Compléments d'Analyse: Calcul Différentiel

Université de Rennes 1
Isabelle Gruais

5 septembre 2024

1 Rappels de calcul différentiel

1.1 Différentielle

Définition 1.1.1 (Différentiabilité)**.** Soit E et F deux evns et soit $U \subset E$ un ouvert de E. Une application $f : U \to F$ est dite différentiable en $x_0 \in U$ s'il existe une application linéaire continue $f'_{x_0} \in \mathcal{L}(E, F)$ appelée la différentielle de f en x_0 t.q.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - f'_{x_0}(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

i.e. :

$$f(x) = f(x_0) + f'_{x_0}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

cette dernière écriture signifiant que f admet un DL d'ordre 1 au voisinage de x_0.

Remarque 1.

1. En dimension infinie, la différentiabilité d'une application dépend du choix de la norme utilisée, contrairement au cas de la dimension finie où toutes les normes sont équivalentes.
2. Par définition de la différentiabilité, la différentielle $f'_{x_0} : E \to F$ en un point x_0 est continue sur E. Si en outre l'application résultante $f' : U \to \mathcal{L}(E, F)$, $x \mapsto f'_x$, est continue sur U , alors f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

3. Si on a montré que f est différentiable en x_0, le calcul pratique de $f'_{x_0}(h)$ pour $h \in E$ donné s'effectue grâce à la formule
$$f'_{x_0}(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}.$$
En toute rigueur, ce calcul donne la dérivée directionnelle de f en x_0, ou différentielle au sens de Gâteaux de f en x_0 dans la direction h. Des définitions, il résulte immédiatement que si f est différentiable en x_0, alors elle admet une dérivéee directionnelle dans toutes les directions alors que la réciproque est fausse.

En résumé :
f de classe $\mathcal{C}^1$ en $x_0 \Rightarrow f$ est différentiable en $x_0 \Rightarrow f$ de classe $\mathcal{C}^0$ en x_0

$$\Downarrow$$

f dérivable en x_0 suivant toutes les directions

Exemple 1 (Contre-exemple)**.** L'application f définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x+y} & \text{si} \quad x \neq -y, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
admet une dérivée en $(0,0)$ suivant toutes les directions de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas continue en $(0,0)$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq -y$,
$$f(x,y) = \lambda \iff y = \frac{x^3}{\lambda} - x$$
donc
$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ y=\frac{x^3}{\lambda}-x} f(x,y) = \lambda \neq 0.$$
De plus, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq -y$,
$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad f(tx,ty) = t^2 f(x,y) \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(tx,ty)}{t} = 0 =: f'_{(0,0)}(x,y).$$

Définition 1.1.2 (Différentiabilité d'ordre supérieur)**.** On dit que $f : U \subset E \to F$ est deux fois différentiable sur U si f est différentiable sur U de différenielle f' différentiable sur U et on note :
$$f''_x := (f')'_x, \quad \forall, x \in U$$
la différentielle de f' en $x \in U$, appelée différentielle d'ordre 2 en $x \in U$. Alors, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si f'' est continue sur U.

Théorème 1.1.1 (Schwartz). *Si $f : U \subset R \to F$ admet une différentielle d'ordre 2 en $x \in U$. Alors l'application $f''_x : E \times E \to F$ est une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$ à valeurs dans F.*

Démonstration. On peut définir les applications :

$$f' : U \subset E \to \mathcal{L}(E, F) \quad \text{et} \quad f'' : U \subset E \to \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)).$$

