Compléments d'Analyse

Isabelle Gruais
Université de Rennes 1

2 septembre 2025

Introduction

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

Dans la suite $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sauf cas particulier où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.1 Forme sesquilinéaire et produit scalaire

Définition 1.1.1. Une application $f : E \to F$ entre deux ev sur $\mathbb{C}$ est antilinéaire si

1. $\forall x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$,
2. $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.

Définition 1.1.2. Soit E un ev sur $\mathbb{K}$.

1. On appelle forme sesquilinéaire (à droite) sur $\mathbb{K}$ toute application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant. :
   (a) f est linéaire à gauche, i.e. $\forall y \in E$, $x \mapsto f(x, y)$ est linéaire ;
   (b) f est antilinéaire à droite , i.e. $\forall x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ est antilinéaire

   Par convention, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire est bilinéaire.
2. Une forme sesquilinéaire f est hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, resp. symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si en outre $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$, resp. $f(x, y) = f(y, x)$, $\forall x, y \in E$.

Proposition 1.1.1. *Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire, alors : $\forall x, y \in E$,*

$$\varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) = 2\varphi(x, x) + 2\varphi(y, y).$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$. On a

$$\varphi(x+y, x+y) = \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y),$$

$$\varphi(x-y, x-y) = \varphi(x, x) - \varphi(x, y) - \varphi(y, x) + \varphi(y, y),$$

□

Proposition 1.1.2. *Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire, alors : $\forall x, y \in E$,*

1. $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = 2\varphi(x, y) + 2\varphi(y, x)$.

2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* φ *symétrique :* $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = 4\varphi(x,y)$.
3. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *et* φ *hermitienne :* $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy) = 4\varphi(x,y)$.

Démonstration. Soit $x, y \in E$.

1. On a
$$\varphi(x+y,x+y) - \varphi(x-y,x-y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y) +$$
$$-\varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) - \varphi(y,y).$$
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on utlise ce qui précède avec $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors, en notant $\mathbb{U}_4$ le groupe des racines quatrièmes de 1 : $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$ et on est ramené à calculer $\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x+\zeta y, x+\zeta y)$. On a
$$\begin{aligned}\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x+\zeta y, x+\zeta y) &= \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(x,x) + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} |\zeta|^2\varphi(x,y) + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta^2\varphi(y,x) \\ &\quad + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\varphi(y,y) \\ &= 4\varphi(x,y).\end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.3. *Soit* φ *une forme sesquilinéaire sur un ev* E *sur* $\mathbb{C}$. *Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. φ *est hermitienne.*
2. $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Si φ est hermitienne, alors $\varphi(x,x) = \overline{\varphi(x,x)} \Rightarrow \varphi(x,x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$.

Inversement, on suppose que $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$. On pose : $\forall x, y \in E$, $\Phi(x,y) = \varphi(x,y) - \overline{\varphi(y,x)}$. Alors Φ est sesquilinéaire et $\Phi(x,x) = 0$, $\forall \in E$. De la Proposition 1.1.2, on déduit que $\Phi(x,y) = 0$, $\forall x, y \in E$. □

Définition 1.1.3. Une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-ev est dite positive, resp. définie positive $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x,x) \geq 0$, resp. $\varphi(x,x) > 0$.

Proposition 1.1.4. *Soit* E *un ev sur* $\mathbb{K}$ *et soit* φ *une forme hermitienne positive sur* E. *On a :* $\forall x, y \in E$,
$$|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y).$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\lambda\varphi(x,y) = |\varphi(x,y)|$. Alors $|\lambda| = 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par hypothèse sur φ : $\varphi(\lambda x + ty, \lambda x + ty) \geq 0$. En développant cette expression, on obtient :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\lambda|^2\varphi(x,x) + 2t\mathrm{Re}(\lambda\varphi(x,y)) + t^2\varphi(y,y) \geq 0,$$
avec $2t\mathrm{Re}(\lambda\varphi(x,y)) = 2t|\varphi(x,y)|$. De la théorie des équations du second degré à coefficients réels, on déduit que $4|\varphi(x,y)|^2 - 4\varphi(x,x)\varphi(y,y) \leq 0$. □

Définition 1.1.4. Une forme sesquilinéaire définie positive est appelée un produit scalaire. Si E est un ev et si φ est un produit scalaire sur E, on définit une norme sur E en posant

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}.$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Définition 1.1.5. On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien complet pour la norme associée.

Exemple 1. L'espace $\mathbb{C}^d$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire : $(z, z') \mapsto \sum_{k=1}^d \overline{z}_k z'_k$.

Exemple 2. L'espace

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\geq 0} |u_n|^2 < +\infty\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v) \mapsto \sum_{n\geq 0} u_n \overline{v}_n$$

Exercice 1.

Soit $h^1(\mathbb{N}) = \{u \in \ell^2(\mathbb{N}), \sum_{n\geq 0} n^2 |u_n|^2 < +\infty\}$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $h^1(\mathbb{N})$ en posant :
$$\forall a, b \in h^1(\mathbb{N}), \quad \langle a, b\rangle = \sum_{n\geq 0} (1+n^2) a_n \overline{b}_n.$$
et que ce produit scalaire fait de $h^1(\mathbb{N})$ un espace de Hilbert.
2. Montrer que $h^1(\mathbb{N})$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$.
3. Montrer que la boule unité fermée de $h^1(\mathbb{N})$ est compacte dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

1.2 Orthogonalité

Définition 1.2.1. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien sur K. Deux vecteurs $x, y \in H$ sont dits orthogonaux et on note $x \perp y$ si si $\langle x, y\rangle = 0$. Si $A \subset H$, l'orthogonal de A dans H est le sev de H défini par :

$$A^\perp = \{x \in H \quad \forall a \in A, \quad \langle x, a\rangle = 0\}.$$

Proposition 1.2.1. *Soit E un espace préhilbertien. Alors :*

1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*
2. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\forall x, y \in E$, $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ et $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*
3. *Si $A \subset B \subset E$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.*
4. *Si $A \subset E$, alors $A \subset (A^\perp)^\perp$.*

Démonstration. On utilise le développement :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

avec $\mathrm{Re}\langle x, iy\rangle = \mathrm{Im}\langle x, y\rangle$. □

1.3 Projection hilbertienne

Théorème 1.3.1. *Soit E un espace préhilbertien et soit $C \subset E$ un convexe complet. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in C$ unique t.q. $\|x-a\| = d(x,C)$. L'application $p_C : E \to C$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \forall y \in C, \quad \mathrm{Re}\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0.$$

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in C$ définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad x_n \in C \quad \text{et} \quad d(x,C) \leq \|x - x_n\| \leq d(x,C) + \frac{1}{n}$$

On a : $\forall n, p \geq 0$,

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \|x - x_{n+p} - (x - x_n)\|$$

avec

$$\|x - x_{n+p} - (x-x_n)\|^2 + \|(x - x_{n+p}) + (x - x_n)\|^2 = 2\|x - x_{n+p}\|^2 + 2\|x - x_n\|^2$$

$$\iff \|x_{n+p} - x_n\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2 = 2\|x - x_{n+p}\|^2 + 2\|x - x_n\|^2.$$

On en déduit

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 \leq 4\left(d(x,C) + \frac{1}{n}\right)^2 - 4\|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2 =$$

$$= 4\left(d(x,C)^2 - \|x - \frac{1}{2}\left(x_{n+p} + x_n\right)\|^2\right) + \frac{8}{n}d(x,C) + \frac{4}{n^2} \leq \frac{8}{n}d(x,C) + \frac{4}{n^2}$$

car C convexe $\Rightarrow \frac{1}{2}(x_n + x_{n+p}) \in C$. Il en résulte que $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans C complet donc convergente vers $a \in C$.

