

Compléments d'Analyse

Isabelle Gruais
Université de Rennes 1

9 septembre 2026

Introduction

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

Dans la suite $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sauf cas particulier où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.1 Forme sesquilinéaire et produit scalaire

Définition 1.1.1. Une application $f : E \rightarrow F$ entre deux ev sur $\mathbb{C}$ est antilinéaire si

1. $\forall x, y \in E, \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$
2. $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad f(\lambda x) = \bar{\lambda}f(x).$

Définition 1.1.2. Soit E un ev sur $\mathbb{K}$.

1. On appelle forme sesquilinéaire (à droite) sur $\mathbb{K}$ toute application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant. :
 - (a) f est linéaire à gauche, i.e. $\forall y \in E, x \mapsto f(x, y)$ est linéaire ;
 - (b) f est antilinéaire à droite, i.e. $\forall x \in E, y \mapsto f(x, y)$ est antilinéairePar convention, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire est bilinéaire.
2. Une forme sesquilinéaire f est hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, resp. symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si en outre $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$, resp. $f(x, y) = f(y, x), \forall x, y \in E$.

Proposition 1.1.1. Si $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire, alors : $\forall x, y \in E,$

$$\varphi(x + y, x + y) + \varphi(x - y, x - y) = 2\varphi(x, x) + 2\varphi(y, y).$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$. On a

$$\varphi(x + y, x + y) = \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y),$$

$$\varphi(x - y, x - y) = \varphi(x, x) - \varphi(x, y) - \varphi(y, x) + \varphi(y, y),$$

□

Proposition 1.1.2. Si $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire, alors : $\forall x, y \in E,$

1. $\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) = 2\varphi(x, y) + 2\varphi(y, x).$

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et φ symétrique : $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = 4\varphi(x, y)$.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et φ hermitienne : $\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy) = 4\varphi(x, y)$.

Démonstration. Soit $x, y \in E$.

1. On a

$$\begin{aligned} \varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) &= \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y) + \\ &\quad - \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) - \varphi(y, y). \end{aligned}$$

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on utilise ce qui précède avec $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors, en notant $\mathbb{U}_4$ le groupe des racines quatrièmes de 1 : $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$ et on est ramené à calculer $\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta \varphi(x + \zeta y, x + \zeta y)$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta \varphi(x + \zeta y, x + \zeta y) &= \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta \varphi(x, x) + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} |\zeta|^2 \varphi(x, y) + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta^2 \varphi(y, x) \\ &\quad + \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta \varphi(y, y) \\ &= 4\varphi(x, y). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.3. Soit φ une forme sesquilinéaire sur un ev E sur $\mathbb{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. φ est hermitienne.
2. $\forall x \in E, \varphi(x, x) \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Si φ est hermitienne, alors $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)} \Rightarrow \varphi(x, x) \in \mathbb{R}, \forall x \in E$.

Inversement, on suppose que $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}, \forall x \in E$. On pose : $\forall x, y \in E, \Phi(x, y) = \varphi(x, y) - \overline{\varphi(y, x)}$. Alors Φ est sesquilinéaire et $\Phi(x, x) = 0, \forall x \in E$. De la Proposition 1.1.2, on déduit que $\Phi(x, y) = 0, \forall x, y \in E$. □

Définition 1.1.3. Une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$ -ev est dite positive, resp. définie positive $\forall x \in E \setminus \{0\}, \varphi(x, x) \geq 0$, resp. $\varphi(x, x) > 0$.

Proposition 1.1.4. Soit E un ev sur $\mathbb{K}$ et soit φ une forme hermitienne positive sur E . On a : $\forall x, y \in E$,

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y).$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\lambda \varphi(x, y) = |\varphi(x, y)|$. Alors $|\lambda| = 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par hypothèse sur $\varphi : \varphi(\lambda x + ty, \lambda x + ty) \geq 0$. En développant cette expression, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\lambda|^2 \varphi(x, x) + 2t \operatorname{Re}(\lambda \varphi(x, y)) + t^2 \varphi(y, y) \geq 0,$$

avec $2t \operatorname{Re}(\lambda \varphi(x, y)) = 2t|\varphi(x, y)|$. De la théorie des équations du second degré à coefficients réels, on déduit que $4|\varphi(x, y)|^2 - 4\varphi(x, x)\varphi(y, y) \leq 0$. □

Définition 1.1.4. Une forme sesquilinéaire définie positive est appelée un produit scalaire. Si E est un ev et si φ est un produit scalaire sur E , on définit une norme sur E en posant

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}.$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Définition 1.1.5. On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien complet pour la norme associée.

Exemple 1. L'espace $\mathbb{C}^d$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire : $(z, z') \mapsto \sum_{k=1}^d \bar{z}_k z'_k$.