Soit $x \in U$. Par définition : $f''_x \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ et donc $h_1 \mapsto f''_x(h_1) \in \mathcal{L}(E, F)$ est définie, linéaire et continue sur E. De même, pour tout $h_1 \in E$, l'application $h_2 \mapsto f''_x(h_1)(h_2) \in F$ est définie, linéaire et continue sur E. Finalement, l'application $(h_1, h_2) \mapsto f''_x(h_1)(h_2) \in F$ est définie, bilinéaire et continue sur $E \times E$, et on note :

$$f''_x(h_1, h_2) := f''_x(h_1)(h_2), \quad \forall (h_1, h_2) \in E^2.$$

Il reste à montrer que f''_x est symétrique. Soit $(h_1, h_2) \in E^2$. On pose :

$$A_x(h_1, h_2) := f(x + h_1 + h_2) - f(x + h_1) - f(x + h_2) + f(x).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|h_2\|} A_x(h_1, h_2) &= \frac{1}{\|h_2\|}(f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1)) - \frac{1}{\|h_2\|}(f(x+h_2) - f(x)) \\
&= \frac{f'_{x+h_1}(h_2)}{\|h_2\|} - \frac{f'_x(h_2)}{\|h_2\|} + \underset{h_2 \to 0}{o}(1) \\
&= \frac{f''_x(h_1)(h_2)}{\|h_2\|} + o(\|h_1\|) + \underset{h_2 \to 0}{o}(1) \\
\Rightarrow A_x(h_1, h_2) &= f''_x(h_1)(h_2) + \|h_2\| o(\|h_1\|) + o(\|h_2\|)
\end{aligned}$$

On remarque que : $A_x(h_1, h_2) = A_x(h_2, h_1)$ donc en échangeant les rôles de h_1 et h_2 dans ce qui précède, on obtient :

$$A_x(h_1, h_2) = f''_x(h_2)(h_1) + \|h_1\| o(\|h_2\| + o(\|h_1\|))$$

Soit $(u_1, u_2) \in E^2$ t.q. $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$ et soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\frac{1}{t_1 t_2} A_x(t_1 u_1, t_2 u_2) = f''_x(u_1)(u_2) + o(1) + \frac{o(t_1)}{t_2} = f''_x(u_2)(u_1) + o(1) + \frac{o(t_2)}{t_1}.$$

Il en résulte :

$$\lim_{t_2 \to 0} \lim_{t_1 \to 0} \frac{1}{t_1 t_2} A_x(t_1 u_1, t_2 u_2) = \lim_{t_2 \to 0} (f''_x(u_1)(u_2) + o(1)) = f''_x(u_1)(u_2)$$

$$= \lim_{t_1\to 0}\lim_{t_2\to 0}\frac{1}{t_1 t_2}A_x(t_1u_1,t_2u_2) = \lim_{t_1\to 0}(f''_x(u_2)(u_1)+o(1)) = f''_x(u_2)(u_1)$$

i.e. :

$$f''_x(u_1)(u_2) = f''_x(u_2)(u_1)$$

□

Définition 1.1.3. Soit $\mathcal{L}_2(E,F)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur $E\times E$ à valeurs dans F. Par récurrence sur $n\geq 1$, on note $\mathcal{L}_n(E,F)$ l'ensemble des formes n-linéaires symétriques sur E^n àvaleurs dans F et on définit et on note $f^{(n)}\in\mathcal{L}_n(E,F)$ la différentielle d'ordre n de f. Obn dit que $f:U\subset E\to F$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur U si f est n fois différentiable sur U et si $f^{(n)}$ est continue sur U.

Remarque 2. Soit H un espace de Hilbert et soit $f:H\to\mathbb{R}$ différentiable en $x_0\in H$. Alors, d'après le Théorème de Riesz, il existe $\nabla f(x_0)\in H$, appelé le gradient de f en x_0, t.q. : $f'_{x_0}(h)=\langle\nabla f(x_0),h\rangle_H$, $\forall h\in H$, et le DL de f au voisnage de x_0 devient :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'_{x_0}(h)+o(\|h\|_H)=f(x_0)+\langle\nabla f(x_0),h\rangle_H+o(\|h\|_H).$$

Si en outre f est deux fois différentiable en $x_0\in H$, alors il existe $\nabla^2 f(x_0)\in\mathcal{L}(H,H)$ t.q. :

$$f''_{x_0}(h_1,h_2)=\langle\nabla^2 f(x_0)h_1,h_2\rangle_V,\quad\forall h_1,h_2\in H.$$

En dimension finie, l'endomorphisme $\nabla^2 f(x_0)\in\mathcal{L}(H,H)$ s'identifie à la matrice hessienne de f en x_0.