Par construction $\lim_{n\to+\infty} \|x - x_n\| = d(x,C)$ donc $\|x - a\| = d(x,C)$. On suppose qu'il existe $a' \in C$ t.q. $\|x - a'\| = d(x,C)$. Alors

$$\|a - a'\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}(a + a')\|^2 = 2\|x - a\|^2 + 2\|x - a'\|^2 = 4d(x,C)^2$$

donc

$$\|a - a'\|^2 = 4d(x,C)^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(a + a')\|^2 \leq 0$$

i.e. $a = a'$. On note $p_C(x) = a$.

Soit $y \in C$. ON a :

$$\|x - p_C(x)\|^2 \leq \|y - x\|^2 = \|y - p_C(x) - (x - p_C(x))\|^2 =$$

$$= \|y - p_C(x)\|^2 + \|x - p_C(x)\|^2 - 2\langle y - p_C(x), x - p_C(x)\rangle$$

$$\Rightarrow 2\langle y - p_C(x), x - p_C(x)\rangle \leq \|y - p_C(x)\|^2.$$

Ceci est vrai en particulier pour $y = tz + (1-t)p_C(x)$ avec $z \in C$ et $t \in [0,1]$. Alors :

$$2t\langle z - p_C(x), x - p_C(x)\rangle \leq t^2\|z - p_C(x)\|^2$$

i.e., si $t > 0$:

$$2\langle z - p_C(x), x - p_C(x)\rangle \leq t\|z - p_C(x)\|^2.$$

On conclut en passant à la limite quand $t \to 0^+$.

Inversement, soit $\tilde{x} \in C$ t.q. :

$$\langle y - \tilde{x}, x - \tilde{x}\rangle \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

Soit $y \in C$. on a :

$$\|y - x\|^2 = \|y - \tilde{x} - (x - \tilde{x})\|^2 = \|y - \tilde{x}\|^2 + \|\tilde{x} - x\|^2 - 2\underbrace{\langle y - \tilde{x}, x - \tilde{x}\rangle}_{\leq 0}$$

$$\geq \|y - \tilde{x}\|^2 + \|\tilde{x} - x\|^2 \geq \|\tilde{x} - x\|^2.$$

□

Corollaire 1.3.2. *Soit E un espace de Hilbert et soit $C \subset E$ un convexe fermé. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in C$ unique t.q. $\|x - a\| = d(x, C)$. L'application $p_C : E \to C$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_C(x) \in C \quad \textit{et} \quad \forall y \in C, \quad \mathrm{Re}\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0.$$

Démonstration. On est ramené au résultat précédent en remarquant que C est un convexe complet. □

Corollaire 1.3.3. *Avec les notations du Théorème 1.3.1, l'applicaton p_C est contractante, i.e. vérifie :*

$$\forall x, y \in E, \quad \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|$$

Démonstration. Le calcul donne :

$$\mathrm{Re}\langle x-y, p_C(x)-p_C(y)\rangle = -\mathrm{Re}\langle x-p_C(x), p_C(y)-p_C(x)\rangle - \mathrm{Re}\langle p_C(x), p_C(y)-p_C(x)\rangle$$

$$-\mathrm{Re}\langle y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y)\rangle - \mathrm{Re}\langle p_C(y), p_C(x) - p_C(y)\rangle$$

$$= -\mathrm{Re}\langle x - p_C(x), p_C(y) - p_C(x)\rangle - \mathrm{Re}\langle y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y)\rangle +$$

$$+\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \geq \|p_C(x) - p_C(y)\|^2$$

i.e. :

$$\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \leq \mathrm{Re}\langle x - y, p_C(x) - p_C(y)\rangle \leq |\mathrm{Re}\langle x - y, p_C(x) - p_C(y)\rangle|$$

$$\leq \|x - y\|\|p_C(x) - p_C(y)\|$$

$$\Rightarrow \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|.$$

□

Proposition 1.3.4. *Soit E un espace préhilbertien et soit $F \subset E$ un sev complet. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in F$ unique t.q. $\|x - a\| = d(x, F)$. L'application $p_F : E \to F$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_F(x) \in F \quad \textit{et} \quad x - p_F(x) \in F^\perp$$

Démonstration. On remarque que F est convexe et fermé, d'où l'existence et l'unicité de $p_F(x)$. On conclut en remarquant que :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y - p_F(x)\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F$$

et $y \mapsto y - p_F(x)$ est une bijection $F \to F$ donc

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F.$$

F est un espace vectoriel donc $y \in F \iff -y \in F$ et alors :

$$-\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle \leq 0, \quad \forall y \in F$$

i.e. :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), y\rangle = 0, \quad \forall y \in F.$$

De même, F est un ev sur $\mathbb{C}$ donc $y \in F \iff iy \in F$. On en déduit :

$$\mathrm{Re}\langle x - p_F(x), iy\rangle = \mathrm{Im}\langle x - p_F(x), iy\rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

et finalement ;

$$\langle x - p_F(x), y\rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

i.e. $x - p_F(x) \in F^\perp$.

□

Supplémentaire orthogonal et somme directe

Définition 1.3.1. On dit qu'un ev E est la somme directe algébrique de deux ev F et G si $E = F + G$ avec $F \cap G = \{0\}$.

Si E est un espace préhilbertien on dit que E est la somme directe orthogonale de F et G si $E = F \oplus G$ avec $G = F^\perp$. Alors G est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Théorème 1.3.5. *Soit E un espace préhilbertien et soit $F \subset E$ un sev complet.*

1. *La projection orthogonale $p_F : E \to F$ est une application linéaire continue. Si $F \neq \{0\}$, alors $\|p_F\| = 1$.*
2. *$E = F \oplus F^\perp$.*
3. *$F^\perp = \mathrm{Ker}(p_F)$ et $F^{\perp\perp} = F$.*

Démonstration. 1. D'après le Théorème de projection hilbertienne, la projection p_F est bien définie. Soit $x, y \in E$ et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$$p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad p_F(y) \in F \Rightarrow \lambda p_F(x) + \mu p_F(y) \in F$$

et

$$x - p_F(x) \in F^\perp \quad \text{et} \quad y - p_F(y) \in F^\perp$$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y - (\lambda p_F(x) + \mu p_F(y)) = \lambda(x - p_F(x)) + \mu(y - p_F(y)) \in F^\perp.$$

De la Proposition 1.3.4, on déduit que $p_F(\lambda x + \mu y) = \lambda p_F(x) + \mu p_F(y)$, i.e. p_F est linéaire.

p_F étant linéaire et contractante, on a :

$$\forall x \in E, \quad \|p_F(x)\| = \|p_F(x) - p_F(0)\| \leq \|x\| \Rightarrow \|p_F\| \leq 1.$$

De plus : $\forall x \in E$, $x \in F \Rightarrow p_F(x) = x$ et $\|p_F(x)\| = \|x\|$. Donc $\|p_F\| = 1$.

