orthonormée et totale.

Remarque 3. Soit H un espace de Hilbert. Un système orthonormé $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne ssi

$$\langle x, e_i\rangle = 0, \quad \forall i \in I \Rightarrow x = 0;$$

En effet, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne et si $\langle x, e_i\rangle = 0$, $\forall i \in I$, alors $x \in \mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}^\perp = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}}^\perp = H^\perp = \{0\}$. Inversement, si $\langle x, e_i\rangle = 0$, $\forall i \in I \Rightarrow x = 0$, alors $\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}^\perp = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}}^\perp = \{0\}$. Comme $H = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}} \oplus \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}}^\perp$, alors nécessairement $H = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}}$.

Théorème 1.5.4 (Caractérisation des bases hilbertiennes)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne.
(ii) $\forall x \in H$, $x = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$
(iii) $\forall x, y \in H$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}$
(iv) $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2$ (Egalité de Parseval)

Démonstration. (i)$\Rightarrow$ (ii) Soit $x \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $y_\varepsilon \in \mathrm{Vect}\{e_i,\ \in I\}$ t.q. $\|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$. Soit Λ l'ensemble des parties finies de I. Il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ et il existe $(\lambda_i)_{i\in J_\varepsilon} \in \mathbb{K}^{J_\varepsilon}$ t.q. $y_\varepsilon = \sum_{i\in J_\varepsilon}\lambda_i e_i$. On pose $F_{J_\varepsilon} = \mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in J_\varepsilon\}$. F_{J_ε} est un sev de dimension finie de H et $p_{F_{J_\varepsilon}}(x) = \sum_{i\in J_\varepsilon}\langle x, e_i\rangle e_i$. Par définition de $p_{F_{J_\varepsilon}}$, on a $\|x - p_{F_{J_\varepsilon}}(x)\| \le \|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$. Soit $J \in \Lambda$ t.q. $J_\varepsilon \subset J$.

$$F_{J_\varepsilon} \subset F_J \Rightarrow \|x - p_{F_J}(x)\| \le \|x - p_{F_{J_\varepsilon}}(x)\| < \varepsilon$$

i.e. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \|x - p_{F_J}(x)\| < \varepsilon.$$

Donc la famille $(\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ et sommable de somme $\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i = x$.

(ii)$\Rightarrow$ (iii) Soit $x \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Soit $y \in H \setminus \{0\}$. Il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\| < \varepsilon.$$

Soit $J \in \Lambda$ t.q. $J_\varepsilon \subset J$. On a :

$$|\langle x, y\rangle - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}| = |\langle x, y\rangle - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle| = |\langle x, y\rangle - \langle\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i, y\rangle|$$

$$= |\langle x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i, y\rangle| \le \|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|\|y\| < \varepsilon\|y\|$$

Ceci est vrai $\forall\varepsilon > 0$, donc la famille $(\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle})_{i\in I}$ est sommable de somme :

$$\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle} = \langle x, y\rangle.$$

(iii)$\Rightarrow$ (iv) Il suffit de poser $y = x$ dans (iii) pour conclure.

(iv)$\Rightarrow$ (i) Soit $x \in \mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}^\perp$ et soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $J_\varepsilon \in \Lambda(I)$ t.q. $\forall J \in \Lambda(I)$,

$$J_\varepsilon \subset J \Rightarrow 0 \le \|x\|^2 - \sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle|^2 < \varepsilon^2.$$

Soit $J \in \Lambda(I)$ t.q. $J_\varepsilon \subset J$. Alors :

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x - \underbrace{\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i}_{=p_{F_J}(x)}\|^2 < \varepsilon^2.$$

Mais

$$x \in \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}}^{\perp} \Rightarrow \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i = 0$$

donc $\|x\| \leq \varepsilon$. Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc $x = 0$.

□

Théorème 1.5.5. *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne. En particulier tout système orthonormé peut être complété en une base hilbertienne.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert. On suppose $H \neq \{0\}$. Sinon, le résultat est immédiat. Soit L un système orthonormé de H. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des systèmes orthonormés qui contiennent L ordonné par la relation $\subset$. Alors $\mathcal{B} \neq \emptyset$ car $L \in \mathcal{B}$. On veut montrer que $\mathcal{B}$ est inductif. Soit $\mathcal{C} = (B_i)_{i\in I}$ une chaîne de $\mathcal{B}$. Alors $B = \cup_{i\in I} B_i$ est un majorant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{P}(H)$. Soit $x, y \in B$, $x \neq y$, et soit $i_x, i_y \in I$ t.q. $x \in B_{i_x}$ et $y \in B_{i_y}$. Alors $\|x\| = \|y\| = 1$. Comme $\mathcal{C}$ est totalement ordonnée, on peut supposer $B_{i_x} \subset B_{i_y}$ et alors $x, y \in B_{i_y} \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$. Donc $B \in \mathcal{B}$. Du Lemme de Zorn on déduit que $\mathcal{B}$ admet un élément maximal noté B_L. Il reste à montrer que B_L est une famille totale dans H i.e. que $\overline{\mathrm{Vect}(B_L)} = H$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\overline{\mathrm{Vect}(B_L)} \neq H$. Alors $\overline{\mathrm{Vect}(B_L)}^{\perp} \neq \{0\}$. Soit alors $x_0 \in \overline{\mathrm{Vect}(B_L)}^{\perp}$ t.q. $x_0 \neq 0$. Alors $\|x_0\| \neq 0$. Quitte à remplacer x_0 par $\dfrac{x_0}{\|x_0\|}$, on peut supposer que $\|x_0\| = 1$. On en déduit alors que $B_L \cup \{x_0\}$ est un système orthonormé, ce qui contredit le caractère maximal de B_L. Donc B_L est total dans H et par suite, c'est une base hilbertienne de H. □

Proposition 1.5.6. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable de E de somme $x \in E$. Alors :*

1. *$\forall \varepsilon > 0$, $\{i \in I,\ \|x_i\| \geq \varepsilon\}$ est fini.*
2. *$\{i \in I,\ x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.*

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q.

$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \|\sum_{i\in J} x_i\| < \varepsilon.$$

Soit $i_0 \in I \setminus J_\varepsilon$. On pose $J = \{i_0\}$. On en déduit : $\|x_{i_0}\| \leq \varepsilon$. Donc $\{i \in I,\ \|x_i\| \geq \varepsilon\} \subset J_\varepsilon$ est fini.

2. On a

$$\{i \in I,\ x_i \neq 0\} = \{i \in I,\ \|x_i\| > 0\} = \cup_{n\geq 1}\left\{i \in I,\ \|x_i\| \geq \frac{1}{n}\right\},$$

i.e. $\{i \in I,\ x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis, éventuellement vides

□

Proposition 1.5.7. *Dans un espace de Hilbert, deux bases hilbertiennes sont équipotentes.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Soit B et B' deux bases de H. Soit $e \in B$ et soit $D_e = \{f \in B',\ \langle e, f\rangle \neq 0\}$. La famille $(\langle e, f\rangle)_{f\in B'}$ est sommable de somme $e = \sum_{f\in B'} \langle e, f\rangle f$ donc D_e est dénombrable d'après la Proposition 1.5.6. On note $D_e = \{f_n^e,\ n \geq 0\}$. De plus, $\forall f \in B'$,

$$f = \sum_{e\in B} \langle f, e\rangle e \neq 0 \Rightarrow \exists e \in B \quad \text{t.q.} \quad \langle f, e\rangle \neq 0$$

i.e. $B' \subset \cup_{e\in B} D_e$. Soit $\Phi : B' \to \mathbb{N} \times B,\ f \mapsto (n, e)$ t.q. $f \in D_e$ et $f = f_n^e$. On remarque que si $\Phi(f) = \Phi(f') = (n, e)$ alors $f = f_n^e = {f'}_n^e = f'$ donc Φ est une injection de B' dans $\mathbb{N} \times B$. Comme B est infini par hypothèse sur H, $\mathbb{N} \times B$ est équipotent à B (admis ou Exercice). Donc Φ est une injection de B' dans un ensemble équipotent à B. En échangeant les rôles de B et B', on montre qu'il existe une injection $\Psi : B \to \mathbb{N} \times B'$ de B dans un ensemble équipotent à B'. On en déduit une bijection entre B et B'. □

Exemple 6. Soit I un ensemble non dénombrable. On note

$$\ell^2(I, \mathbb{K}) = \{x = (x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I,\ \sum_{i\in I} |x_i|^2 < +\infty\}.$$

muni du produit scalaire $(x, y) \mapsto \sum_{i\in I} x_i \overline{y}_j$. Alors $\ell^2(I, K)$ est un espace de Hilbert non séparable. Une base de $\ell^2(I, \mathbb{K})$ est donnée par la suite $(e_i)_{i\in I}$ définie par : $(e_i)_j = \delta_{ij}$; $\forall i, j \in I$.