1.2 Application de la différentielle

Proposition 1.2.1. *On suppose que $f:U\subset E\to F$ est de classe $\mathcal{C}^{(n+1)}$ sur U. Soit $x\in U$ et soit $h\in E$ t.q. $[x,x+h]\subset U$. Alors, le développement de Taylor de f en x avec reste intégral est défini par :*

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k'}\underbrace{f_x^{(k)}(h,\cdots,h)}_{:=f_x^{(k)}\cdot h^k}+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}f_{x+th}^{(n+1)}dt\cdot h^{n+1}$$

Démonstration. On pose :

$$\varphi(t):=f(x+th),\quad\forall t\in[0,1].$$

Alors, $\varphi \in \mathcal{C}^{(n+1)}(]0,1[,F)$ et on a :

$$\varphi(0) = f(x), \quad \varphi(1) = f(x+h)$$

et

$$\varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}_{x+th} \cdot h^k, \quad \forall k \in [[0, n+1]].$$

On conclut en appliquant la formule de Taylor à φ en $t = 0$. □

Proposition 1.2.2. *On suppose que $f : U \subset E \to F$ est différentiable sur U. Si f admet un extremum en $a \in U$, alors $f'_a = 0$.*

Démonstration. Soit $r > 0$ t.q. $B(a,r) \subset U$ et soit $u \in E$, $\|u\| = 1$. On pose :

$$\varphi(t) := f(a+tu), \quad \forall t \in [-r,r].$$

Alors φ est dérivable sur $]-r,r[$, de dérivée définie par :

$$\varphi'(t) = f'_{a+tu}(u), \quad \forall t \in]-r,r[.$$

De plus, φ admet un extremum en $t = 0$, donc $\varphi'(0) = 0$, i.e.

$$f'_a(u) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $u \in E$ t.q. $\|u\| = 1$, on en déduit, par linéarité de f'_a sur E, que :

$$f'_a(h) = 0, \quad \forall h \in E.$$

□

Définition 1.2.1. Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable sur U, on appelle point critique de f tout $x \in U$ vérifiant $f'_x = 0$.

Remarque 3. Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable sur U, l'ensemble de ses points critiques ne coïncide pas en général avec celui de ses extrema.

Proposition 1.2.3. *On suppose que $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ admet une différentielle d'ordre 2 sur U et que $a \in U$ est un point critique de f. Si f''_a est définie positive alors a est un minimum local de f.*

Démonstration. Soit $r > 0$ t.q. $B(a,r) \subset U$ et soit $h \in B(0,r)$. On pose :

$$\varphi(t) = f(a+th), \quad \forall t \in]-r,r[.$$

Alors, φ est deux fois dérivable sur $]-r,r[$ et on a :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(s)ds, \quad \forall t \in]-r,r[.$$

De plus : $\varphi''(0) = f''_a \cdot h^2 > 0$, donc il existe $\varepsilon \in]0, r[$, t.q. φ' soit croissante sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Soit $|t| < \varepsilon$. Si $0 < t < \varepsilon$, alors

$$\int_0^t \varphi'(s)ds \geq t\varphi'(0) = 0 \Rightarrow \varphi(t) \geq \varphi(0).$$