2. Soit $x \in E$. On a $x = x - p_F(x) + p_F(x)$ avec $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x) \in F$ donc $E = F + F^\perp$. De plus :
$$\forall x \in F^\perp \cap F, \quad \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$$
donc $F \cap F^\perp = \{0\}$. Finalement, $E = F \oplus F^\perp$.
3. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p_F)$. Alors $x = x - p_F(x) \in F^\perp$. Donc $\mathrm{Ker}(p_F) \subset F^\perp$. Inversement soit $x \in F^\perp$. Par unicité de la décomposition $x = x - p_F(x) + p_F(x) \in F^\perp \oplus F$ on déduit que $p_F(x) = 0$, i.e. $x \in \mathrm{Ker}(p_F)$. Finalement : $\mathrm{Ker}(p_F) = F^\perp$.
On a : $F \subset (F^\perp)^\perp$. Inversement, soit $x \in F^{\perp\perp}$. Alors :
$$x - p_F(x) \in F^\perp \Rightarrow \langle x, x - p_F(x)\rangle = 0$$
donc
$$\|x\|^2 = \langle x, p_F(x)\rangle = \langle x - p_F(x), p_F(x)\rangle + \langle p_F(x), p_F(x)\rangle = \langle p_F(x), p_F(x)\rangle = \|p_F(x)\|^2.$$
De plus (Théorème de Pythagore) :
$$p_F(x) \perp x - p_F(x) \Rightarrow \|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2.$$
On en déduit $\|x - p_F(x)\|^2 = 0$, i.e. $x = p_F(x) \in F$. Donc $F^{\perp\perp} \subset F$.

□

Remarque 1. Sous les mêmes hypothèses, $I - p_F$ est la projection orthognle sur $F^\perp$ et on peut écrire $I - p_F = p_{F^\perp}$.

Corollaire 1.3.6. *Si F est un sev fermé d'un espace de Hilbert H alors : $H = F \oplus F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$.*

Démonstration. On se ramène au Théorème 1.3.5 en remarquant que F fermé dans H complet est complet. □

Dans le cas général où F est un sev non nécessairement fermé d'un espace de Hilbert, on a le résultat suivant.

Corollaire 1.3.7. *Soit F un sev d'un espace de Hilbert H. On a :*

1. $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.
2. $\overline{F} = H \iff F^\perp = \{0\}$.

Démonstration. 1. On remarque que $F^\perp = \cap_{y \in F} \mathrm{Ker}(\phi_y)$ où $\phi_y : x \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire continue de norme $\|\phi_y\| = \|y\|$, $\forall y \in F$. Donc $F^\perp$ est fermé comme intersection de fermés. Ceci reste vrai pour $F^{\perp\perp}$ qui est également fermé. En particulier :
$$F \subset F^{\perp\perp} \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{F^{\perp\perp}} = F^{\perp\perp}.$$
De plus, le Corollaire 1.3.6 entraîne :
$$F \subset \overline{F} \Rightarrow \overline{F}^\perp \subset F^\perp \Rightarrow F^{\perp\perp} \subset \overline{F}^{\perp\perp} = \overline{F}.$$
Finalement : $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

2. De ce qui précède on déduit :

$$\overline{F} = H \iff (F^\perp)^\perp = H \iff \overline{F^\perp} = H^\perp \iff F^\perp = \{0\}$$

car $H^\perp = \{0\}$ par définition du produit scalaire et $\overline{F^\perp} = F^\perp$ puisque $F^\perp$ est fermé.

□

Définition 1.3.2. Soit H un espace de Hilbert. Un endomorphisme $P : H \to H$ est un opérateur autoadjoint (ou hermitien si $K = \mathbb{C}$) si $\langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle$,$\forall x, y \in H$.

Proposition 1.3.8. *Soit F un sev fermé d'un espace de Hilbert H.*

1. $p_F \circ p_F = p_F$
2. p_F *est auto-adjoint :* $\forall x, y \in H$, $\langle p_F(x), y\rangle = \langle x, p_F(y)\rangle$.

Démonstration. 1. C'est une conséquence directe de l'unicité de la projection orthogonale sur F.

2. Soit $x, y \in H$.

$$x - p_F(x) \in F^\perp \quad \text{et} \quad p_F(y) \in F \Rightarrow \langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle.$$

De même :

$$\langle p_F(x), y\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle.$$

Finalement : $\langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), y\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle$.

□

1.4 Le Théorème de représentation de Riesz

Corollaire 1.4.1. *Soit E un espace de Hilbert et soit $F \subset E$ un sev fermé. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in F$ unique t.q. $\|x - a\| = d(x, F)$. L'application $p_F : E \to F$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_F(x) \in F \quad \textit{et} \quad x - p_F(x) \in F^{\perp}$$

Remarque 2. Le Corollaire 1.4.1 montre que p_F est la projection orthogonale sur F. On en déduit que p_F est une application linéaire de E sur F t.q. $\|p_F\| = 1$ et $F^{\perp} = \mathrm{Ker} p_F$.

Proposition 1.4.2 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit E un espace de Hilbert. L'application $\Phi : E \to E'$, $x \mapsto \{\phi_x : y \mapsto \langle y, x\rangle\}$ est une isométrie antilinéaire et une bijection de E sur E'.*

Démonstration. On remarque que $x \mapsto \{\phi_x : y \mapsto \langle y, x\rangle\}$ est une isométrie de E dans E'. Il reste à vérifier qu'elle est surjective. Soit $F = \mathrm{Ker}(f)$. Par continuité de f, F est fermé et donc $E = F \oplus F^{\perp}$ avec $F^{\perp} \sim E/F$.

Rappel : Par définition de la relation d'équivalence associée à E/F,

$$x \sim y \iff p_F(x) - p_F(y) = x - y \iff x - p_F(x) = y - p_F(y)$$

ce qui permet de définir l'application :

$$E/F \to F^{\perp}, \quad x + F \mapsto x - p_F(x).$$

D'après le théorème d'isomorphisme, on a : $E/F \sim \mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}$, i.e. $F^{\perp} \sim \mathbb{C}$. Donc $F^{\perp} = \mathbb{C}u$ avec $u \in F^{\perp} \setminus \{0\}$ choisi t.q. $\|u\| = 1$. Soit alors $x \in E$. De la décomposition :

$$x = \langle x, u\rangle u + p_F(x)$$

on déduit que $f(x) = \langle x, u\rangle f(u)$, i.e., $f = \phi_{f(u)u}$ avec $f(u) \neq 0$ par construction de u.

□

Corollaire 1.4.3. *Tout espace de Hilbert est réflexif.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert et soit $\Phi : H \to H'$ l'isométrie antilinéaire bijective entre H et H'. Comme Φ est une isométrie, on définit un produit scalaire sur H' en posant

$$\forall f, g \in H', \quad \langle f, g\rangle_{H'} = \langle \Phi^{-1}(g), \Phi^{-1}(f)\rangle_H = \overline{\langle \Phi^{-1}(f), \Phi^{-1}(g)\rangle_H}.$$

Alors, $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H' ssi $(\Phi^{-1}(f_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H, i.e. convergente dans H. Par isométrie, $(f_n)_{n\geq 0}$ est convergente dans H'. On en déduit que H' est un espace de Hilbert, donc il existe une isométrie antilinéaire bijective $\Psi : H' \to H''$. Alors, $\Psi \circ \Phi$ est un isomorphisme de H sur H'', i.e. H est réflexif. □

Adjoint d'un opérateur

Proposition 1.4.4. *Soit H, K deux espaces de Hilbert et soit $A \in \mathcal{L}(H, K)$ une application linéaire continue. Il existe une unique application linéaire continue $A^* \in \mathcal{L}(K, H)$ appelée adjointe de A t.q. :*

$$\forall x \in H, \quad \forall y \in K, \quad \langle Ax, y\rangle_K = \langle x, A^* y\rangle_H.$$

De plus $\|A^*\| = \|A\|$ et $A^{**} = A$.