Théorème 1.5.8. *Soit H un espace de Hilbert de dimension hilbertienne I. Alors, pour toute base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ de H, l'application*

$$H \to \ell^2(I, \mathbb{K}), \quad x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$$

est une bijection isométrique de H sur $\ell^2(I, \mathbb{K})$.

Espaces de Hilbert séparables

Théorème 1.5.9 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie et soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite libre de E. On pose :*

$$\forall p \geq 0, \quad V_p = \text{Vect}\{f_0, \cdots, f_p\}.$$

Alors la suite $(e_n)_{n\geq 0}$ définie par la récurrence

$$e_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|}, \quad e_{p+1} = \frac{f_{p+1} - p_{V_p}(f_{p+1})}{\|f_{p+1} - p_{V_p}(f_{p+1})\|}$$

est une suite orthonormée t.q. :

$$\forall p \geq 0, \quad V_p = \text{Vect}\{e_0, \cdots, e_p\}.$$

Plus précisément :

$$e_{p+1} = \frac{f_{p+1} - \sum_{i=0}^{p} \langle f_{p+1}, e_i\rangle e_i}{\|f_{p+1} - \sum_{i=0}^{p} \langle f_{p+1}, e_i\rangle e_i\|}$$

Démonstration. Par construction $\|e_p\| = 1$, $\forall p \geq 0$.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $(e_0, \cdots, e_n)$ est une bon de V_n.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie par définition de e_0. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et on pose :

$$e_{n+1} = \frac{f_{n+1} - p_{V_n}(f_{n+1})}{\|f_{n+1} - p_{V_n}(f_{n+1})\|}$$

Par définition de p_{V_n}, $e_{n+1} \in V_n^{\perp}$. Comme $\|e_{n+1}\| = 1$, on en déduit que $(e_0, \cdots, e_{n+1})$ est une famille orthonormée. Par hypothèse de récurrence

$$p_{V_n}(f_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} \langle f_{n+1}, e_i \rangle e_i \Rightarrow e_{n+1} \in \text{Vect}\{e_0, \cdots, e_n, f_{n+1}\} = V_{n+1}$$

donc $(e_0, \cdots, e_{n+1})$ est une bon de V_{n+1}, i.e. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence sur $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\forall n \geq 0$. □

Exemple 7. Soit $H = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Par orthonormalisation de Gram-Schmit à partir de la suite $(t \mapsto t^n)_{n \geq 0}$ on obtient la suite des polynômes de Tchebychev $(P_n)_{n \geq 0}$ définis par :

$$P_n(t) = \cos(nArcos(t)), \quad \forall t \in [-1, 1], \quad \forall n \geq 0.$$

Théorème 1.5.10. *Un espace préhilbertien E est séparable ssi il admet une base hilbertienne dénombrable. Alors, toutes les bases hilbertiennes sont dénombrables.*

Démonstration. On suppose que E est séparable. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite dense dans E : $E = \overline{\text{Vect}\{u_n,\ n \geq 0\}}$. Soit $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ une sous-suite libre de $(u_n)_{n \geq 0}$. Par construction : $\forall n \geq 0$, $u_n \in \text{Vect}\{u_{n_k},\ k \geq 0\}$, i.e. $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ est totale est libre. Par le procédé d'orthonormalisatin de Gram-Schmidt, on construit une bon $(e_k)_{k \geq 0}$ t.q. $\forall k \geq 0$, $\text{Vect}\{e_0, \cdots, e_k\} = \text{Vect}\{u_{n_0}, \cdots, u_{n_k}\}$. On en déduit alors : $E = \overline{\text{Vect}\{u_{n_k},\ k \geq 0\}} = \overline{\text{Vect}\{e_k,\ k \geq 0\}}$, i.e. $(e_k)_{k \geq 0}$ est orthonormée et totale, donc c'est une base hilbertienne dénombrable de E.

Inversement, on suppose que E admet une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n \geq 0}$. Alors $(e_n)_{n \geq 0}$ est une suite totale donc E est séparable. □

Théorème 1.5.11. *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $(e_n)_{n \geq 0}$ une base hilbertienne de H. Alors, l'application $\varphi : H \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $x \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n \geq 0}$ est un isomorphisme isométrique.*

Démonstration. Soit $x \in H$. D'après l'identité de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|\varphi(x)\|^2$$

On en déduit que φ est bien définie, i.e. $\varphi(x) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\forall x \in H$, et que φ préserve la norme. De plus, φ est linéaire (immédiat) donc c'est une isométrie linéaire. Il reste à vérifier que φ est surjective. Soit $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. On pose :

$$\forall n \geq 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k.$$

Alors : $\forall n, p \geq 0$,

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2.$$

Par hypothèse sur a, $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < +\infty$ donc :

$$\lim_{n,p \to +\infty} \|S_{n+p} - S_n\|^2 = 0,$$

i.e. la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans H donc convergente vers une limite $x = \sum_{n \geq 0} a_n e_n \in H$ par complétude de H. On en déduit que $a = \varphi(x)$ et que φ est surjective. □

Exemple 8. Soit $a < b$. On pose $T = b - a$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On considère l'espace $L^2([a, b], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire : $(f, g) \mapsto \frac{1}{T} \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction T-périodique $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{in\omega t}$.

Proposition 1.5.12. *La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un base hilbertienne de $L^2([a, b], \mathbb{C})$. En particulier, $L^2([a, b], \mathbb{C})$ est isométriquement isomorphe à $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.*

Démonstration. La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée. En effet : $\forall n, p \geq 0$,

$$\langle e_n, e_p \rangle = \frac{1}{T} \int_a^b e_n(t)\overline{e_p(t)} dt = \frac{1}{T} \int_a^b e^{i(n-p)\omega t} dt.$$

Si $p = n$, alors

$$\|e_n\|^2 = \frac{1}{T} \int_a^b dt = 1.$$

Si $p \neq n$, alors : $\omega b = \omega a + 2\pi \Rightarrow$

$$\langle e_n, e_p \rangle = \frac{1}{T} \frac{e^{i(n-p)\omega b} - e^{i(n-p)\omega a}}{(n-p)\omega} = 0$$

Il reste à montrer que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est totale. Soit $f \in L^2([a, b], \mathbb{C})$ et soit $\varepsilon > 0$. Par convolution, on construit $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ t.q. $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$ et $g(a) = g(b) = 0$. On peut prolonger g par périodicité à $\mathbb{R}$ en une fonction T-périodique $g \in \mathcal{C}_{T,\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. D'après le Théorème de Stone-Weierstrass, l'ensemble des polynômes trigonométriques $\mathcal{P} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathcal{C}_{T,\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit $P \in \mathcal{P}$ t.q. $\|g - P\|_\infty \leq \varepsilon$. On en déduit :

$$\|f - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

Il en résulte que $\overline{\text{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}} = L^2([a, b], \mathbb{C})$.