Exemple 2. L'espace

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n \geq 0} |u_n|^2 < +\infty\}$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) \mapsto \sum_{n \geq 0} u_n \bar{v}_n$$

1.2 Orthogonalité

Définition 1.2.1. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien sur K . Deux vecteurs $x, y \in H$ sont dits orthogonaux et on note $x \perp y$ si $\langle x, y \rangle = 0$. Si $A \subset H$, l'orthogonal de A dans H est le sev de H défini par :

$$A^\perp = \{x \in H \mid \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}.$$

Proposition 1.2.1. Soit E un espace préhilbertien. Alors :

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\forall x, y \in E$, $x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ et $\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
3. Si $A \subset B \subset E$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.
4. Si $A \subset E$, alors $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Démonstration. On utilise le développement :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

avec $\operatorname{Re}\langle x, iy \rangle = \operatorname{Im}\langle x, y \rangle$. □

1.3 Projection hilbertienne

Théorème 1.3.1. Soit E un espace préhilbertien et soit $C \subset E$ un convexe complet. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in C$ unique t.q. $\|x - a\| = d(x, C)$. L'application $p_C : E \rightarrow C$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :

$$p_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \forall y \in C, \quad \operatorname{Re}\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0.$$

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \geq 0} \in C$ définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad x_n \in C \quad \text{et} \quad d(x, C) \leq \|x - x_n\| \leq d(x, C) + \frac{1}{n}$$

On a : $\forall n, p \geq 0$,

$$\|x_{n+p} - x_n\| = \|x - x_{n+p} - (x - x_n)\|$$

avec

$$\|x - x_{n+p} - (x - x_n)\|^2 + \|(x - x_{n+p}) + (x - x_n)\|^2 = 2\|x - x_{n+p}\|^2 + 2\|x - x_n\|^2$$

$$\iff \|x_{n+p} - x_n\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}(x_{n+p} + x_n)\|^2 = 2\|x - x_{n+p}\|^2 + 2\|x - x_n\|^2.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\|^2 &\leq 4\left(d(x, C) + \frac{1}{n}\right)^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(x_{n+p} + x_n)\|^2 = \\ &= 4\left(d(x, C)^2 - \|x - \frac{1}{2}(x_{n+p} + x_n)\|^2\right) + \frac{8}{n}d(x, C) + \frac{4}{n^2} \leq \frac{8}{n}d(x, C) + \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

car C convexe $\Rightarrow \frac{1}{2}(x_n + x_{n+p}) \in C$. Il en résulte que $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans C complet donc convergente vers $a \in C$.

Par construction $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - x_n\| = d(x, C)$ donc $\|x - a\| = d(x, C)$. On suppose qu'il existe $a' \in C$ t.q. $\|x - a'\| = d(x, C)$. Alors

$$\|a - a'\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}(a + a')\|^2 = 2\|x - a\|^2 + 2\|x - a'\|^2 = 4d(x, C)^2$$

donc

$$\|a - a'\|^2 = 4d(x, C)^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(a + a')\|^2 \leq 0$$

i.e. $a = a'$. On note $p_C(x) = a$.

Soit $y \in C$. On a :

$$\begin{aligned} \|x - p_C(x)\|^2 &\leq \|y - x\|^2 = \|y - p_C(x) - (x - p_C(x))\|^2 = \\ &= \|y - p_C(x)\|^2 + \|x - p_C(x)\|^2 - 2\langle y - p_C(x), x - p_C(x) \rangle \\ &\Rightarrow 2\langle y - p_C(x), x - p_C(x) \rangle \leq \|y - p_C(x)\|^2. \end{aligned}$$

Ceci est vrai en particulier pour $y = tz + (1 - t)p_C(x)$ avec $z \in C$ et $t \in [0, 1]$. Alors :

$$2t\langle z - p_C(x), x - p_C(x) \rangle \leq t^2\|z - p_C(x)\|^2$$

i.e., si $t > 0$:

$$2\langle z - p_C(x), x - p_C(x) \rangle \leq t\|z - p_C(x)\|^2.$$

On conclut en passant à la limite quand $t \rightarrow 0^+$.

Inversement, soit $\tilde{x} \in C$ t.q. :

$$\langle y - \tilde{x}, x - \tilde{x} \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

Soit $y \in C$. on a :

$$\begin{aligned} \|y - x\|^2 &= \|y - \tilde{x} - (x - \tilde{x})\|^2 = \|y - \tilde{x}\|^2 + \|\tilde{x} - x\|^2 - 2\underbrace{\langle y - \tilde{x}, x - \tilde{x} \rangle}_{\leq 0} \\ &\geq \|y - \tilde{x}\|^2 + \|\tilde{x} - x\|^2 \geq \|\tilde{x} - x\|^2. \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.3.2. Soit E un espace de Hilbert et soit $C \subset E$ un convexe fermé. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in C$ unique t.q. $\|x - a\| = d(x, C)$. L'application $p_C : E \rightarrow C$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :

$$p_C(x) \in C \quad \text{et} \quad \forall y \in C, \quad \operatorname{Re}\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0.$$

Démonstration. On est ramené au résultat précédent en remarquant que C est un convexe complet. □

Corollaire 1.3.3. Avec les notations du Théorème 1.3.1, l'application p_C est contractante, i.e. vérifie :

$$\forall x, y \in E, \quad \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|$$

Démonstration. Le calcul donne :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle x - y, p_C(x) - p_C(y) \rangle &= -\operatorname{Re}\langle x - p_C(x), p_C(y) - p_C(x) \rangle - \operatorname{Re}\langle p_C(x), p_C(y) - p_C(x) \rangle \\ &\quad - \operatorname{Re}\langle y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y) \rangle - \operatorname{Re}\langle p_C(y), p_C(x) - p_C(y) \rangle \\ &= -\operatorname{Re}\langle x - p_C(x), p_C(y) - p_C(x) \rangle - \operatorname{Re}\langle y - p_C(y), p_C(x) - p_C(y) \rangle + \\ &\quad + \|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \geq \|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \end{aligned}$$

i.e. :

$$\begin{aligned} \|p_C(x) - p_C(y)\|^2 &\leq \operatorname{Re}\langle x - y, p_C(x) - p_C(y) \rangle \leq |\operatorname{Re}\langle x - y, p_C(x) - p_C(y) \rangle| \\ &\leq \|x - y\| \|p_C(x) - p_C(y)\| \\ &\Rightarrow \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.4. Soit E un espace préhilbertien et soit $F \subset E$ un sev complet. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in F$ unique t.q. $\|x - a\| = d(x, F)$. L'application $p_F : E \rightarrow F$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :

$$p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad x - p_F(x) \in F^\perp$$