Démonstration. Soit $y \in K$. L'application $\phi_y \circ A : H \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ est linéaire continue comme composée d'applications linéaires continues, et on a $\phi_y \circ A \in H'$ avec

$$\|\phi_y \circ A\| \leq \|\phi_y\| \|A\| = \|y\|_K \|A\|.$$

On en déduit qu'il existe $A^* y \in H$ unique t.q. $\phi_{A^* y} = \phi_y \circ A$. On remarque que, par antilinéarité de $y \mapsto \phi_y$: $\forall y \in K$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\phi_{A^*(\lambda y)} = \phi_{\lambda y} \circ A = \overline{\lambda}\phi_y \circ A = \overline{\lambda}\phi_{A^* y} = \phi_{\lambda A^* y}$$

i.e., par définition de A^* : $A^*(\lambda y) = \lambda A^* y$. Donc A^* est linéaire. De plus : $\forall y \in K$,

$$\|\phi_{A^* y}\| = \|A^* y\| = \|\phi_y \circ A\| \leq \|y\|_K \|A\|$$

donc A^* est continue de norme $\|A^*\| \leq \|A\|$. On remarque que : $\forall x \in H$, $\forall y \in K$,

$$\phi_{A^* y}(x) = \overline{\phi_{Ax}(y)} \Rightarrow |\phi_{Ax}(y)| \leq \|\phi_{A^* y}\| \|x\| \leq \|A^*\| \|y\| \|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A^*\| \|x\|$$

i.e. $\|A\| \leq \|A^*\|$. Finalement : $\|A\| = \|A^*\|$.

□

1.5 Systèmes orthonormés et bases hilbertiennes

Définition 1.5.1. Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Un système $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E et un système orthogonal si $\langle x_i, x_j\rangle = 0$, $\forall i \neq j$.

Définition 1.5.2. Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Un système orthogonal $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormé si $\|x_i\| = 1$, $\forall i \in I$.

Exemple 3. Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire usuel, le système $(e_1, \cdots, e_n)$ donné par $(e_k)_i = \delta_{ik}$, $i, k \in [[1, n]]$, est un système orthonormé.

Exemple 4. Dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{n\geq 0} x_k \overline{y}_k$, $\forall x = (x_n)_{n\geq 0}$, $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, le système $(e_n)_{n\geq 0}$ donné par $(e_n)_k = \delta_{kn}$, $\forall k, n \geq 0$ est orthonormé.

Exemple 5. Dans l'espace de Hilbert $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y}(t)dt$, le système $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où e_n est la fonction $e_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{int}$.

Proposition 1.5.1. *Soit E un espace préhilbertien et soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé. On suppose I fini. On pose $F = \mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}$. Soit $x, y \in E$. On a*

1. $p_F(x) = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$,
2. $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle^2$,
3. $\langle p_F(x), y\rangle = \langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}$.

Démonstration. 1. Soit $x \in E$. On pose $P(x) = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$. On a :

$$\forall i \in I, \quad \langle x - P(x), e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \sum_{j\in I} \langle x, e_j\rangle \langle e_i, e_j\rangle = \langle x, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle = 0$$

donc $x - P(x) \in F^\perp$. Comme de plus $P(x) \in F$, on en déduit que $P(x) = p_F(x)$.

2. Soit $x \in F$. D'après ce qui précède :

$$\|p_F(x)\|^2 = \langle p_F(x), p_F(x)\rangle = \sum_{i,j\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle x, e_j\rangle} \langle e_i, e_j\rangle$$

$$= \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

3. Soit $x, y \in E$. On a

$$\langle p_F(x), y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}.$$

□

Proposition 1.5.2 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit E un espace préhilbertien et soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé de E.*

1. *Soit $x \in E$ et soit $J \subset I$ une partie finie de I. On a*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \|x - \sum_{i\in J} \langle x, e_i\rangle e_i\|^2$$

2. *Soit $x \in E$. La famille $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ de somme majorée par $\|x\|^2$:*

$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration. 1. Soit $x \in E$ et soit $J \subset I$ une partie finie de I. On pose $F = \mathrm{Vect}\{x_i,\ i \in J\}$. Alors

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 = \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \|x - \sum_{i\in J} \langle x, e_i\rangle e_i\|^2.$$

2. Soit Λ l'ensemble des parties finies de I. De ce qui précède on déduit que :

$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 := \sup_{J\in\Lambda} \sum_{i\in J} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

□

Corollaire 1.5.3. *Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé de H. Pour tout $x \in H$, la famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ est sommable de somme vérifiant l'estimation :*

$$\|\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i\| \leq \|x\|.$$

Démonstration. Soit $x \in H$. D'après la Proposition 1.5.2 et l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$$

i.e. la famille $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable. Soit $\varepsilon > 0$. On en déduit qu'il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \varepsilon.$$

i.e., le système $(e_i)_{i\in I}$ étant orthonormé :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \|\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 = \sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \varepsilon.$$

La famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy dans H qui est complet donc est sommable, de somme $x' := \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \|x' - \sum_{i\in J}\langle x_i, e_i\rangle e_i\| \leq \varepsilon.$$

Soit $J \in \Lambda$ t.q. $J_\varepsilon \subset J$. On a :

$$\|x'\| \leq \varepsilon + \|\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\| \leq \varepsilon + \|x\|.$$

Ceci est vrai $\forall\varepsilon > 0$, donc, quand $\varepsilon \to 0$, on obtient : $\|x'\| \leq \|x\|$. □

Base hilbertienne

Définition 1.5.3. Soit E un espace préhilbertien. On appelle base hilbertienne toute famille $(e_i)_{i\in I}$ de E orthonormée et totale.

Remarque 3. Soit H un espace de Hilbert. Un système orthonormé $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne ssi : $\forall x \in H$,

$$\langle x, e_i\rangle = 0, \quad \forall i \in I \Rightarrow x = 0.$$

En effet, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne et si $x \in H$ vérifie : $\langle x, e_i\rangle = 0$, $\forall i \in I$, alors $x \in \mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}^\perp = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}}^\perp = H^\perp = \{0\}$. Inversement, on suppose que : $\forall x \in H$, $(\langle x, e_i\rangle = 0,\ \forall i \in I) \Rightarrow x = 0$, alors $\mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}^\perp = \{0\}$. On en déduit :

$$H = \{0\}^\perp = \mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in I\}^{\perp\perp} = \overline{Vect\{e_i,\ i \in I\}}$$

Théorème 1.5.4 (Caractérisation des bases hilbertiennes)**.** *Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $(e_i)_{i\in I}$ *est une base hilbertienne.*
(ii) $\forall x \in H$, $x = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$
(iii) $\forall x, y \in H$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}$
(iv) $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2$ *(Egalité de Parseval)*

Démonstration. (i)$\Rightarrow$ (ii) Soit $x \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $y_\varepsilon \in \mathrm{Vect}\{e_i, \in I\}$ t.q. $\|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$. Soit Λ l'ensemble des parties finies de I. Il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ et il existe $(\lambda_i)_{i\in J_\varepsilon} \in \mathbb{K}^{J_\varepsilon}$ t.q. $y_\varepsilon = \sum_{i\in J_\varepsilon}\lambda_i e_i$. On pose $F_{J_\varepsilon} = \mathrm{Vect}\{e_i,\ i \in J_\varepsilon\}$. F_{J_ε} est un sev de dimension finie de H et $p_{F_{J_\varepsilon}}(x) = \sum_{i\in J_\varepsilon}\langle x, e_i\rangle e_i$. Par définition de $p_{F_{J_\varepsilon}}$, on a $\|x - p_{F_{J_\varepsilon}}(x)\| \le \|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$. Soit $J \in \Lambda$ t.q. $J_\varepsilon \subset J$.

$$F_{J_\varepsilon} \subset F_J \Rightarrow \|x - p_{F_J}(x)\| \le \|x - p_{F_{J_\varepsilon}}(x)\| < \varepsilon$$

i.e. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \|x - p_{F_J}(x)\| < \varepsilon.$$

Donc la famille $(\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ et sommable de somme $\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i = x$.