□

1.5.1 Autres bases hilbertiennes classiques de L^2

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On se propose de construire des bases orthogonales de $L^2(I)$ lorsque le produit scalaire considéré est :

$$(f, g) \mapsto \int_I f(x)g(x)\rho(x)dx \tag{1.1}$$

où ρ est continue sur I, à valeurs > 0 et vérifie :

$$\int_I x^n \rho(x)dx < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace $L^2(I)$ muni du produit scalaire (1.1).

Remarque 4. Lorsque I est borné, $\mathcal{C}^\infty(\overline{I})$ est dense dans $L^2(I, \rho)$ et le théorème de Stone-Weierstrass implique que l'espace des fonctions polynômes est dense dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{I})$, donc dense dans $L^2(I, \rho)$ et les polynômes orthogonaux pour ρ forment une base orthogonale de $L^2(I, \rho)$. Si I n'est pas borné, il existe des poids pour lesquels la suite des polynômes orthogonaux n'est plus une base.

Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont les polynômes orthogonaux associés au poids $\rho \equiv 1$ sur $I =]-1, 1[$. Ils ont donnés par la formule :

$$\ell_n(x) = ((x^2 - 1)^n)^{(n)}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

et vérifient :

$$\|\ell_n\|_2 = 2^n n! \sqrt{\frac{2}{2n+1}}, \quad \forall n \geq 0.$$

Il est usuel de normaliser les polynômes de Legendre en posant :

$$L_n := \frac{\ell_n}{2^n n!}$$

et alors $L_n(1) = 1$, $\forall n \geq 0$.

Fonctions d'Hermite

Cette base de $L^2(\mathbb{R})$ joue un rôle important dans l'étude de la transformation de Fourier et dans l'étude de l'oscillateur harmonique.

On commence par montrer que la suite de fonctions $g_k : x \mapsto e^{-x^2/2}x^k$, $k \in \mathbb{N}$, est un système total dans $L^2(\mathbb{R})$. En effet, soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ t.q. $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}x^k g(x)dx = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, et soit G la fonction de la variable complexe définie par :

$$G(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixz} e^{-x^2/2} g(x)dx \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Soit $z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$. On remarque que :

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{ixz} e^{-x^2/2} g(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta x} e^{-x^2/2} |g(x)|dx.$$

Sot $R > 0$ et soit $|\eta| \leq R$. On en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{ixz} e^{-x^2/2} g(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} e^{R|x|} e^{-x^2/2} |g(x)|dx = e^{R^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(|x|-R)^2/2} |g(x)|dx$$

$$\leq e^{R^2/2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(|x|-R)^2} dx \right)^{1/2} \|g\|_2 = e^{R^2/2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right)^{1/2} \|g\|_2 < +\infty, \quad (1.2)$$

donc G est bien définie sur la bande compacte $|\text{Im}z| \leq R$, $\forall R > 0$, donc sur $\mathbb{C}$. De plus, G est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car $z \mapsto e^{ixz}e^{-x^2/2}g(x)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$ et on a : $\forall R > 0$, $\forall |\text{Im}z| \leq R$,

$$|e^{ixz}e^{-x^2/2}g(x)| \leq e^{R^2/2}e^{-(|x|-R)^2/2}|g(x)|$$

où la fonction dominante $x \mapsto e^{-(|x|-R)^2/2}|g(x)|$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ d'après (1.2). Du Théor eme de convergence dominée de Lebesgue on déduit que G est holomorphe sur la bande compacte $|\text{Im}z| \leq R$, $\forall R > 0$, donc sur $\mathbb{C}$. En particulier, les dérivées $G^{(k)}$ de G, $k \in \mathbb{N}$, se calculent par dérivation sous le signe somme, i .e. : :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad G^{(k)}(z) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{ixz}e^{-x^2/2}g(z)dz$$

d'où on déduit que :

$$G^{(k)}(0) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{-x^2/2}g(z)dz = 0$$

par hypothèse sur g. On en déduit que $G \equiv 0$, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixz}e^{-x^2/2}g(x)dx = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

La transformation de Fourier étant injective sur $L^1(\mathbb{R})$, il en résulte que $e^{-x^2/2}g(x) = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}$, i.e. $g = 0$. Cela achève de monrer que la suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale dans $L^2(\mathbb{R})$. Le procédé d'orthonormlisation de Gramm-Schmidt permet d'en déduire une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Fonctions de Laguerre

On pose :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}_n(x) = e^{-x/2}L_n(x) \quad \text{où} \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$$

Exercice 6. Soit à résoudre : trouver $u : [0,T] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto u(t,x)$, solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(t,0) = u(t,1) = 0, \tag{1.3}$$

1. Montrer que u se prolonge sur $[0,T] \times [-1,1]$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ impaire en $x \in [-1,1]$.
2. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de solutions de (1.3) de la forme $u_n(t,x) = \phi_n(t)v_n(x)$ où v_n peut être explicité dans la restriction à $[0,1]$ d'une base hilbertienne de $L^2([-1,1],\mathbb{C})$, $\forall n \geq 1$.
3. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de $L^2([-1,1],\mathbb{C})$. On pose :

$$\forall n \geq 0, \quad f_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n + e_{-n}), \quad f_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n - e_{-n}).$$

Montrer que la famille $(f_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2([-1,1],\mathbb{C})$.

4. En déduire que la solution générale de (1.3) s'écrit :

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin(\pi n x), \quad \text{p.p. dans } [0,T]\times[0,1].$$

où $(\alpha_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

5. Résoudre (1.3) lorsque u vérifie en outre la condition initiale : $u(0,x) = x^2$ sur $[0,1]$.
6. Résoudre (1.3) dans le cas d'une condition initiale $u(0,x) = f(x)$ sur $[0,1]$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$.

Exercice 7. 1. Soit $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-|x|}$. Montrer que K admet une transformée de Fourier. Calculer $\hat{K}$.

Dans la suite on considère le problème : $y'' - y = f$ dans $\mathbb{R}$.

2. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ t.q. : $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}$, $p_{\alpha,\beta}(g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha g^{(\beta)}(x)| < +\infty$. On suppose que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
   (a) On suppose que $y \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{y}(\xi) = -\frac{\hat{f}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}.$$

   (b) En déduire qu'il existe une unique solution $y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
3. On suppose que $f \in L^2(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\xi \mapsto -\frac{\hat{f}(\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}$. Montrer que l'équation $\hat{y} = g$ admet une unique solution y dans $L^2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que : $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} y(x)(\varphi''(x) - \varphi(x))dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$.
   (c) En déduire qu'il existe $y'' \in L^2(\mathbb{R})$ t.q. $y'' - y = f$.

1.6 Théorèmes de Lax-Milgram et Stampacchia

Soit H un espace de Hilbert et soit $f : H \times H \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire (bilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

1. L'application f est continue ssi : $\sup_{(x,y)\in H\times H} \frac{|f(x,y)|}{\|x\|\|y\|} < +\infty$, i.e. ssi il existe une constante $M > 0$ t.q.

$$\forall (x,y) \in H\times H, \quad |f(x,y)| \leq M\|x\|\|y\|.$$

2. L'application f est dite coercive si il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$\forall x \in H, \quad \mathrm{Re} f(x,x) \geq \alpha \|x\|^2.$$

Théorème 1.6.1 (Stampacchia)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit $f : H \times H \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire continue et coercive. Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide de H. Alors, $\forall \varphi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ solution de :*

$$u \in C \quad \text{et} \quad \forall v \in C, \quad \mathrm{Re}\,\overline{\varphi}(v-u) \leq \mathrm{Re} f(u, v-u).$$

De plus, si f est hermitienne (ou symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), alors u est l'unique solution de :

$$u \in C \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} f(u,u) - \mathrm{Re}\overline{\varphi}(u) = \min_{v\in C}\left(\frac{1}{2} f(v,v) - \mathrm{Re}\overline{\varphi}(v)\right)$$

Démonstration. Soit $\varphi \in H'$. Pour tout $u \in H$, $v \mapsto \overline{f(u,v)}$ est une forme linéaire continue sur H, donc d'après le Théorème de Représentation de Riesz, il existe un unique $Au \in H$ t.q.