Démonstration. On remarque que F est convexe et fermé, d'où l'existence et l'unicité de $p_F(x)$. On conclut en remarquant que :

$$\operatorname{Re}\langle x - p_F(x), y - p_F(x) \rangle \leq 0, \quad \forall y \in F$$

et $y \mapsto y - p_F(x)$ est une bijection $F \rightarrow F$ donc

$$\operatorname{Re}\langle x - p_F(x), y \rangle \leq 0, \quad \forall y \in F.$$

F est un espace vectoriel donc $y \in F \iff -y \in F$ et alors :

$$-\operatorname{Re}\langle x - p_F(x), y \rangle \leq 0, \quad \forall y \in F$$

i.e. :

$$\operatorname{Re}\langle x - p_F(x), y \rangle = 0, \quad \forall y \in F.$$

De même, F est un ev sur $\mathbb{C}$ donc $y \in F \iff iy \in F$. On en déduit :

$$\operatorname{Re}\langle x - p_F(x), iy \rangle = \operatorname{Im}\langle x - p_F(x), iy \rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

et finalement ;

$$\langle x - p_F(x), y \rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

i.e. $x - p_F(x) \in F^\perp$.

□

Supplémentaire orthogonal et somme directe

Définition 1.3.1. On dit qu'un ev E est la somme directe algébrique de deux ev F et G si $E = F + G$ avec $F \cap G = \{0\}$.

Si E est un espace préhilbertien on dit que E est la somme directe orthogonale de F et G si $E = F \oplus G$ avec $G = F^\perp$. Alors G est appelé le supplémentaire orthogonal de F .

Théorème 1.3.5. Soit E un espace préhilbertien et soit $F \subset E$ un sev complet.

1. La projection orthogonale $p_F : E \rightarrow F$ est une application linéaire continue. Si $F \neq \{0\}$, alors $\|p_F\| = 1$.
2. $E = F \oplus F^\perp$.
3. $F^\perp = \operatorname{Ker}(p_F)$ et $F^{\perp\perp} = F$.

Démonstration. 1. D'après le Théorème de projection hilbertienne, la projection p_F est bien définie. Soit $x, y \in E$ et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$$p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad p_F(y) \in F \Rightarrow \lambda p_F(x) + \mu p_F(y) \in F$$

et

$$x - p_F(x) \in F^\perp \quad \text{et} \quad y - p_F(y) \in F^\perp$$

$$\Rightarrow \lambda x + \mu y - (\lambda p_F(x) + \mu p_F(y)) = \lambda(x - p_F(x)) + \mu(y - p_F(y)) \in F^\perp.$$

De la Proposition 1.3.4, on déduit que $p_F(\lambda x + \mu y) = \lambda p_F(x) + \mu p_F(y)$, i.e. p_F est linéaire.

p_F étant linéaire et contractante, on a :

$$\forall x \in E, \quad \|p_F(x)\| = \|p_F(x) - p_F(0)\| \leq \|x\| \Rightarrow \|p_F\| \leq 1.$$

De plus : $\forall x \in E, x \in F \Rightarrow p_F(x) = x$ et $\|p_F(x)\| = \|x\|$. Donc $\|p_F\| = 1$.

2. Soit $x \in E$. On a $x = x - p_F(x) + p_F(x)$ avec $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x) \in F$ donc $E = F + F^\perp$. De plus :

$$\forall x \in F^\perp \cap F, \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

donc $F \cap F^\perp = \{0\}$. Finalement, $E = F \oplus F^\perp$.

3. Soit $x \in \text{Ker}(p_F)$. Alors $x = x - p_F(x) \in F^\perp$. Donc $\text{Ker}(p_F) \subset F^\perp$.
 Inversement soit $x \in F^\perp$. Par unicité de la décomposition $x = x - p_F(x) + p_F(x) \in F^\perp \oplus F$ on déduit que $p_F(x) = 0$, i.e. $x \in \text{Ker}(p_F)$.
 Finalement : $\text{Ker}(p_F) = F^\perp$.
 On a : $F \subset (F^\perp)^\perp$. Inversement, soit $x \in F^{\perp\perp}$. Alors :

$$x - p_F(x) \in F^\perp \Rightarrow \langle x, x - p_F(x) \rangle = 0$$

donc

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x, p_F(x) \rangle = \langle x - p_F(x), p_F(x) \rangle + \langle p_F(x), p_F(x) \rangle = \langle p_F(x), p_F(x) \rangle \\ &= \|p_F(x)\|^2. \end{aligned}$$

De plus (Théorème de Pythagore) :

$$p_F(x) \perp x - p_F(x) \Rightarrow \|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2.$$

On en déduit $\|x - p_F(x)\|^2 = 0$, i.e. $x = p_F(x) \in F$. Donc $F^{\perp\perp} \subset F$. $\square$

Remarque 1. Sous les mêmes hypothèses, $I - p_F$ est la projection orthogonale sur $F^\perp$ et on peut écrire $I - p_F = p_{F^\perp}$.

Corollaire 1.3.6. *Si F est un sev fermé d'un espace de Hilbert H alors : $H = F \oplus F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$.*

Démonstration. On se ramène au Théorème 1.3.5 en remarquant que F fermé dans H complet est complet. $\square$

Dans le cas général où F est un sev non nécessairement fermé d'un espace de Hilbert, on a le résultat suivant.