(ii)$\Rightarrow$ (iii) Soit $x \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Soit $y \in H \setminus \{0\}$. Il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\| < \varepsilon.$$

Soit $J \in \Lambda$ t.q. $J_\varepsilon \subset J$. On a :

$$|\langle x, y\rangle - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}| = |\langle x, y\rangle - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle| = |\langle x, y\rangle - \langle\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i, y\rangle|$$

$$= |\langle x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i, y\rangle| \le \|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|\|y\| < \varepsilon\|y\|$$

Ceci est vrai $\forall\varepsilon > 0$, donc la famille $(\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle})_{i\in I}$ est sommable de somme :

$$\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle} = \langle x, y\rangle.$$

(iii)$\Rightarrow$ (iv) Il suffit de poser $y = x$ dans (iii) pour conclure.

(iv)$\Rightarrow$ (i) Soit $x \in H$ t.q. $\langle x, e_i\rangle = 0$, $\forall i \in I$. Alors $|x\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2$ est la somme d'une série à termes tous nuls, donc $x = 0$ et on conclut grâce à la Remarque 3. $\square$

Théorème 1.5.5. *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne. En particulier tout système orthonormé peut être complété en une base hilbertienne.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert. On suppose $H \neq \{0\}$. Sinon, le résultat est immédiat. Soit L un système orthonormé de H. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des systèmes orthonormés qui contiennent L ordonné par la relation $\subset$. Alors $\mathcal{B} \neq \emptyset$ car $L \in \mathcal{B}$. On veut montrer que $\mathcal{B}$ est inductif. Soit $\mathcal{C} = (B_i)_{i\in I}$ une chaîne de $\mathcal{B}$. Alors $B = \cup_{i\in I}B_i$ est un majorant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{P}(H)$. Soit $x, y \in B$, $x \neq y$, et soit $i_x, i_y \in I$ t.q. $x \in B_{i_x}$ et $y \in B_{i_y}$. Alors $\|x\| = \|y\| = 1$. Comme $\mathcal{C}$ est totalement ordonnée, on peut supposer $B_{i_x} \subset B_{i_y}$ et alors $x, y \in B_{i_y} \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0$. Donc $B \in \mathcal{B}$. Du Lemme de Zorn on déduit que $\mathcal{B}$ admet un élément maximal noté B_L. Il reste à montrer que B_L est une famille totale dans H i.e. que $\overline{\mathrm{Vect}(B_L)} = H$. On raisonne par l'absurde en supposant que

$\overline{\mathrm{Vect}(B_L)} \neq H$. Alors $\overline{\mathrm{Vect}(B_L)}^{\perp} \neq \{0\}$. Soit alors $x_0 \in \overline{\mathrm{Vect}(B_L)}^{\perp}$ t.q. $x_0 \neq 0$. Alors $\|x_0\| \neq 0$. Quitte à remplacer x_0 par $\dfrac{x_0}{\|x_0\|}$, on peut supposer que $\|x_0\| = 1$. On en déduit alors que $B_L \cup \{x_0\}$ est un système orthonormé, ce qui contredit le caractère maximal de B_L. Donc B_L est total dans H et par suite, c'est une base hilbertienne de H. □

Proposition 1.5.6. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable de E de somme $x \in E$. Alors :*

1. *$\forall \varepsilon > 0$, $\{i \in I,\ \|x_i\| \geq \varepsilon\}$ est fini.*
2. *$\{i \in I,\ x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.*

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q.

$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \|\sum_{i\in J} x_i\| < \varepsilon.$$

Soit $i_0 \in I \setminus J_\varepsilon$. On pose $J = \{i_0\}$. On en déduit : $\|x_{i_0}\| \leq \varepsilon$. Donc $\{i \in I,\ \|x_i\| \geq \varepsilon\} \subset J_\varepsilon$ est fini.

2. On a

$$\{i \in I,\ x_i \neq 0\} = \{i \in I,\ \|x_i\| > 0\} = \cup_{n\geq 1} \left\{ i \in I,\ \|x_i\| \geq \frac{1}{n} \right\},$$

i.e. $\{i \in I,\ x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis, éventuellement vides

□

Proposition 1.5.7. *Dans un espace de Hilbert, deux bases hilbertiennes sont équipotentes.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Soit B et B' deux bases de H. Soit $e \in B$ et soit $D_e = \{f \in B',\ \langle e, f\rangle \neq 0\}$. La famille $(\langle e, f\rangle)_{f\in B'}$ est sommable de somme $e = \sum_{f\in B'} \langle e, f\rangle f$ donc D_e est dénombrable d'après la Proposition 1.5.6. On note $D_e = \{f_n^e,\ n \geq 0\}$. De plus, $\forall f \in B'$,

$$f = \sum_{e\in B} \langle f, e\rangle e \neq 0 \Rightarrow \exists e \in B \quad \text{t.q.} \quad \langle f, e\rangle \neq 0$$

i.e. $B' \subset \cup_{e\in B} D_e$. Soit $\Phi : B' \to \mathbb{N} \times B$, $f \mapsto (n, e)$ t.q. $f \in D_e$ et $f = f_n^e$. On remarque que si $\Phi(f) = \Phi(f') = (n, e)$ alors $f = f_n^e = {f'}_n^e = f'$ donc Φ est une injection de B' dans $\mathbb{N} \times B$. Comme B est infini par hypothèse sur H, $\mathbb{N} \times B$ est équipotent à B (admis ou Exercice). Donc Φ est une injection de B' dans un ensemble équipotent à B. En échangeant les rôles de B et B', on montre qu'il existe une injection $\Psi : B \to \mathbb{N} \times B'$ de B dans un ensemble équipotent à B'. On en déduit une bijection entre B et B'. □

Exemple 6. Soit I un ensemble non dénombrable. On note

$$\ell^2(I, \mathbb{K}) = \{x = (x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I,\ \sum_{i\in I} |x_i|^2 < +\infty\}.$$

muni du produit scalaire $(x, y) \mapsto \sum_{i\in I} x_i \overline{y}_j$. Alors $\ell^2(I, K)$ est un espace de Hilbert non séparable. Une base de $\ell^2(I, \mathbb{K})$ est donnée par la suite $(e_i)_{i\in I}$ définie par : $(e_i)_j = \delta_{ij}$; $\forall i, j \in I$.