$$\forall v \in H, \quad \langle v, Au\rangle = \overline{f(u,v)} \iff \forall v \in H, \quad \langle Au, v\rangle = f(u,v).$$

et l'application $A : H \to H$, $u \mapsto Au$ est linéaire avec

$$\forall u, v \in H, \quad |\phi_{Au}(v)| = |\langle Au, v\rangle| = |f(u,v)| \leq M\|u\|\|v\| \Rightarrow \|Au\| \leq M\|u\|$$

donc A est continue de norme $\|A\| \leq M$. De même il existe $a \in H$ unique t.q.

$$\forall v \in H, \quad \varphi(v) = \langle v, a\rangle.$$

Soit $u \in C$. On a : $\forall v \in C$

$$\mathrm{Re} f(u, v-u) \geq \mathrm{Re}\overline{\varphi}(v-u) \iff \mathrm{Re}\langle Au, v-u\rangle \geq \mathrm{Re}\langle a, v-u\rangle \iff \mathrm{Re}\langle a-Au, v-u\rangle \leq 0$$

$$\iff \mathrm{Re}\langle \rho a - \rho Au, v-u\rangle \leq 0, \quad \forall \rho > 0$$

$$\iff \mathrm{Re}\langle (\rho a - \rho Au + u) - u, v-u\rangle \leq 0, \quad \forall \rho > 0$$

$$\iff u = p_C(\rho a - \rho Au + u), \quad \forall \rho > 0.$$

Soit $g_\rho : C \to C$, $u \mapsto p_C(\rho a - \rho Au + u)$, $\forall \rho > 0$. Comme H est complet il reste à vérifier que g_ρ est contractante pour certaines valeurs de $\rho > 0$. Soit $\rho > 0$. On a : $\forall u, u' \in C$,

$$\|g_\rho(u) - g_\rho(u')\|^2 \leq \|u - u' - \rho A(u-u')\|^2 =$$

$$= \|u-u'\|^2 - 2\rho \mathrm{Re}\langle u-u', A(u-u')\rangle + \rho^2\|A(u-u')\|^2$$

avec

$$\mathrm{Re}\langle u-u', A(u-u')\rangle = \mathrm{Re} f(u-u', u-u') \geq \alpha\|u-u'\|^2$$

donc

$$\|g_\rho(u) - g_\rho(u')\|^2 \leq \|u-u'\|^2(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2).$$

On fixe $\rho \in \left]0, \frac{2\alpha}{M^2}\right[$. Alors $g_\rho : C \to C$ est strictement contractante de rapport $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2 \in]0,1[$. Du Théorème du point fixe de Banach, on déduit que g_ρ admet un unique point fixe $u \in C$. Par construction, u répond à la première partie de l'énoncé.

On suppose que f est hermitienne (symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Alors : $\forall v \in C$,

$$\frac{1}{2}f(u,u) - \frac{1}{2}f(v,v) - \mathrm{Re}\overline{\varphi}(u-v) \leq \frac{1}{2}f(u,u) - \frac{1}{2}f(v,v) - \mathrm{Re} f(u, u-v) =$$

$$= -\frac{1}{2}f(u,u) - \frac{1}{2}f(v,v) + \mathrm{Re} f(u,v) = -\frac{1}{2}f(u-v, u-v) \leq -\alpha\|u-v\|^2 \leq 0$$

i.e. :

$$\forall v \in C, \quad \frac{1}{2}f(u,u) - \mathrm{Re}\overline{\varphi}(u) \leq \frac{1}{2}f(v,v) - \mathrm{Re}\overline{\varphi}(v).$$

□

Remarque 5. On a utilisé le Théorème du Point fixe de Banach.

Théorème 1.6.2 (Point fixe de Banach)**.** *Soit E un espace de Banach et soit $A \subset E$ un fermé. Soit $f : E \to E$ t.q. $f(A) \subset A$. On suppose que f est strictement contractante i.e qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ t.q.*

$$\forall x, y \in E, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|.$$

Alors f admet un unique point fixe dans A.

Démonstration. Soit $x_0 \in A$. On pose : $\forall n \geq 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$. On remarque que

$$\forall n \geq 1, \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \lambda \|x_n - x_{n-1}\| \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|.$$

donc : $\forall n, p \geq 0$,

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{p-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \lambda^k \|x_1 - x_0\| = \lambda^n \frac{1-\lambda^p}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\|$$

$$\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\|$$

On en déduit que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans E, donc convergente dans E. Soit $a \in E$ sa limite. Par construction : $\forall n \geq 0$, $x_n \in A$ et A est fermé par hypotèse, donc $a \in \overline{A} = A$.

Par hypothèse, f est continue donc $a = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$, i.e. a est un point fixe pour f. Soit $a' \in E$ un point fixe de f. On a :

$$\|a - a'\| = \|f(a) - f(a')\| \leq \lambda \|a - a'\| \Rightarrow (1 - \lambda)\|a - a'\| \leq 0 \Rightarrow a = a'.$$

□

Théorème 1.6.3 (Lax-Milgram)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit $f : H \times H \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire continue et coercive. Alors $\forall \varphi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ solution de :*

$$\forall v \in H, \quad f(u, v) = \overline{\varphi}(v).$$

De plus, si f est hermitienne (ou symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), alors u est l'unique solution de :

$$\frac{1}{2} f(u, u) - \overline{\varphi}(u) = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2} f(v, v) - \mathrm{Re}\, \overline{\varphi}(v) \right)$$

Démonstration. Soit $\varphi \in H'$. D'après le Théorème de Stampaccha appliqué avec $C = H$, il existe $u \in H$ unique solution de

$$\forall v \in H, \quad \mathrm{Re} f(u, v - u) \geq \mathrm{Re} \overline{\varphi}(v - u).$$

L'application $v \mapsto u - v$ est une bijection de H sur H, donc

$$\forall w \in H, \quad \mathrm{Re} f(u, w) \geq \mathrm{Re} \overline{\varphi}(w).$$

On en déduit, en remplaçant $w \in H$ par $-w \in H$ que

$$\forall w \in H, \quad \mathrm{Re} f(u, w) = \mathrm{Re} \overline{\varphi}(w).$$

En remplaçant $w \in H$ par $iw \in H$, on en déduit ensuite :

$$\forall w \in H, \quad \mathrm{Im} f(u,w) = \mathrm{Im}\overline{\varphi}(w).$$

i.e. :

$$\forall w \in H, \quad f(u,w) = \overline{\varphi}(w).$$

On suppose f hermitienne. Soit $v \in H$. On a :

$$\frac{1}{2}f(u,u) - \frac{1}{2}f(v,v) - \mathrm{Re}\overline{\varphi}(u-v) = \frac{1}{2}f(u,u) - \frac{1}{2}f(v,v) - \mathrm{Re}\, f(u,u-v) =$$

$$= -\frac{1}{2}f(u,u) - \frac{1}{2}f(v,v) + \mathrm{Re}\, f(u,v) = -\frac{1}{2}f(u-v,u-v) \leq -\alpha\|u-v\|^2 \leq 0$$

□

Exemple 9. Soit $f \in L^2(]0,1[)$. On considère le problème de Dirichlet en dimension 1 : trouver $u \in H_0^1(0,1)$ solution de $-u'' = f$ dans $]0,1[$. où on rappelle que

$$H_0^1(0,1) = \{\underbrace{v \in L^2(0,1), \quad v' \in L^2(0,1)}_{v\in H^1(0,1)}, \quad v(0) = v(1) = 0\}.$$

On aura besoin de l'inégalité de Poincaré :

$$\exists C > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall v \in H_0^1(0,1), \qquad \int_0^1 |v|^2 dx \leq C \int_0^1 |v'|^2 dx, \tag{1.4}$$

qui fait de $v \mapsto \|v'\|_{L^2(0,1)} =: \|v'\|_2$ une norme sur $H_0^1(0,1)$ équivalente à la norme induite par $H^1(0,1)$.