Si $-\varepsilon < t < 0$, alors

$$\varphi(t) = \varphi(0) - \int_t^0 \varphi'(s)ds$$

avec

$$\int_t^0 \varphi'(s)ds \leq -t\varphi'(0) = 0$$

donc $\varphi(t) \geq \varphi(0)$. Finalement dans tous les cas :

$$\varphi(t) \geq \varphi(0), \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[,$$

i.e. a est un minimum local de f. $\square$

Remarque 4. Si $E = \mathbb{R}^N$ est de dimension finie et si f''_a est définie positive alors elle définit un produit scalaire sur E. Soit $(e_1, \cdots, e_N)$ une base orthonormée pour f''_a. Soit $r > 0$ t.q. $B(a, r) \subset U$ et soit $h = \sum_{i=1}^N h_i e_i \in B(0, r)$. On a, si a est en outre un point critique de f :

$$f(a+h) = f(a) + f''_a \cdot h^2 + o(\|h\|^2)$$

avec

$$f''_a \cdot h^2 = \sum_{i=1}^N h_i^2 f''_a \cdot e_i^2.$$

Soit $\alpha = \min_{i=1}^N f''_a \cdot e_i^2 > 0$. On a :

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{f''_a \cdot h^2}_{\geq \|h\|^2 \alpha} + o(\|h\|^2)$$

et donc :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|^2} \geq \alpha + o(1).$$

On en déduit que pour $\varepsilon \in]0, r[$ suffisamment petit :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|^2} \geq \frac{\alpha}{2} > 0, \quad \forall h \in B(0, \varepsilon).$$

Proposition 1.2.4. *On suppose que $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que $a \in U$ est un point critique de f. Si $f''_x \geq 0$ dans un voisinage de a, alors a est un minimum local de f.*

Démonstration. Soit $r > 0$ t.q. $B(a,r) \subset U$ et $f''_x \geq 0$ dans $B(a,r)$. Soit $h \in B(0,r)$. On a :

$$fa + h) = f(a) + \int_0^1 (1-t)\underbrace{f''_{a+th} \cdot h^2}_{\geq 0} dt \geq f(a).$$

□

Remarque 5 (Différentiabilité d'ordre supérieur). Si V est un espace de Hilbert et si $f : V \to \mathbb{R}$ est supposée différentiable en $x_0 \in V$, d'après le Théorème de Riesz, il existe $\nabla f(x_0) \in V$, appelé le gradient de f en x_0, t.q. : $df_{x_0}(h) = \langle \nabla f(x_0), h \rangle_V$, $\forall h \in V$, conformément au DL : $\forall h \in V$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + o(\|h\|_V) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle_V + o(\|h\|_V).$$

On dit que f est deux fois différentiable en $x_0 \in V$ si $df : U \subset V \to \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = V' \sim V$ est différentiable en x_0, i.e. s'il existe une application linéaire continue $L_{x_0} \in \mathcal{L}(V,V)$ t.q. :

$$df_{x_0+\xi} = df_{x_0} + L_{x_0}(\xi) + o(\|\xi\|) = df_{x_0} + d^2 f_{x_0}(\xi) + o(\|\xi\|)$$

en posant $d^2 f_{x_0} := L_{x_0}$, i.e. :

$$\nabla f(x_0 + \xi) = \nabla f(x_0) + \nabla^2 f(x_0)\xi + o(\|\xi\|_V)$$

en utilisant la notation d'endomorphisme $\nabla^2 f(x_0)\xi := d^2 f_{x_0}(\xi)$ avec $\nabla^2 f(x_0) \in \mathcal{L}(V,V)$. On en déduit le DL à l'ordre 2 en x_0 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle_V + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_0) h, h \rangle_V + o(\|h\|_V^2)$$

où $(h,\xi) \mapsto \langle \nabla^2 f(x_0) h, \xi \rangle_V$ est une forme bilinéaire continue sur $V \times V$.

En dimension finie, l'endomorphisme $\nabla^2 f(x_0) \in \mathcal{L}(V,V)$ s'identifie à la matrice hessienne de f en x_0.

1.3 Cas particulier de la dimension finie

Dans la suite, on note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.