Théorème 1.5.8. *Soit H un espace de Hilbert de dimension hilbertienne I. Alors, pour toute base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ de H, l'application*

$$H \to \ell^2(I,\mathbb{K}), \quad x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$$

est une bijection isométrique de H sur $\ell^2(I,\mathbb{K})$.

Espaces de Hilbert séparables

Théorème 1.5.9 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie et soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite libre de E. On pose :*

$$\forall p \geq 0, \quad V_p = \mathrm{Vect}\{f_0, \cdots, f_p\}.$$

Alors la suite $(e_n)_{n\geq 0}$ définie par la récurrence

$$e_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|}, \quad e_{p+1} = \frac{f_{p+1} - p_{V_p}(f_{p+1})}{\|f_{p+1} - p_{V_p}(f_{p+1})\|}$$

est une suite orthonormée t.q. :

$$\forall p \geq 0, \quad V_p = \mathrm{Vect}\{e_0, \cdots, e_p\}.$$

Plus précisément :

$$e_{p+1} = \frac{f_{p+1} - \sum_{i=0}^{p}\langle f_{p+1}, e_i\rangle e_i}{\|f_{p+1} - \sum_{i=0}^{p}\langle f_{p+1}, e_i\rangle e_i\|}$$

Démonstration. Par construction $\|e_p\| = 1$, $\forall p \geq 0$.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $(e_0, \cdots, e_n)$ est une bon de V_n.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie par définition de e_0. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et on pose :

$$e_{n+1} = \frac{f_{n+1} - p_{V_n}(f_{n+1})}{\|f_{n+1} - p_{V_n}(f_{n+1})\|}$$

Par définition de p_{V_n}, $e_{n+1} \in V_n^{\perp}$. Comme $\|e_{n+1}\| = 1$, on en déduit que $(e_0, \cdots, e_{n+1})$ est une famille orthonormée. Par hypothèse de récurrence

$$p_{V_n}(f_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}\langle f_{n+1}, e_i\rangle e_i \Rightarrow e_{n+1} \in \mathrm{Vect}\{e_0, \cdots, e_n, f_{n+1}\} = V_{n+1}$$

donc $(e_0, \cdots, e_{n+1})$ est une bon de V_{n+1}, i.e. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence sur $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\forall n \geq 0$. □

Exemple 7. Soit $H = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Par orthonormalisation de Gram-Schmit à partir de la suite $(t \mapsto t^n)_{n\geq 0}$ on obtient la suite des polynômes de Tchebychev $(P_n)_{n\geq 0}$ définis par :

$$P_n(t) = \cos(nArcos(t)), \quad \forall t \in [-1,1], \quad \forall n \geq 0.$$

Théorème 1.5.10. *Un espace préhilbertien E est séparable ssi il admet une base hilbertienne dénombrable. Alors, toutes les bases hilbertiennes sont dénombrables.*

Démonstration. On suppose que E est séparable. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite dense dans E : $E = \overline{\mathrm{Vect}\{u_n,\ n \geq 0\}}$. Soit $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ une sous-suite libre de $(u_n)_{n\geq 0}$. Par construction : $\forall n \geq 0$, $u_n \in \mathrm{Vect}\{u_{n_k},\ k \geq 0\}$, i.e. $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ est totale est libre. Par le procédé d'orthonormalisatin de Gram-Schmidt, on construit une bon $(e_k)_{k\geq 0}$ t.q. $\forall k \geq 0$, $\mathrm{Vect}\{e_0, \cdots, e_k\} = \mathrm{Vect}\{u_{n_0}, \cdots, u_{n_k}\}$. On en déduit alors : $E = \overline{\mathrm{Vect}\{u_{n_k},\ k \geq 0\}} = \overline{\mathrm{Vect}\{e_k,\ k \geq 0\}}$, i.e. $(e_k)_{k\geq 0}$ est orthonormée et totale, donc c'est une base hilbertienne dénombrable de E.

Inversement, on suppose que E admet une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n\geq 0}$. Alors $(e_n)_{n\geq 0}$ est une suite totale donc E est séparable. $\square$

Théorème 1.5.11. *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de H. Alors, l'application $\varphi : H \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $x \mapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n\geq 0}$ est un isomorphisme isométrique.*

Démonstration. Soit $x \in H$. D'après l'identité de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|\varphi(x)\|^2$$

On en déduit que φ est bien définie, i.e. $\varphi(x) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\forall x \in H$, et que φ préserve la norme. De plus, φ est linéaire (immédiat) donc c'est une isométrie linéaire. Il reste à vérifier que φ est surjective. Soit $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. On pose :

$$\forall n \geq 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k.$$

Alors : $\forall n, p \geq 0$,

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2.$$

Par hypothèse sur a, $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < +\infty$ donc :

$$\lim_{n,p\to+\infty} \|S_{n+p} - S_n\|^2 = 0,$$

i.e. la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H donc convergente vers une limite $x = \sum_{n\geq 0} a_n e_n \in H$ par complétude de H. On en déduit que $a = \varphi(x)$ et que φ est surjective. $\square$

Exemple 8. Soit $a < b$. On pose $T = b - a$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On considère l'espace $L^2([a, b], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire : $(f, g) \mapsto \frac{1}{T}\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction T-périodique $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{in\omega t}$.

Proposition 1.5.12. *La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un base hilbertienne de $L^2([a, b], \mathbb{C})$. En particulier, $L^2([a, b], \mathbb{C})$ est isométriquement isomorphe à $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.*

Démonstration. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée. En effet : $\forall n, p \geq 0$,

$$\langle e_n, e_p\rangle = \frac{1}{T}\int_a^b e_n(t)\overline{e_p(t)}dt = \frac{1}{T}\int_a^b e^{i(n-p)\omega t}dt.$$

Si $p = n$, alors

$$\|e_n\|^2 = \frac{1}{T}\int_a^b dt = 1.$$

Si $p \neq n$, alors : $\omega b = \omega a + 2\pi \Rightarrow$

$$\langle e_n, e_p\rangle = \frac{1}{T}\frac{e^{i(n-p)\omega b} - e^{i(n-p)\omega a}}{(n-p)\omega} = 0$$

Il reste à montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est totale. Soit $f \in L^2([a,b],\mathbb{C})$ et soit $\varepsilon > 0$. Par convolution, on construit $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ t.q. $\|f-g\|_2 \leq \varepsilon$ et $g(a) = g(b) = 0$. On peut prolonger g par périodicité à $\mathbb{R}$ en une fonction T-périodique $g \in \mathcal{C}_{T,\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. D'après le Théorème de Stone-Weierstrass, l'ensemble des polynômes trigonométriques $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathcal{C}_{T,\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Soit $P \in \mathcal{P}$ t.q. $\|g-P\|_\infty \leq \varepsilon$. On en déduit :

$$\|f-P\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-P\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-P\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

Il en résulte que $\overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_n,\ n\in\mathbb{Z}\}} = L^2([a,b],\mathbb{C})$.

□

1.5.1 Autres bases hilbertiennes classiques de L^2

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On se propose de construire des bases orthogonales de $L^2(I)$ lorsque le produit scalaire considéré est :

$$(f,g) \mapsto \int_I f(x)g(x)\rho(x)dx \tag{1.1}$$

où ρ est continue sur I, à valeurs > 0 et vérifie :

$$\int_I x^n\rho(x)dx < +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On note $L^2(I,\rho)$ l'espace $L^2(I)$ muni du produit scalaire (1.1).