En vue d'appliquer le théorème de Lax-Milgram, on réécrit le problème sous forme variationnelle : trouver $u \in H_0^1(0,1)$ solution de

$$\int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 fvdx, \quad \forall v \in H_0^1(0,1). \tag{1.5}$$

On vérifie directement que $(u,v) \mapsto \int_0^1 u'v'dx$ est une forme bilinéaire, continue sur $H_0^1(0,1)$ et elliptique sur $H_0^1(0,1)$. Du théorème de Lax-Milgram, on déduit qu'il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ solution de (1.5). On définit ainsi une application $T : L^2(0,1) \to H_0^1(0,1)$, $f \mapsto u =: Tf$ solution de (1.5). On note aussi $T = (-\Delta)^{-1}$ par référence au Laplacien Δ.

Remarque 6. L'opérateur T défini dans l'Exemple 9 est compact comme conséquence de la compacité de l'injection $H^1(0,1) \subset L^2(0,1)$. En effet, si $(f_n)_{n\geq 0} \in L^2(0,1)^{\mathbb{N}}$ vérifie $\|f_n\|_2 \leq 1$, $\forall n \geq 0$, alors $u_n := Tf_n$, $n \geq 0$, vérifie : $\forall n \geq 0$,

$$\|u_n'\|_2^2 = \int_0^1 f_n u_n dx \leq \|f_n\|_2\|u_n\|_2 \underset{(1.4)}{\leq} \sqrt{C}\|f_n\|_2\|u_n'\|_2 \Rightarrow \|u_n'\|_2 \leq \sqrt{C}\|f_n\|_2 \leq \sqrt{C}$$

et donc

$$\|u_n\|_{H^1(0,1)}^2 := \|u_n\|_2^2 + \|u_n'\|_2^2 \leq (1+C)\|u_n'\|_2^2 \leq C(1+C) =: C'.$$

Comme l'injection $H^1(0,1) \subset L^2(0,1)$ est compacte, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dans un compact de $L^2(0,1)$.

Remarque 7. Soit $f \in L^2(0,1)$ et soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère le problème : trouver $u \in H_0^1(0,1)$ solution de $-u'' + \mu u = f$. Si $\mu > 0$ on montre comme dans l'Exemple 9 qu'il existe une unique solution. On suppose donc que $\mu < 0$. Alors le Théorème de Lax-Milgram ne permet pas de conclure car $(v,w) \mapsto \int_0^1 v'w'dx + \mu \int_0^1 vwdx$ n'est pas elliptique. On résoud le problème grâce à la compacité de T. En effet, le problème se réécrit :

$$-u'' + \mu u = f \iff -u'' = f - \mu u \iff u = T(f - \mu u) \iff (I + \mu T)u = Tf$$

$$\iff \left(T + \frac{1}{\mu} I\right) u = \frac{1}{\mu} Tf \iff \left(T + \frac{1}{\mu} I\right) u = \frac{1}{\mu}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right) f - \frac{1}{\mu^2} f$$

$$\iff \left(T + \frac{1}{\mu} I\right)\left(u - \frac{1}{\mu} f\right) = -\frac{1}{\mu^2} f$$

On commence par remarquer que le problème admet une solution ssi $f \in \operatorname{Im}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right)$. De l'alternative de Fredholm et de la compacité de T on déduit que : $\operatorname{Im}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right)$ est fermé et que :

$$\operatorname{Im}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right) = \overline{\operatorname{Im}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right)} = \operatorname{Ker}\left(T^* + \frac{1}{\mu} I\right)^{\perp}.$$

De plus, $T^* = T$ est auto-adjoint pour le produit scalaire de $L^2(0,1)$ car : $\forall f, g \in L^2(0,1)$,

$$\int_0^1 Tfgdx = -\int_0^1 Tf(Tg)''dx = \int_0^1 (Tf)'(Tg)'dx = -\int_0^1 (Tf)''Tgdx = \int_0^1 fTgdx,$$

et donc :

$$\operatorname{Im}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right) = \operatorname{Ker}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right)^{\perp}.$$

On remarque aussi que l'opérateur T est positif au sens où : $\forall f \in L^2(0,1)$,

$$\int_0^1 Tffdx = -\int_0^1 Tf(Tf)''dx = \int_0^1 |(Tf)'|^2 dx \geq 0.$$

Du théorème spectral, on déduit que la suite des valeurs propres de T est dans $]0, +\infty[$, de sorte que $\operatorname{Ker}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right) \neq \{0\}$ si $-\frac{1}{\mu}$ est une valeur propre de T. Finalement, en appliquant à nouveau l'alternative de Fredholm, on a :

$$L^2(0,1) = \operatorname{Ker}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right)^{\perp}$$

et on en déduit que le problèeme admet une solution ssi f n'est pas vecteur propre de T. Si cette condition est réalisée, alors :

$$u = u_0 + \frac{1}{\mu} f - \frac{1}{\mu^2}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right)^{-1} f = u_0 + \frac{1}{\mu}\left(I - \frac{1}{\mu}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right)^{-1}\right) f$$

où $u_0 \in \operatorname{Ker}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right)$ est arbitraire dans un ev de dimension finie. Donc l'existence et l'unicité sont réalisées a priori si on impose $u \in \operatorname{Ker}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right)^{\perp}$ et

$f \in \operatorname{Ker}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right)^{\perp}$. Plus généralement, si $f \in \operatorname{Ker}\left(T + \frac{1}{\mu} I\right)^{\perp}$ l'unicité est réalisée modulo un ev de dimension finie et l'indétermination est levée en imposant un nombre suffisant de contraintes supplémentaires (le nombre de degrés de liberté qui coïncide avec la dimension de l'ev de dimension finie).

Exercice 8. Soit H un espace de Hilbert. Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ t.q. $S^* = S$ et $\langle Su, u\rangle \in \mathbb{R}^+$, $\forall u \in H$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(S) = \operatorname{Im}(S)^{\perp}$.
2. Déduire du Théorème de Lax-Milgram que $I + tS$ est bijectif, $\forall t > 0$.
3. Soit $t > 0$ et soit $f \in H$, On pose $u_t = (I + tS)^{-1} f$.
   (a) Montrer que si $f \in \operatorname{Ker}(S)$, alors $u_t = f$.
   (b) Montrer que si $f \in \operatorname{Im} S$, alors il existe $v \in H$ t.q. : $t\|u_t\| \leq \|v\|$.
   (c) En déduire que : $\forall f \in \operatorname{Im} S$, $\lim_{t\to\infty}(I + tS)^{-1} f = 0$.
   (d) Montrer que $\forall f \in H$, $\lim_{t\to\infty}(I + tS)^{-1} f = p_{\operatorname{Ker} S} f$.

Exercice 9. 1. Montrer que l'application $(u, v) \mapsto \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$ est un produit scalaire sur $E = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ u(0) = u(1) = 0\}$.

2. Montrer que l'application $(u, v) \mapsto \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 x^2 u(x)v(x)dx$ est une forme bilinéaire symétrique et coercive sur E.
3. Déduire du Théorème de Lax-Milgram l'existence d'une solution du problème avec conditions initiales :
   $-u'' + x^2 u = x^3, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$

Chapitre 2

Le Théorème de Hahn-Banach

2.1 Le Théorème de Hahn-Banach analytique

Théorème 2.1.1 (Le Théorème de Hahn-Banach (Forme analytique))**.** *Soit E un ev sur $\mathbb{R}$ et soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :*

1. *$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in E$, $p(tx) = tp(x)$;*
2. *$\forall x, y \in E$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.*

Soit $F \subset E$ un sev de E et soit $f : F \to \mathbb{R}$ une application linéaire t.q. : $\forall x \in F$, $f(x) \leq p(x)$. Alors il existe une application linéaire $g : E \to \mathbb{R}$ t.q.