Corollaire 1.3.7. *Soit F un sev d'un espace de Hilbert H . On a :*

$$F^{\perp\perp} = \overline{F} \quad (1.1)$$

$$\overline{F} = H \iff F^\perp = \{0\}. \quad (1.2)$$

Démonstration. 1. On remarque que $F^\perp = \bigcap_{y \in F} \text{Ker}(\phi_y)$ où $\phi_y : x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire continue de norme $\|\phi_y\| = \|y\|$, $\forall y \in F$. Donc $F^\perp$ est fermé comme intersection de fermés. Ceci reste vrai pour $F^{\perp\perp}$ qui est également fermé. En particulier :

$$F \subset F^{\perp\perp} \Rightarrow \overline{F} \subset \overline{F^{\perp\perp}} = F^{\perp\perp}.$$

De plus, le Corollaire 1.3.6 entraîne :

$$F \subset \overline{F} \Rightarrow \overline{F}^\perp \subset F^\perp \Rightarrow F^{\perp\perp} \subset \overline{F}^{\perp\perp} = \overline{F}.$$

Finalement : $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

2. De ce qui précède on déduit :

$$\overline{F} = H \iff (F^\perp)^\perp = H \iff \overline{F^\perp} = H^\perp \iff F^\perp = \{0\}$$

car $H^\perp = \{0\}$ par définition du produit scalaire et $\overline{F^\perp} = F^\perp$ puisque $F^\perp$ est fermé. $\square$

Définition 1.3.2. Soit H un espace de Hilbert. Un endomorphisme $P : H \rightarrow H$ est un opérateur autoadjoint (ou hermitien si $K = \mathbb{C}$) si $\langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle, \forall x, y \in H$.

Proposition 1.3.8. Soit F un sev fermé d'un espace de Hilbert H .

1. $p_F \circ p_F = p_F$
2. p_F est auto-adjoint : $\forall x, y \in H, \langle p_F(x), y \rangle = \langle x, p_F(y) \rangle$.

Démonstration. 1. C'est une conséquence directe de l'unicité de la projection orthogonale sur F .

2. Soit $x, y \in H$.

$$x - p_F(x) \in F^\perp \quad \text{et} \quad p_F(y) \in F \Rightarrow \langle x, p_F(y) \rangle = \langle p_F(x), p_F(y) \rangle.$$

De même :

$$\langle p_F(x), y \rangle = \langle p_F(x), p_F(y) \rangle.$$

$$\text{Finalement : } \langle x, p_F(y) \rangle = \langle p_F(x), y \rangle = \langle p_F(x), p_F(y) \rangle.$$

□

1.4 Systèmes orthonormés et bases hilbertiennes

Définition 1.4.1. Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Un système $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E et un système orthogonal si $\langle x_i, x_j \rangle = 0, \forall i \neq j$.

Définition 1.4.2. Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Un système orthogonal $(x_i)_{i \in I}$ est orthonormé si $\|x_i\| = 1, \forall i \in I$.

Exemple 3. Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire usuel, le système $(e_1, \dots, e_n)$ donné par $(e_k)_i = \delta_{ik}, i, k \in [[1, n]]$, est un système orthonormé.

Exemple 4. Dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{n \geq 0} x_n \bar{y}_n, \forall x = (x_n)_{n \geq 0}, y = (y_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, le système $(e_n)_{n \geq 0}$ donné par $(e_n)_k = \delta_{kn}, \forall k, n \geq 0$ est orthonormé.

Exemple 5. Dans l'espace de Hilbert $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \bar{y}(t) dt$, le système $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où e_n est la fonction $e_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{int}$.

Proposition 1.4.1. Soit E un espace préhilbertien et soit $(e_i)_{i \in I}$ un système orthonormé. On suppose I fini. On pose $F = \text{Vect}\{e_i, i \in I\}$. Soit $x, y \in E$. On a

1. $p_F(x) = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$,
2. $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle^2$,
3. $\langle p_F(x), y \rangle = \langle x, p_F(y) \rangle = \langle p_F(x), p_F(y) \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$.

Démonstration. 1. Soit $x \in E$. On pose $P(x) = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$. On a :

$$\forall i \in I, \quad \langle x - P(x), e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{j \in I} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle = 0$$

donc $x - P(x) \in F^\perp$. Comme de plus $P(x) \in F$, on en déduit que $P(x) = p_F(x)$.

2. Soit $x \in F$. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}\|p_F(x)\|^2 &= \langle p_F(x), p_F(x) \rangle = \sum_{i,j \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2.\end{aligned}$$

3. Soit $x, y \in E$. On a

$$\langle p_F(x), y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}.$$

□

Proposition 1.4.2 (Inégalité de Bessel). *Soit E un espace préhilbertien et soit $(e_i)_{i \in I}$ un système orthonormé de E .*

1. *Soit $x \in E$ et soit $J \subset I$ une partie finie de I . On a*

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \|x - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2$$

2. *Soit $x \in E$. La famille $(|\langle x, e_i \rangle|^2)_{i \in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ de somme majorée par $\|x\|^2$:*

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration. 1. Soit $x \in E$ et soit $J \subset I$ une partie finie de I . On pose $F = \text{Vect}\{x_i, i \in J\}$. Alors

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 = \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 + \|x - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i\|^2.$$

2. Soit Λ l'ensemble des parties finies de I . De ce qui précède on déduit que :

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 := \sup_{J \in \Lambda} \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