Remarque 4. Lorsque I est borné, $\mathcal{C}^\infty(\overline{I})$ est dense dans $L^2(I,\rho)$ et le théorème de Stone-Weierstrass implique que l'espace des fonctions polynômes est dense dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{I})$, donc dense dans $L^2(I,\rho)$ et les polynômes orthogonaux pour ρ forment une base orthogonale de $L^2(I,\rho)$. Si I n'est pas borné, il existe des poids pour lesquels la suite des polynômes orthogonaux n'est plus une base.

Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont les polynômes orthogonaux associés au poids $\rho \equiv 1$ sur $I =]-1,1[$. Ils ont donnés par la formule :

$$\ell_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}, \quad \forall x \in]-1,1[$$

et vérifient :

$$\|\ell_n\|_2 = 2^n n!\sqrt{\frac{2}{2n+1}}, \quad \forall n \geq 0.$$

Il est usuel de normaliser les polynômes de Legendre en posant :

$$L_n := \frac{\ell_n}{2^n n!}$$

et alors $L_n(1) = 1$, $\forall n \geq 0$.

Fonctions d'Hermite

Cette base de $L^2(\mathbb{R})$ joue un rôle important dans l'étude de la transformation de Fourier et dans l'étude de l'oscillateur harmonique.

On commence par montrer que la suite de fonctions $g_k : x \mapsto e^{-x^2/2}x^k$, $k \in \mathbb{N}$, est un système total dans $L^2(\mathbb{R})$. En effet, soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ t.q. $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}x^k g(x)dx = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, et soit G la fonction de la variable complexe définie par :

$$G(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixz}e^{-x^2/2}g(x)dx \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Soit $z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$. On remarque que :

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{ixz}e^{-x^2/2}g(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta x}e^{-x^2/2}|g(x)|dx.$$

Sot $R > 0$ et soit $|\eta| \leq R$. On en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{ixz}e^{-x^2/2}g(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} e^{R|x|}e^{-x^2/2}|g(x)|dx = e^{R^2/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-(|x|-R)^2/2}|g(x)|dx$$

$$\leq e^{R^2/2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(|x|-R)^2}dx\right)^{1/2}\|g\|_2 = e^{R^2/2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy\right)^{1/2}\|g\|_2 < +\infty, \quad (1.2)$$

donc G est bien définie sur la bande compacte $|\mathrm{Im} z| \leq R$, $\forall R > 0$, donc sur $\mathbb{C}$. De plus, G est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car $z \mapsto e^{ixz}e^{-x^2/2}g(x)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$ et on a : $\forall R > 0$, $\forall |\mathrm{Im} z| \leq R$,

$$|e^{ixz}e^{-x^2/2}g(x)| \leq e^{R^2/2}e^{-(|x|-R)^2/2}|g(x)|$$

où la fonction dominante $x \mapsto e^{-(|x|-R)^2/2}|g(x)|$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ d'après (1.2). Du Théor eme de convergence dominée de Lebesgue on déduit que G est holomorphe sur la bande compacte $|\mathrm{Im} z| \leq R$, $\forall R > 0$, donc sur $\mathbb{C}$. En particulier, les dérivées $G^{(k)}$ de G, $k \in \mathbb{N}$, se calculent par dérivation sous le signe somme, i .e. : :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad G^{(k)}(z) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{ixz}e^{-x^2/2}g(z)dz$$

d'où on déduit que :

$$G^{(k)}(0) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{-x^2/2}g(z)dz = 0$$

par hypothèse sur g. On en déduit que $G \equiv 0$, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixz}e^{-x^2/2}g(x)dx = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

La transformation de Fourier étant injective sur $L^1(\mathbb{R})$, il en résulte que $e^{-x^2/2}g(x) = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}$, i.e. $g = 0$. Cela achève de monrer que la suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale dans $L^2(\mathbb{R})$. Le procédé d'orthonormlisation de Gramm-Schmidt permet d'en déduire une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Fonctions de Laguerre

On pose :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}_n(x) = e^{-x/2} L_n(x) \quad \text{où} \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n)$$

1.6 Opérateurs compacts

1.6.1 Propriétés de base

Définition 1.6.1. Si E et F sont deux evn, une application $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est un opérateur compact si $\overline{T(\overline{B_E(0,1)})}$ est compact. On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F.

Proposition 1.6.1. *Si E et F sont deux evn si $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$ alors les propositions suvantes sont équivalentes :*

(i) T est compact.

(ii) Pour tout $A \subset E$ borné, $\overline{T(A)}$ est compact.

(iii) Pour toute suite bornée $(x_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$, $(Tx_n)_{n\geq 0}$ admet une valeur d'adhérence.

Démonstration. (i)⇒(ii) Par hypothèse, il existe $r > 0$ t.q. $A \subset r\overline{B_E(0,1)}$ et la linéarité de T entraîne :

$$T(A) \subset rT(\overline{B_E(0,1)}) \Rightarrow \overline{T(A)} \subset \overline{rT(\overline{B_E(0,1)})} = r\overline{T(\overline{B_E(0,1)})}$$

Comme $x \mapsto rx$ est un homéomorphisme de $E \to E$, on en déduit que $r\overline{T(\overline{B_E(0,1)})}$ est un compact. Comme de plus $\overline{T(A)}$ est fermé, il en résulte que $\overline{T(A)}$ est un compact.

(ii)⇒ (iii) On prend $A = \{x_n,\ n \geq 0\}$.

(iii)⇒ (i). Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in \overline{T(\overline{B_E(0,1)})}^{\mathbb{N}}$ et soit $\varepsilon > 0$. Par définition de l'adhérence,pour tout $n \geq 0$, il existe $y_n \in \overline{B_E(0,1)}$ t.q.

$$\|x_n - Ty_n\| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Par hypothèse, il existe une suite extraite $(y_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ qui converge vers $x \in E$ et alors $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} x$. □

Proposition 1.6.2. *Si E et F sont deux evn, alors l'ensemble des opérateurs compacts $E \to F$ est fermé.*

Démonstration. Soit $(T_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}(E, F)^{\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs compacts et soit $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$ t.q. $T_n \underset{n\to+\infty}{\to} T$ dans $\mathcal{L}_c(E, F)$. Soit $(x_k)_{k\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $\|x_k\|_E \leq 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 > 0$ t.q. $\|T - T_n\| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Soit $n \geq n_0$. Par hypothèse, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(k)})_{k\geq 0}$ et $y \in F$ t.q. $T_n x_{\varphi(k)} \underset{k\to+\infty}{\to} y$ dans F. On a : $\forall k \geq 0$,

$$\|Tx_{\varphi(k)} - y\|_F \leq \|Tx_{\varphi(k)} - T_n x_{\varphi(k)}\|_F + \|T_n x_{\varphi(k)} - y\|_F \leq$$

$$\leq \|T - T_n\|\underbrace{\|x_{\varphi(k)}\|_E}_{\leq 1} + \|T_n x_{\varphi(k)} - y\|_F \leq \varepsilon + \underbrace{\|T_n x_{\varphi(k)} - y\|_F}_{\underset{k\to+\infty}{\to} 0}$$

$$\Rightarrow \limsup_{k\to+\infty} \|Tx_{\varphi(k)} - y\|_F \leq \varepsilon$$

Ceci éant vrai $\forall \varepsilon > 0$, on en déduit que $\|Tx_{\varphi(k)} - y\|_F \underset{k\to+\infty}{\to} 0$.