1. *$g|_F = f$;*
2. *$\forall x \in E$, $g(x) \leq p(x)$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des paires (F', h) où $F' \subset E$ est un sev de E contenant F et où $h : F' \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire prolongeant f sur F' t.q. $h \leq p$ sur F'. On munit $\mathcal{E}$ de la relation d'ordre :

$$(F_1', h_1) \subset (F_2', h_2) \iff F_1' \subset F_2' \quad \text{et} \quad h_2|_{F_1'} = h_1.$$

Alors $\mathcal{E} \neq \emptyset$ car $(F, f) \in \mathcal{E}$. De plus, $\mathcal{E}$ est inductif. En effet. Si $C \subset \mathcal{E}$ est une chaîne, alors $F_0 = \cup_{F' \in C} F'$ est un sev de E contenant F et $h_0 : F_0 \to \mathbb{R}$ définie par $h_0|_{F'} = h$, $\forall (F', h) \in C$, est une forme linéaire sur F_0. De plus, (F_0, h_0) est un majorant de C dans $\mathcal{E}$. Du Lemme de Zorn, on déduit que $\mathcal{E}$ admet un élément maximal $(F_g, g) \in \mathcal{E}$. On suppose que $F_g \neq E$. Soit alors $x_0 \in E \setminus F_g$. On a : $\forall x, y \in F_g$,

$$g(x) - g(y) = g(x-y) \leq p(x-y) \leq p(x+x_0) + p(-y-x_0) \iff$$

$$\iff -g(y) - p(-y-x_0) \leq -g(x) + p(x+x_0).$$

On pose $S = \sup_{y \in F_g} -g(y) - p(-y-x_0)$, $I = \inf_{x \in F_g} -g(x) + p(x+x_0)$. Alors $S \leq I$. Soit $a \in [S, I]$. Sur $\mathbb{R}x_0 + F_g = \mathbb{R}x_0 \oplus F_g$ qui est une somme directe on définit $h : \mathbb{R}x_0 \oplus F_g \to \mathbb{R}$ en posant : $\forall w = tx_0 + x \in \mathbb{R}x_0 \oplus F_g$, $h(w) = ta + g(x)$.

On vérifie immédiatement que h est une forme linéaire sur $\mathbb{R}x_0 \oplus F_g$. Si $t > 0$, on a :

$$\frac{h(w)}{t} = a+g\left(\frac{x}{t}\right) \leq I+g\left(\frac{x}{t}\right) \leq -g\left(\frac{x}{t}\right)+p\left(\frac{x}{t}+x_0\right)+g\left(\frac{x}{t}\right) = p\left(\frac{x}{t}+x_0\right) =$$

$$= \frac{1}{t}p\left(x+tx_0\right) = \frac{1}{t}p(w).$$

Alors $t > 0 \Rightarrow h(w) \leq p(w)$. Si $t < 0$, alors

$$-\frac{h(w)}{t} = -a-g\left(\frac{x}{t}\right) \leq -S-g\left(\frac{x}{t}\right) \leq g\left(\frac{x}{t}\right))+p\left(-\frac{x}{t}-x_0\right)-g\left(\frac{x}{t}\right) = p\left(-\frac{x}{t}-x_0\right) =$$

$$= -\frac{1}{t}p\left(x+tx_0\right) = -\frac{1}{t}p(w).$$

Alors $t < 0 \Rightarrow h(w) \leq p(w)$. Dans tous les cas : $t \neq 0 \Rightarrow h(w) \leq p(w)$. Si $t = 0$, alors $w = x \in F_g$ et $h(w) \leq p(w)$ par définition de $\mathcal{E}$. Finalement : $\forall w \in \mathbb{R}x_0 \oplus F_g$, $h(w) \leq p(w)$, ce qui contredit le caractère maximal de (F_g, h). Donc $F_g = E$. □

Corollaire 2.1.2 (Prolongement par continuité)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $F \subset E$ un sev de E et soit $f : F \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe $g \in E'$ t.q. $g|_F = f$ et $\|g\| = \|f\|$.*

Démonstration.

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on pose : $\forall x \in E$, $p(x) = \|f\|\|x\|$, Alors $f(x) \leq |f(x)| \leq p(x), \forall x \in F$. Du Théorème de Hahn-Banach analytique, on déduit qu'il existe $g : E \to \mathbb{R}$ linéaire t.q. $g|_F = f$ et $g(x) \leq p(x)$, $\forall x \in E$. On a $\forall x \in E$, $g(-x) = -g(x) \leq p(-x) = p(x)$, donc : $-p(x) \leq g(x) \leq p(x)$, i.e. $|g(x)| \leq \|f\|\|x\|$. Il en résulte : $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{|g(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|$, donc $\|g\| \leq \|f\|$. De plus, $g|_F = f \Rightarrow \|g\| \geq \|f\|$. Donc $\|g\| = \|f\|$.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on pose $f_1 = \mathrm{Re}(f)$, $f_2 = \mathrm{Im}(f)$. On vérifie immédiatement que f_1 et f_2 sont des formes $\mathbb{R}$-linéaires sur F. On a : $\forall x \in F$, $|f_1(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$, donc f_1 est continue sur F avec $\|f_1\| \leq \|f\|$. Du cas réel, on déduit qu'il existe $g_1 : E \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$-linéaire et continue sur E t.q. $\|g_1\| = \|f_1\|$. On remarque que :

$$\forall x \in E, \quad f(ix) = if(x) \iff f_1(ix) + if_2(ix) = if_1(x) - f_2(x)$$

$$\Rightarrow f_2(x) = -f_1(ix).$$

On en déduit que l'application $g_2 : E \to \mathbb{R}$ définie par $g_2(x) = -g_1(ix)$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue sur E qui prolonge f_2. Alors $g(x) := g_1(x) + ig_2(x)$ prolonge f sur E par construction. On a aussi :

$$\forall x \in E, \quad g_1(ix) = -g_2(x), \quad g_2(ix) = g_1(x).$$

Il en résulte : $\forall \lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, $\forall x \in E$,

$$g(\lambda x) = g_1(ax) + g_1(ibx) + ig_2(ax) + ig_2(ibx) =$$

$$= ag_1(x) + bg_1(ix) + iag_2(x) + ibg_2(ix) =$$

$$= ag_1(x) - bg_2(x) + iag_2(x) + ibg_1(x) = (a + ib)g(x)$$

i.e. $g(\lambda x) = \lambda g(x)$, donc g est une forme $\mathbb{C}$-linéaire sur E. Soit $x \in E$ t.q. $g(x) \neq 0$. On pose : $g(x) = |g(x)|e^{i\alpha(x)}$. Alors

$$|g(x)| = g(x)e^{-i\alpha(x)} = g(e^{-i\alpha(x)}x) = g_1(e^{-i\alpha(x)}x) = |g_1(e^{-i\alpha(x)}x)| \leq$$

$$\leq \|g_1\|\|e^{-i\alpha(x)}x\| = \|g_1\|\|x\| = \|f_1\|\|x\| \leq \|f\|\|x\|.$$

On en déduit que $\|g\| \leq \|f\|$. De plus $g|_F = f \Rightarrow \|g\| \geq \|f\|$.Il en résulte que $\|g\| = \|f\|$.

□

Exercice 10. Soit H un espace de Hilbert et soit $V \subset H$ un sev dense dans H. On suppose que V est muni d'une norme $\|\cdot\|_V$ qui en fait un espace réflexif et qui rend continue l'injection canonique $V \subset H$, i.e. qu'il existe une constante $C > 0$ t.q.

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_H \leq C\|v\|_V.$$

1. On considère l'opérateur antilinéaire $T : H \to V'$, $f \mapsto Tf$ t.q.

$$\forall v \in V, \quad Tf(v) = \langle v, f\rangle.$$

   Montrer que : $\forall f \in H$, $\|Tf\|_{V'} \leq C\|f\|_H$.
2. Montrer que T est injective.
3. Soit $v \in V$ t.q. $Tf(v) = 0$, $\forall f \in H$. Que peut-on dire de v ?
4. En déduire que $T(H)$ est dense dans V'.
5. Soit $\varphi \in V'$. Montrer que $\varphi \in T(H)$ ssi il existe une constante $a > 0$ t.q. $\forall v \in V$, $|\varphi(v)| \leq a\|v\|_H$.