Proposition 1.3.1. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable sur U, alors sa différentielle est donnée par :*

$$f'_x(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) =: \langle \nabla f(x), h \rangle$$

où $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ est appelé le gradient de f en x et est défini par ses composantes :

$$\nabla f(x)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Démonstration. Soit $x \in U$ et soit $r > 0$ t.q. $B(x, r) \subset U$. Soit $h \in B(0, r)$,

$$f(x+h) = f(x) + f'_x(h) + o(\|h\|)$$

avec

$$f'_x(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i f'_x(e_i).$$

Soit $i \in [[1, n]]$. On a : $\forall h \in]-r, r[$, $h \neq 0$.

$$f(x + he_i) = f(x) + hf'_x(e_i) + o(|h|)$$

et donc

$$f'_x(e_i) = \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h} + o(1) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

$\square$

Proposition 1.3.2. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f est deux fois différentiable sur U, alors sa différentielle d'ordre 2 est donnée par :*

$$f''_x(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) =: \langle \nabla^2 f(x) u, v \rangle$$

où la latrice symétrique $\nabla^2 f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est appelé la matrice hessienne de f en x et est définie par ses composantes :

$$\nabla^2 f(x)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

Démonstration. Soit $x \in U$ et soit $r > 0$ t.q. $B(x, r) \subset U$. Soit $h \in B(0, r)$,

$$f(x+h) = f(x) + f'_x(h) + f''_x \cdot h^2 + o(\|h\|^2)$$

avec

$$f''_x \cdot h^2 = \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j f''_x(e_i, e_j).$$

Soit $i, j \in [[1, n]]$. En particulier :

$$f'_{x+h}(e_i) = f'_x(e_i) + f''_x(e_i, h) + o(\|h\|)$$

et donc : $\forall h \in]-r, r[$, $h \neq 0$,

$$f'_{x+he_j}(e_i) = f'_x(e_i) + h f''_x(e_i, e_j) + o(|h|).$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} f''_x(e_i, e_j) &= \frac{f'_{x+he_j}(e_i) - f'_x(e_i)}{h} + o(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f'_{x+he_j}(e_i) - f'_x(e_i)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + he_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \end{aligned}$$

□

Définition 1.3.1 (Fonction de classe $\mathcal{C}^k$)**.** Soit $i \in [[1, n]]$ et soit $k \geq 2$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1. On dit que f admet une dérivée partielle d'indice i en x_0 si f admet une dérivée directionnelle en x_0 dans la direction de e_i.
2. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues sur U.

Remarque 6 (Contre-exemple de Peano). Si f n'est pas deux foix différentiable en x_0 alors la matrice hessienne n'est pas nécessairement symétrique, comme le montre le contre-exemple dû à Peano :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} &\leq \frac{|x||y|(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{|x||y|}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \leq \frac{(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{1/2} \underset{(x,y) \to (0,0)}{\to} 0. \end{aligned}$$

et donc f est différentiable en $(0, 0)$ de différentielle $df_{(0,0)} = 0$. Des relations : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$f(x, y) = xy \left(1 - \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \right) = xy \left(\frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1 \right)$$

on déduit :$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \left(1 - \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\left(\frac{2x^2}{x^2+y^2} - 1\right) + \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Il en résulte :

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1.$$

i.e. :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$

De même :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

i.e. :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0),$$

donc la matrice hessienne de f en $(0,0)$ n'est pas symétrique.

On rappelle les formules de Taylor à l'ordre 2.

Proposition 1.3.3 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et soit $h \in \mathbb{R}^n$ t.q. $[x_0, x_0+h] \subset U$. Alors :*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h\rangle + \int_0^1 (1-t)\langle \nabla^2 f(x_0+th)h, h\rangle dt$$

Proposition 1.3.4 (Formule de Taylor avec reste de Lagrange)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et soit $h \in \mathbb{R}^n$ t.q. $[x_0, x_0+h] \subset U$. On suppose que :*

$$M := \sup_{t\in[0,1]} \frac{|\langle \nabla^2 f(x_0+th)h, h\rangle|}{\|h\|^2} < +\infty.$$

Alors :

$$|f(x_0+h) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), h\rangle| \leq \frac{M}{2}\|h\|^2.$$