□

1.6.2 Exemples d'opérateurs compacts

Opérateurs de rang fini

Proposition 1.6.3. *Tout opérateur $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$ de rang fini, i.e. t.q.* $\dim(T(E)) < +\infty$*, est compact.*

Démonstration. Il sufffit de remarquer que $\overline{T(\overline{B_E(0,1)})}$ est fermé et borné dans l'ev $T(E)$. de dimension finie. □

Opérateurs intégraux

Soit $E = L^2(I, \mathbb{C})$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle compact. On considère l'opérateur intégral :

$$T : L^2(I, \mathbb{C}) \to L^2(I, \mathbb{C}), \quad f \mapsto Tf$$

défini par :

$$Tf(t) = \int_I K(t, s)f(s)ds, \quad \forall f \in L^2(I, \mathbb{C})$$

où $K \in \mathcal{C}(I \times I, \mathbb{C})$ est continue.

Soit $f \in L^2(I, \mathbb{C})$. On a :

$$\left| \int_I K(t, s)f(s)ds \right| \leq \|K(t, \cdot)\|_2 \|f\|_2$$

$$\Rightarrow \|Tf\|_2^2 \leq \int_I \|K(t, \cdot)\|_2^2 dt \|f\|_2^2 = \|K\|_2^2 \|f\|_2^2 < +\infty$$

donc $Tf \in L^2(I, \mathbb{C})$.

Soit $t \in I$. On a : $\forall f \in \overline{B_E}$,

$$|Tf(t)| \leq \|K(t, \cdot)\|_2 \|f\|_2 \leq VertK(t, \cdot)\|_2 < +\infty$$

i.e. $\{Tf(t),\ f \in \overline{B_E}\}$ est borné dans $\mathbb{C}$.

Soit $t_1, t_2 \in I$ et soit $f \in \overline{B_E}$. On a :

$$|Tf(t_1) - Tf(t_2)| \leq \|K(t_1, \cdot) - K(t_2, \cdot)\|_2 \underbrace{\|f\|_2}_{\leq 1}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme K est continue sur le compact $I \times I$, elle est uniforément continue. Il existe $\eta > 0$ t.q.

$$|t_1 - t_2| < \eta \to \|K(t_1, \cdot) - K(t_2, \cdot)\|_2 \leq C\|K(t_1, \cdot) - K(t_2, \cdot)\|_\infty < \varepsilon,$$

ce qui montre que la famille $\{Tf,\ f \in \overline{B_E}\}$ est (uniformément) équicontinue. Du Théorème d'Arzéla-Ascoli, $\overline{T(\overline{B_E})}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$. Soit $(f_n)_{n\geq 0} \in \overline{B_E}^{\mathbb{N}}$. Il existe donc une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0} \in \overline{B_E}^{\mathbb{N}}$ et $g \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ t.q. $Tf_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} g$ dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$, puis, l'intervalle I érant borné : $Tf_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} g$ dans $L^2(I,\mathbb{C})$.

Théorème 1.6.4 (Théorème d'Arzela-Ascoli)**.** *Soit (X,τ) un espace topologique compact et soit (Y,d) un espace métrique. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ une partie t.q.*

1. *$\mathcal{A}$ est équicontinue sur X ;*
2. *pour tout $x \in X$, $\mathcal{A}(x) = \{f(x),\ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans Y.*

Alors $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X,Y)$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Définition 1.6.2. Soit E un espace de Hilbert séparable. On dit que $T \in \mathcal{L}_c(E,E)$ et un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$ t.q. :

$$\sum_{n\geq 0} \|Te_n\|_E^2 =: \|T\|_{HS}^2 < +\infty.$$

Proposition 1.6.5. *La définition 1.6.2 ne dépend pas du choix de la base $(e_n)_{n\geq 0}$.*

Démonstration. Soit $(e'_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de E. On a :

$$Te'_n = \sum_{k\geq 0} \langle Te'_n, e_k\rangle e_k \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \|Te'_n\|_E^2 = \sum_{n,k\geq 0} |\langle Te'_n, e_k\rangle|^2$$

$$= \sum_{n,k\geq 0} |\langle e'_n, T^* e_k\rangle|^2 = \sum_{n\geq 0} \|T^* e_n\|_E^2 = \sum_{\ell,n\geq 0} |\langle T^* e_n, e_\ell\rangle|^2 = \sum_{\ell,n\geq 0} |\langle e_n, Te_\ell\rangle|^2$$

$$= \sum_{\ell\geq 0} \|Te_\ell\|_E^2.$$

□

Proposition 1.6.6. *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur un espace de Hilbert E est compact.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N > 0$ t.q. $\sum_{n>N} \|Te_n\|_E^2 \leq \varepsilon$. Soit $x \in E$. On a :

$$Tx = \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n\rangle Te_n + \sum_{n>N} \langle x, e_n\rangle Te_n$$

avec

$$\|\sum_{n>N} \langle x, e_n\rangle Te_n\|_E^2 \leq \|x\|_E^2 \sum_{n>N} \|Te_n\|_E^2 \leq \varepsilon \|x\|_E^2.$$

On en déduit :

$$\|\underbrace{Tx - \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n \rangle T e_n}_{=T\circ P_{F_N}(x)}\|_E^2 \leq \varepsilon \|x\|_E^2.$$

où P_{F_N} est la projection orthogonale sur $F_N = \text{Vect}\{e_0, \cdots, e_N\}$. Donc T est compact comme limite d'une suite d'opérateurs de rang fini donc compacts. $\square$

1.6.3 Annexe : Remarques

Corollaire 1.4.3

Avec les notations de l'énoncé : $\Psi \circ \Phi$ coïncide avec l'injection canonique de $E \to E''$ au moyen de l'application $\text{eval}_x : f \mapsto f(x)$, *ce qui achève de montrer que E est réflexif.* (cf [1], Remarque 13.)

Démonstration. Soit $f \in E'$, $x \in E$. Par définition. de Ψ et Φ :

$$\text{eval}_x(f) = f(x) = \langle x, \Phi^{-1}(f) \rangle_E$$

$$= \langle f, \Psi^{-1}(\text{eval}_x) \rangle_{E'} = \langle \Phi^{-1} \circ \Psi^{-1}(\text{eval}_x), \Phi^{-1}(f) \rangle_E.$$

Ceci étant vrai pour tout $f \in E'$ et Φ étant une bijection de $E \to E'$, on en déduit que :

$$\underbrace{\Phi^{-1} \circ \Psi^{-1}}_{=(\Psi\circ\Phi)^{-1}}(\text{eval}_x) = x$$

i.e. :

$$\Psi \circ \Phi(x) = \text{eval}_x.$$

$\square$

D'après [1], la réflexivité des espaces de Hilbert est une conséquence de leur uniforme convexité. (cf. [1], Théorème III.29, p.51, et Proposition V.1, p.78.)

Proposition 1.6.1

(i)$\Rightarrow$ (ii) : En remarquant que $x \mapsto rx$ est continue à valeurs dans E qui est séparé, on évite l'argument de l'homéomorphisme.

Bibliographie

[1] Brezis, H. Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[2] Dixmier, J., Topologie Générale, P.U.F., Paris, 1981.

[3] Aubin, J.P., Analyse Fonctionnelle Appliquée, tomes 1 et 2, P.U.F., Paris, 1987.