Corollaire 2.1.3. *Soit $E \neq \{0\}$ un ev sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$. Il existe $\phi \in E'$ t.q. $\phi(x_0) = \|x_0\|$ et $\|\phi\| = 1$.*

Démonstration. Soit $\phi : \mathbb{K}x_0 \to \mathbb{K}$ définie par $\phi(tx_0) = t\|x_0\|$, $\forall t \in \mathbb{K}$. Alors $|\phi(tx_0)| = |t|\|x_0\| = \|tx_0\|$, donc $\|\phi\| = 1$ et ϕ est une forme linéaire continue sur $F = \mathbb{K}x_0$. On en déduit que ϕ se prolonge en une application encore notée ϕ linéaire sur E t.q. $\|\phi\| = 1$. Par construction $\phi(x_0) = \|x_0\|$. □

Corollaire 2.1.4. *Soit $E \neq \{0\}$ un ev. Alors :*

$$\forall x, y \in E, \quad x \neq y \Rightarrow \exists f \in E' \quad t.q. \quad f(x) \neq f(y).$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$, $x \neq y$. Alors $x_0 := x - y \neq 0$. Soit $f \in E'$ t.q. $f(x_0) = \|x_0\|$ et $\|f\| = 1$. Alors $f(x) - f(y) = f(x_0) = \|x - y\| > 0$ car $x - y \neq 0$, i.e. $f(x) \neq f(y)$. □

Exercice 11. *Soit E un evn et soit $F \subset E$, $F \neq E$, un sev fermé de E. Soit $x_0 \in E \setminus F$. Alors $\exists f \in E'$ t.q. $f(x_0) = d(x_0, F) > 0$ et $f|_F = 0$.*

Soit ϕ définie sur $\mathbb{R}x_0$ par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(tx_0) = td(x_0, F)$. Comme F est fermé, $x_0 \notin F \Rightarrow d(x_0F) > 0$ et $\phi \neq 0$. Alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi(tx_0) \leq |t|d(x_0, F) = d(tx_0, F)$. On vérifie immédiatement que $p : x \mapsto d(x, F)$ est une semi-norme sur E. Du théorème de Hahn-Banach on déduit que ϕ se prolonge à E en une forme linéaire encore notée ϕ t.q. $\phi(x) \leq d(x, F)$, $\forall x \in E$. On a alors : $\forall x \in E$,

$$\phi(x) \leq d(x, F) \text{ et } \phi(-x) = -\phi(x) \leq d(-x, F) = d(x, F) \Rightarrow |\phi(x)| \leq d(x, F).$$

En particulier : $\forall x \in E$, $|\phi(x)| \leq d(x, F) \leq \|x\|$, donc $\phi \in E'$ et $\|\phi\| \leq 1$. De plus :

$$\phi\left(\frac{\|x_0\|}{d(x_0, F)} x_0\right) = \|x_0\| \Rightarrow \|\phi\| = 1$$

Par construction, $\phi(x_0) = d(x_0, F)$.

Corollaire 2.1.5. *Soit E un evn et soit $F \subset E$ un sev. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\overline{F} = E$

(ii) $\forall f \in E'$, $f|_F = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

Démonstration. Si $\overline{F} = E$, alors (ii) est vrai par densité de F dans E et continuité de $f \in E'$.

On suppose que $\overline{F} \neq E$. Soit alors $x_0 \in E \setminus \overline{F}$. De l'Exercice 11 on déduit qu'il existe $f \in E'$ t.q. $f|_{\overline{F}} = 0$ et $\|f\| = 1$, i.e. (ii) n'est pas vérifié. □

2.2 Théorème de Hahn-Banach géométrique

Définition 2.2.1. Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On appelle *hyperplan affine* de E tout sous-espace affine de E de codimension 1, i.e. toute partie de la forme

$$H = f^{-1}(\alpha) = \{x \in E,\ f(x) = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

où f est une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur E. Alors $f = \alpha$ est une équation de H.

1. On dit qu'un hyperplan affine H d'équation $f = \alpha$ sépare (au sens large) deux ensembles A et B si, quitte à échanger les rôles de A et B, on a $A \subset f^{-1}([\alpha, +\infty[)$ et $B \subset f^{-1}(]-\infty, \alpha])$.
2. On dit qu'un hyperplan affine H d'équation $f = \alpha$ sépare strictement deux ensembles A et B s'il existe $\varepsilon > 0$ t.q., quitte à échanger les rôles de A et B, on a $A \subset f^{-1}([\alpha + \varepsilon, +\infty[)$ et $B \subset f^{-1}(]-\infty, \alpha - \varepsilon])$.

Proposition 2.2.1. *Un hyperplan affine H d'équation $f = \alpha$ est fermé ssi $f \in E'$.*

Démonstration. Soit H un hyperplan affine d'équation $f = \alpha$. On suppose $f \neq 0$. Alors f est surjective. Soit $a \in E$ t.q. $f(a) = \alpha$. Alors

$$x \in H \iff f(x) = f(a) \iff x - a \in \mathrm{Ker}(f).$$

On en déduit que $H = a + \mathrm{Ker}(f)$. L'applicaton $x \mapsto a + x$ est un homéomorphisme de E sur E donc H est fermé ssi $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé, i.e. ssi f est continue. En effet, si $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé et f n'est pas bornée alors il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0} \in E$ t.q. $\|x_n\| = 1$ et $|f(x_n)| > n$, $\forall n \geq 0$. Soit $y \in E$. On pose :

$$y_n = y - \frac{f(y)}{f(x_n)} x_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Par construction : $\forall n \geq 0$, $y_n \in \mathrm{Ker}(f)$ et

$$\|y_n - y\| \leq \frac{|f(y)|}{|f(x_n)|} \leq \frac{1}{n}|f(y)|$$

donc $y_n \to y \in \overline{\mathrm{Ker}(f)} = \mathrm{Ker}(f)$. Ceci étant vrai $\forall y \in E$, on en déduit que $f = 0$. Contradiction. Donc f est continue ssi $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé. □

Lemme 2.2.2. *Soit E un evn et soit $C \subset E$ un ouvert convexe non vide t.q. $0 \in C$. On pose :*

$$p_C(x) = \inf\{\alpha > 0,\ \frac{x}{\alpha} \in C\}.$$

1. *Il existe $M > 0$ t.q. $\forall x \in E$, $0 \leq p_C(x) \leq M\|x\|$.*
2. *$C = \{x \in E,\ p_C(x) < 1\}$.*
3. *$\forall \lambda > 0$, $\forall x \in E$, $p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x)$.*
4. *$\forall x, y \in E$, $p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$.*

Démonstration. 1. Par hypothèse, C est ouvert et contient 0, donc il existe $r > 0$ t.q ; $B(0,r) \subset C$. Soit $x \in E$, $\neq 0$. Alors

$$\frac{r}{2\|x\|}x \in C \Rightarrow p_C(x) \leq \frac{2}{r}\|x\| =: M\|x\|$$

2. $\subset$ Soit $x \in C \setminus \{0\}$. Comme C est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $B(x,\varepsilon) \subset C$. Alors

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\|x\|}\right)x \in C \Rightarrow p_C(x) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\|x\|}\right)^{-1} = \frac{2\|x\|}{2\|x\| + \varepsilon} < 1.$$

$\supset$ Réciproquement, soit $x \in E$ t.q. $p_C(x) < 1$. Par défintion de la boren inférieure, il existe $\alpha > 0$ t.q. $p_C(x) < \alpha < 1$ et $\dfrac{x}{\alpha} \in C$. On en déduit, C étant convexe :

$$x = \alpha\frac{x}{\alpha} + (1-\alpha)0 \in C.$$

3. Soit $x \in E$ et soit $\lambda > 0$. On a

$$\lambda p_C(x) = \lambda \inf\left\{\alpha > 0,\ \frac{x}{\alpha} \in C\right\} = \inf\left\{\lambda\alpha > 0,\ \frac{x}{\alpha} \in C\right\} =$$

$$= \inf\left\{\lambda\alpha > 0,\ \frac{\lambda x}{\lambda\alpha} \in C\right\} = p_C(\lambda x).$$

car $\alpha \mapsto \lambda\alpha$ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