□

Corollaire 1.4.3. *Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_i)_{i \in I}$ un système orthonormé de H . Pour tout $x \in H$, la famille $(\langle x, e_i \rangle e_i)_{i \in I}$ est sommable de somme vérifiant l'estimation :*

$$\left\| \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i \right\| \leq \|x\|.$$

Démonstration. Soit $x \in H$. D'après la Proposition 1.4.2 et l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$$

i.e. la famille $(|\langle x, e_i \rangle|^2)_{i \in I}$ est sommable. Soit $\varepsilon > 0$. On en déduit qu'il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \varepsilon.$$

i.e., le système $(e_i)_{i \in I}$ étant orthonormé :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \left\| \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i \in J} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \varepsilon.$$

La famille $(\langle x, e_i \rangle e_i)_{i \in I}$ vérifie le critère de Cauchy dans H qui est complet donc est sommable, de somme $x' := \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \|x' - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i\| \leq \varepsilon.$$

Soit $J \in \Lambda$ t.q. $J_\varepsilon \subset J$. On a :

$$\|x'\| \leq \varepsilon + \left\| \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i \right\| \leq \varepsilon + \|x\|.$$

Ceci est vrai $\forall \varepsilon > 0$, donc, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient : $\|x'\| \leq \|x\|$. $\square$

Base hilbertienne

Définition 1.4.3 (Famille totale). Une famille de vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ d'un ev E est dite totale si $E = \text{Vect}\{e_i, i \in I\}$. On appelle suite totale toute famille totale dénombrable.

Définition 1.4.4. Soit E un espace préhilbertien. On appelle base hilbertienne toute famille $(e_i)_{i \in I}$ de E orthonormée et totale.

Remarque 2. Soit H un espace de Hilbert. Un système orthonormé $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne ssi : $\forall x \in H$,

$$\langle x, e_i \rangle = 0, \quad \forall i \in I \Rightarrow x = 0.$$

En effet, par définition, $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne ssi

$$H = \overline{\text{Vect}\{e_i, i \in I\}} \xLeftrightarrow[(1.2)] \{0\} = \text{Vect}\{e_i, i \in I\}^\perp$$

Théorème 1.4.4 (Caractérisation des bases hilbertiennes). Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormée. Les conditions suivantes sont équivalentes

- (i) $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne.
- (ii) $\forall x \in H, x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$
- (iii) $\forall x, y \in H, \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle} = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$
- (iv) $\forall x \in H, \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$ (Egalité de Parseval)

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $x \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $y_\varepsilon \in \text{Vect}\{e_i, i \in I\}$ t.q. $\|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$. Soit Λ l'ensemble des parties finies de I . Il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ et il existe $(\lambda_i)_{i \in J_\varepsilon} \in \mathbb{K}^{J_\varepsilon}$ t.q. $y_\varepsilon = \sum_{i \in J_\varepsilon} \lambda_i e_i$. On pose $F_{J_\varepsilon} = \text{Vect}\{e_i, i \in J_\varepsilon\}$. F_{J_ε} est un sev de dimension finie de H et $p_{F_{J_\varepsilon}}(x) = \sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, e_i \rangle e_i$. Par définition de $p_{F_{J_\varepsilon}}$, on a $\|x - p_{F_{J_\varepsilon}}(x)\| \leq \|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$. Soit $J \in \Lambda$ t.q. $J_\varepsilon \subset J$.

$$F_{J_\varepsilon} \subset F_J \Rightarrow \|x - p_{F_J}(x)\| \leq \|x - p_{F_{J_\varepsilon}}(x)\| < \varepsilon$$

i.e. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \|x - p_{F_J}(x)\| < \varepsilon.$$

Donc la famille $(\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$ est sommable de somme $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i = x$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Soit $x \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Soit $y \in H \setminus \{0\}$. Il existe $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q. :

$$\forall J \in \Lambda, \quad J_\varepsilon \subset J \Rightarrow \|x - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i\| < \varepsilon.$$

Soit $J \in \Lambda$ t.q. $J_\varepsilon \subset J$. On a :

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}| &= |\langle x, y \rangle - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle| = |\langle x, y \rangle - \langle \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i, y \rangle| \\ &= |\langle x - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i, y \rangle| \leq \|x - \sum_{i \in J} \langle x, e_i \rangle e_i\| \|y\| < \varepsilon \|y\| \end{aligned}$$

Ceci est vrai $\forall \varepsilon > 0$, donc la famille $(\langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle})_{i \in I}$ est sommable de somme :

$$\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle} = \langle x, y \rangle.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Il suffit de poser $y = x$ dans (iii) pour conclure.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Par hypothèse : $\text{Vect}\{e_i, i \in I\}^\perp = \{0\}$, i.e., compte tenu de (1.2) : $H = \text{Vect}\{e_i, i \in I\}$.