4. On note :

$$\forall x \in E, \quad \Lambda(x) = \{\alpha > 0,\ \frac{x}{\alpha} \in C\}.$$

Soit $x, y \in E$ et soit $\alpha \in \Lambda(x)$, $\beta \in \Lambda(y)$. On a

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{y}{\beta}.$$

Par convexité de C :

$$\frac{x}{\alpha} \in C \quad \text{et} \quad \frac{y}{\beta} \in C \Rightarrow \frac{x+y}{\alpha+\beta} \in C$$

donc $p_C(x+y) \leq \alpha + \beta$. On fixe $\lambda \in \Lambda(x)$. Alors :

$$\forall \beta \in \Lambda(y), \quad p_C(x+y) - \alpha \leq \beta \Rightarrow p_C(x+y) - \alpha \leq p_C(y).$$

Finalement :

$$\forall \alpha \in \Lambda(x), \quad p_C(x+y) - p_C(y) \leq \alpha \Rightarrow p_C(x+y) - p_C(y) \leq p_C(x).$$

□

Proposition 2.2.3. *Soit E un evn, soit $C \subset E$ un ouvert convexe non vide et soit $x_0 \in E \setminus C$. Alors il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ t.q. : $\forall x \in C$, $f(x) < f(x_0)$.*

Démonstration. Quitte à rempacer C par $a + C$ et x_0 par $x_0 + a$ avec $a \in E$, on peut supposer que $0 \in C$. Soit $f : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par : $f(tx_0) = tp_C(x_0)$. Alors $f \neq 0$ car $x_0 \notin C \Rightarrow p_C(x_0) \geq 1 > 0$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t \geq 0$, alors $f(tx_0) = tp_C(x_0) = p_C(tx_0)$. Si $t \leq 0$, alors $f(tx_0) = tp_C(x_0) \leq 0 \leq p_C(tx_0)$. Finalement, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(tx_0) \leq p_C(tx_0)$. Du Théorème de Hahn-Banach analytique on déduit que f se prolonge à E en une forme linéaire encore notée f t.q. : $\forall x \in E$, $f(x) \leq p_C(x) \leq M\|x\|$. Par linéarité de f, $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x) \leq p_C(-x) \leq M\|-x\| = M\|x\|$. On en déduit : $\forall x \in E$, $|f(x)| \leq M\|x\|$, i.e. $f \in E'$. Par construction : $\forall x \in C$, $f(x) \leq p_C(x) < 1 \leq p_C(x_0) = f(x_0)$. □

Théorème 2.2.4 (Théorème de Hahn-Banach (formes géométriques))**.** *Soit E un evn sur $\mathbb{R}$ et soit $A \subset E$, $B \subset E$ deux convexes non vides disjoints de E.*

1. *Si A est ouvert, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B.*
2. *Si A est compact et B fermé, il existe un hyperplan affine fermé qui sépare strictement A et B.*

Démonstration.

1. On pose $C = A - B$. Alors $C = \cup_{b \in B}(-b + A)$ est ouvert comme réunion d'ouverts. De plus : $\forall t \in [0,1]$, $\forall a, a' \in A$, $\forall b, b' \in B$, $t(a-b) + (1-t)(a'-b') = ta + (1-t)a' - tb - (1-t)b'$ avec A et B convexes $\Rightarrow ta + (1-t)a \in A$ et $tb + (1-t)b' \in B$. Il en résulte que $t(a-b) + (1-t)(a'-b') \in C$ et finalement, C est un ouvert convexe t.q. $0 \notin C$ car $A \cap B = \emptyset$. De la Proposition 2.2.3, on déduit qu'il existe $f \in E'$ t.q. : $\forall x \in C$, $f(x) < f(0) = 0$, i.e. $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $f(a-b) = f(a) - f(b) < 0$. Soit $\alpha = \sup_A f$, $\beta = \inf_B f$. Alors : $\alpha \leq \beta$ et $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $f(a) \leq \alpha \leq \beta \leq f(b)$. Autrement dit, A et B sont séparés par l'hyperplan affine fermé H d'équation $f = \alpha$.
2. Soit $C = A - B$. Le même raisonnement montre que C est convexe et $0 \notin C$. Soit $(x_n)_{n \geq 0} \in C$ une suite convegente de C de limite $x \in \overline{C}$. On pose ; $\forall n \geq 0$, $x_n = a_n - b_n$, $a_n \in A$, $b_n \in B$. Par compacité de A, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ convergeant vers $a \in A$. Alors $b_{n_k} \to a - x =: b$ et $b \in B$ car B est fermé. On en déduit que $x = a - b \in C$ et donc C est fermé. On en déduit que $0 \in C^c \Rightarrow \exists B(0,r) \subset C^c$. Comme $B(0,r)$ est un ouvert convexe non vide, il existe $f \in E'$ t.q. ; $\forall a \in A$, $\forall b \in B$,

   $$f(a-b) = f(a) - f(b) < rf(x), \quad \forall x \in B(0,1)$$

   de façon équivalente, par symétrie de $B(0,1)$:

   $$rf(x) < f(b) - f(a) \quad \forall x \in B(0,1).$$

   On en déduit, dans un premier temps :

   $$r\|f\| \leq f(b) - f(a), \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

   Il en résulte :

   $$S := \sup_A f + \frac{r}{2}\|f\| \leq \inf_B f - \frac{r}{2}\|f\| =: I.$$

Soit $\alpha \in [S, I]$. On a : $\forall a \in A$, $\forall b \in B$,

$$f(a) \leq \alpha - \frac{r}{2}\|f\| < \alpha + \frac{r}{2}\|f\| \leq f(b),$$

i.e. A et B sont séparés strictement par l'hyperplan affine d'équation $f = \alpha$.

□

Exercice 12. Soit E un evn de dimension finie. Soit $C \subset E$ un convexe non vide t.q. $0 \notin C$.

1. Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in C^{\mathbb{N}}$ et soit $D = \{x_n, \quad n \geq 0\}$. On suppose que D est dense dans C. On pose :

$$\forall n \geq 0, \quad C_n = \operatorname{conv}\{x_0, \cdots, x_n\}.$$

Montrer que C_n est compact et que $\cup_{n\geq 0} C_n$ est dense dans C.

2. Montrer qu'il existe $(f_n)_{n\geq 0} \in (E')^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\forall n \geq 0, \quad \|f_n\| = 1 \quad \text{et} \quad f_n(x) \geq 0, \quad \forall x \in C_n.$$

3. Montrer qu'il existe $f \in E'$ t.q.

$$\|f\| = 1 \quad \text{et} \quad f(x) \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

4. En déduire qu'il existe un hyperplan qui sépare C et $\{0\}$ au sens large.
5. Soit $A \subset E$ et soit $B \subset E$ deux ensembles convexes non disjoints de E. Montrer qu'il existe un hyperplan qui sépare A et B au sens large.

Corollaire 2.2.5. *Tout sous-ensemble convexe compact K d'un evn E est l'intersection des semi-espaces fermés qui contiennent K.*

Démonstration. Soit $K \subset E$ un convexe compact et soit L l'intersection des semi-espaces fermés qui contiennent K. On a $K \subset L$. Soit $x_0 \notin K$. Le Théorème de séparation de Hahn-Banach appliqué avec $A = K$ et $B = \{x_0\}$ entraîne l'existence d'un hyperplan affine fermé séparant strictement A et $\{x_0\}$: $\exists f \in E'$ t.q. $\alpha := \sup_{x\in K} f(x) < f(x_0)$. Alors $K \subset \{f \leq \alpha\} =: H$, $L \subset H$ et $x_0 \in H^c \subset L^c$. On en déduit que $K^c \subset L^c$, i.e. $L \subset K$ et finalement $K = L$. □