□

Théorème 1.4.5. *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne. En particulier tout système orthonormé peut être complété en une base hilbertienne.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert. On suppose $H \neq \{0\}$. Sinon, le résultat est immédiat. Soit L un système orthonormé de H . On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des systèmes orthonormés qui contiennent L ordonné par la relation $\subset$. Alors $\mathcal{B} \neq \emptyset$ car $L \in \mathcal{B}$. On veut montrer que $\mathcal{B}$ est inductif. Soit $\mathcal{C} = (B_i)_{i \in I}$ une chaîne de $\mathcal{B}$. Alors $B = \cup_{i \in I} B_i$ est un majorant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{P}(H)$. Soit $x, y \in B$, $x \neq y$, et soit $i_x, i_y \in I$ t.q. $x \in B_{i_x}$ et $y \in B_{i_y}$. Alors $\|x\| = \|y\| = 1$. Comme $\mathcal{C}$ est totalement ordonnée, on peut supposer $B_{i_x} \subset B_{i_y}$ et alors $x, y \in B_{i_y} \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$. Donc $B \in \mathcal{B}$. Du Lemme de Zorn on déduit que $\mathcal{B}$ admet un élément maximal noté B_L . Il reste à montrer que B_L est une famille totale dans H i.e. que $\text{Vect}(B_L) = H$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\overline{\text{Vect}(B_L)} \neq H$. Alors $\overline{\text{Vect}(B_L)}^\perp \neq \{0\}$. Soit alors $x_0 \in \overline{\text{Vect}(B_L)}^\perp$ t.q. $x_0 \neq 0$. Alors $\|x_0\| \neq 0$. Quitte à remplacer x_0 par $\frac{x_0}{\|x_0\|}$, on peut supposer que $\|x_0\| = 1$. On en déduit alors que $B_L \cup \{x_0\}$ est un système orthonormé, ce qui contredit le caractère maximal de B_L . Donc B_L est total dans H et par suite, c'est une base hilbertienne de H . □

Proposition 1.4.6. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable de E de somme $x \in E$. Alors :*

1. $\forall \varepsilon > 0, \{i \in I, \|x_i\| \geq \varepsilon\}$ est fini.
2. $\{i \in I, x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $J_\varepsilon \in \Lambda$ t.q.

$$\forall J \in \Lambda, \quad J \subset J_\varepsilon^c \Rightarrow \left\| \sum_{i \in J} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Soit $i_0 \in I \setminus J_\varepsilon$. On pose $J = \{i_0\}$. On en déduit : $\|x_{i_0}\| \leq \varepsilon$. Donc $\{i \in I, \|x_i\| \geq \varepsilon\} \subset J_\varepsilon$ est fini.

2. On a

$$\{i \in I, x_i \neq 0\} = \{i \in I, \|x_i\| > 0\} = \cup_{n \geq 1} \left\{ i \in I, \|x_i\| \geq \frac{1}{n} \right\},$$

i.e. $\{i \in I, x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis, éventuellement vides

□

Proposition 1.4.7. *Dans un espace de Hilbert, deux bases hilbertiennes sont équipotentes.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Soit B et B' deux bases de H . Soit $e \in B$ et soit $D_e = \{f \in B', \langle e, f \rangle \neq 0\}$. La famille $(\langle e, f \rangle)_{f \in B'}$ est sommable de somme $e = \sum_{f \in B'} \langle e, f \rangle f$ donc D_e est dénombrable d'après la Proposition 1.4.6. On note $D_e = \{f_n^e, n \geq 0\}$. De plus, $\forall f \in B'$,

$$f = \sum_{e \in B} \langle f, e \rangle e \neq 0 \Rightarrow \exists e \in B \quad \text{t.q.} \quad \langle f, e \rangle \neq 0$$

i.e. $B' \subset \cup_{e \in B} D_e$. Soit $\Phi : B' \rightarrow \mathbb{N} \times B, f \mapsto (n, e)$ t.q. $f \in D_e$ et $f = f_n^e$. On remarque que si $\Phi(f) = \Phi(f') = (n, e)$ alors $f = f_n^e = f'_n{}^e = f'$ donc Φ est une injection de B' dans $\mathbb{N} \times B$. Comme B est infini par hypothèse sur H , $\mathbb{N} \times B$ est équipotent à B (admis ou Exercice). Donc Φ est une injection de B' dans un ensemble équipotent à B . En échangeant les rôles de B et B' , on montre qu'il existe une injection $\Psi : B \rightarrow \mathbb{N} \times B'$ de B dans un ensemble équipotent à B' . On en déduit une bijection entre B et B' . □

Exemple 6. Soit I un ensemble non dénombrable. On note

$$\ell^2(I, \mathbb{K}) = \{x = (x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I, \sum_{i \in I} |x_i|^2 < +\infty\}.$$

muni du produit scalaire $(x, y) \mapsto \sum_{i \in I} x_i \bar{y}_i$. Alors $\ell^2(I, \mathbb{K})$ est un espace de Hilbert non séparable. Une base de $\ell^2(I, \mathbb{K})$ est donnée par la suite $(e_i)_{i \in I}$ définie par : $(e_i)_j = \delta_{ij}; \forall i, j \in I$.

Théorème 1.4.8. *Soit H un espace de Hilbert de dimension hilbertienne I . Alors, pour toute base hilbertienne $(e_i)_{i \in I}$ de H , l'application*

$$H \rightarrow \ell^2(I, \mathbb{K}), \quad x \mapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$$

est une bijection isométrique de H sur $\ell^2(I, \mathbb{K})$.

Espaces de Hilbert séparables

Théorème 1.4.9 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). *Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie et soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite libre de E . On pose :*

$$\forall p \geq 0, \quad V_p = \text{Vect}\{f_0, \dots, f_p\}.$$

Alors la suite $(e_n)_{n \geq 0}$ définie par la récurrence

$$e_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|}, \quad e_{p+1} = \frac{f_{p+1} - p_{V_p}(f_{p+1})}{\|f_{p+1} - p_{V_p}(f_{p+1})\|}$$

est une suite orthonormée t.q. :

$$\forall p \geq 0, \quad V_p = \text{Vect}\{e_0, \dots, e_p\}.$$

Plus précisément :

$$e_{p+1} = \frac{f_{p+1} - \sum_{i=0}^p \langle f_{p+1}, e_i \rangle e_i}{\|f_{p+1} - \sum_{i=0}^p \langle f_{p+1}, e_i \rangle e_i\|}$$

Démonstration. Par construction $\|e_p\| = 1, \forall p \geq 0$.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $(e_0, \dots, e_n)$ est une bon de V_n .

$\mathcal{P}(0)$ est vraie par définition de e_0 . On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et on pose :

$$e_{n+1} = \frac{f_{n+1} - p_{V_n}(f_{n+1})}{\|f_{n+1} - p_{V_n}(f_{n+1})\|}$$

Par définition de p_{V_n} , $e_{n+1} \in V_n^\perp$. Comme $\|e_{n+1}\| = 1$, on en déduit que $(e_0, \dots, e_{n+1})$ est une famille orthonormée. Par hypothèse de récurrence

$$p_{V_n}(f_{n+1}) = \sum_{i=0}^n \langle f_{n+1}, e_i \rangle e_i \Rightarrow e_{n+1} \in \text{Vect}\{e_0, \dots, e_n, f_{n+1}\} = V_{n+1}$$

donc $(e_0, \dots, e_{n+1})$ est une bon de V_{n+1} , i.e. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence sur $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\forall n \geq 0$. $\square$

Exemple 7. Soit $H = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Par orthonormalisation de Gram-Schmit à partir de la suite $(t \mapsto t^n)_{n \geq 0}$ on obtient la suite des polynômes de Tchebychev $(P_n)_{n \geq 0}$ définis par :

$$P_n(t) = \cos(n \text{Arcos}(t)), \quad \forall t \in [-1, 1], \quad \forall n \geq 0.$$

Théorème 1.4.10. *Un espace préhilbertien E est séparable ssi il admet une base hilbertienne dénombrable. Alors, toutes les bases hilbertiennes sont dénombrables.*

Démonstration. On suppose que E est séparable. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite dense dans E : $E = \overline{\text{Vect}\{u_n, n \geq 0\}}$. Soit $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ une sous-suite libre de $(u_n)_{n \geq 0}$. Par construction : $\forall n \geq 0, u_n \in \text{Vect}\{u_{n_k}, k \geq 0\}$, i.e. $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ est totale est libre. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on construit une bon $(e_k)_{k \geq 0}$ t.q. $\forall k \geq 0, \text{Vect}\{e_0, \dots, e_k\} = \text{Vect}\{u_{n_0}, \dots, u_{n_k}\}$. On en déduit alors : $E = \overline{\text{Vect}\{u_{n_k}, k \geq 0\}} = \overline{\text{Vect}\{e_k, k \geq 0\}}$, i.e. $(e_k)_{k \geq 0}$ est orthonormée et totale, donc c'est une base hilbertienne dénombrable de E .

Inversement, on suppose que E admet une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n \geq 0}$. Alors $(e_n)_{n \geq 0}$ est une suite totale donc E est séparable. $\square$

Théorème 1.4.11. *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $(e_n)_{n \geq 0}$ une base hilbertienne de H . Alors, l'application $\varphi : H \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}), x \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n \geq 0}$ est un isomorphisme isométrique.*

Démonstration. Soit $x \in H$. D'après l'identité de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|\varphi(x)\|^2$$

On en déduit que φ est bien définie, i.e. $\varphi(x) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\forall x \in H$, et que φ préserve la norme. De plus, φ est linéaire (immédiat) donc c'est une isométrie linéaire. Il reste à vérifier que φ est surjective. Soit $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. On pose :

$$\forall n \geq 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^n a_k e_k.$$

Alors : $\forall n, p \geq 0$,

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2.$$

Par hypothèse sur a , $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < +\infty$ donc :

$$\lim_{n, p \rightarrow +\infty} \|S_{n+p} - S_n\|^2 = 0,$$

i.e. la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans H donc convergente vers une limite $x = \sum_{n \geq 0} a_n e_n \in H$ par complétude de H . On en déduit que $a = \varphi(x)$ et que φ est surjective. $\square$

Exemple 8. Soit $a < b$. On pose $T = b - a$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On considère l'espace $L^2([a, b], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire : $(f, g) \mapsto \frac{1}{T} \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction T -périodique $e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{in\omega t}$.

Proposition 1.4.12. La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([a, b], \mathbb{C})$. En particulier, $L^2([a, b], \mathbb{C})$ est isométriquement isomorphe à $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Démonstration. La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée. En effet : $\forall n, p \geq 0$,

$$\langle e_n, e_p \rangle = \frac{1}{T} \int_a^b e_n(t) \overline{e_p(t)} dt = \frac{1}{T} \int_a^b e^{i(n-p)\omega t} dt.$$

Si $p = n$, alors

$$\|e_n\|^2 = \frac{1}{T} \int_a^b dt = 1.$$

Si $p \neq n$, alors : $\omega b = \omega a + 2\pi \Rightarrow$

$$\langle e_n, e_p \rangle = \frac{1}{T} \frac{e^{i(n-p)\omega b} - e^{i(n-p)\omega a}}{(n-p)\omega} = 0$$

Il reste à montrer que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est totale. Soit $f \in L^2([a, b], \mathbb{C})$ et soit $\varepsilon > 0$. Par convolution, on construit $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ t.q. $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$ et $g(a) = g(b) = 0$. On peut prolonger g par périodicité à $\mathbb{R}$ en une fonction T -périodique $g \in \mathcal{C}_{T, \text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. D'après le Théorème de Stone-Weierstrass, l'ensemble des polynômes trigonométriques $\mathcal{P} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathcal{C}_{T, \text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit $P \in \mathcal{P}$ t.q. $\|g - P\|_{\infty} \leq \varepsilon$. On en déduit :

$$\|f - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_{\infty} \leq 2\varepsilon.$$

Il en résulte que $\overline{\text{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}} = L^2([a, b], \mathbb{C})$. $\square$

1.5 Le Théorème de représentation de Riesz

Corollaire 1.5.1. *Soit E un espace de Hilbert et soit $F \subset E$ un sev fermé. Alors : $\forall x \in E$, il existe $a \in F$ unique t.q. $\|x - a\| = d(x, F)$. L'application $p_F : E \rightarrow F$, $x \mapsto a$ ainsi définie est caractérisée par :*

$$p_F(x) \in F \quad \text{et} \quad x - p_F(x) \in F^\perp$$

Remarque 3. Le Corollaire 1.5.1 montre que p_F est la projection orthogonale sur F . On en déduit que p_F est une application linéaire de E sur F t.q. $\|p_F\| = 1$ et $F^\perp = \text{Ker } p_F$.

Proposition 1.5.2 (Théorème de représentation de Riesz). *Soit E un espace de Hilbert. L'application $\Phi : E \rightarrow E'$, $x \mapsto \{\phi_x : y \mapsto \langle y, x \rangle\}$ est une isométrie antilinéaire et une bijection de E sur E' .*

Démonstration. On remarque que $x \mapsto \{\phi_x : y \mapsto \langle y, x \rangle\}$ est une isométrie de E dans E' . Il reste à vérifier qu'elle est surjective. Soit $F = \text{Ker}(f)$. Par continuité de f , F est fermé et donc $E = F \oplus F^\perp$ avec $F^\perp \sim E/F$.

Rappel : Par définition de la relation d'équivalence associée à E/F ,

$$x \sim y \iff p_F(x) - p_F(y) = x - y \iff x - p_F(x) = y - p_F(y)$$

ce qui permet de définir l'application :

$$E/F \rightarrow F^\perp, \quad x + F \mapsto x - p_F(x).$$

D'après le théorème d'isomorphisme, on a : $E/F \sim \text{Im}(f) = \mathbb{C}$, i.e. $F^\perp \sim \mathbb{C}$. Donc $F^\perp = \mathbb{C}u$ avec $u \in F^\perp \setminus \{0\}$ choisi t.q. $\|u\| = 1$. Soit alors $x \in E$. De la décomposition :

$$x = \langle x, u \rangle u + p_F(x)$$

on déduit que $f(x) = \langle x, u \rangle f(u)$, i.e., $f = \phi_{f(u)u}$ avec $f(u) \neq 0$ par construction de u . □

Corollaire 1.5.3. *Soit H un espace de Hilbert. L'application $\Phi : H \rightarrow H'$, $y \mapsto \phi_y$ t.q. $\phi_y(x) = \langle x, y \rangle$, $\forall x \in H$, est une isométrie bijective antilinéaire de H sur H' . En particulier si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors Φ est un isomorphisme isométrique de H sur H' .*

Corollaire 1.5.4. *Tout espace de Hilbert est réflexif, i.e. peut être identifié à son bidual H'' au moyen de l'injection canonique :*

$$J : H \rightarrow H'', \quad x \mapsto \{\text{eval}_x : H' \rightarrow H'', \quad f \mapsto f(x)\}.$$

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert et soit $\Phi : H \rightarrow H'$ l'isométrie antilinéaire bijective entre H et H' . Comme Φ est une isométrie, on définit un produit scalaire sur H' en posant

$$\forall f, g \in H', \quad \langle f, g \rangle_{H'} = \langle \Phi^{-1}(g), \Phi^{-1}(f) \rangle_H = \overline{\langle \Phi^{-1}(f), \Phi^{-1}(g) \rangle_H}.$$

Alors, $(f_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans H' ssi $(\Phi^{-1}(f_n))_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans H , i.e. convergente dans H . Par isométrie, $(f_n)_{n \geq 0}$ est convergente dans H' . On en

déduit que H' est un espace de Hilbert, donc il existe une isométrie antilinéaire bijective $\Psi : H' \rightarrow H''$. Alors, $\Psi \circ \Phi$ est un isomorphisme de H sur H'' . De plus : $\Psi \circ \Phi = \text{eval}_x, \forall x \in H$. En effet, soit $f \in H'$ et soit $x \in H$. Par définition, de Ψ et Φ :

$$\begin{aligned} \text{eval}_x(f) &= f(x) = \langle x, \Phi^{-1}(f) \rangle_H \\ &= \langle f, \Psi^{-1}(\text{eval}_x) \rangle_{H'} = \langle \Phi^{-1} \circ \Psi^{-1}(\text{eval}_x), \Phi^{-1}(f) \rangle_H. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $f \in H'$ et Φ étant une bijection de $H \rightarrow H'$, on en déduit que :

$$\underbrace{\Phi^{-1} \circ \Psi^{-1}}_{=(\Psi \circ \Phi)^{-1}}(\text{eval}_x) = x$$

i.e. :

$$\Psi \circ \Phi(x) = \text{eval}_x,$$

i.e. H est réflexif. □

Adjoint d'un opérateur

Proposition 1.5.5. *Soit H, K deux espaces de Hilbert et soit $A \in \mathcal{L}(H, K)$ une application linéaire continue. Il existe une unique application linéaire continue $A^* \in \mathcal{L}(K, H)$ appelée adjointe de A t.q. :*

$$\forall x \in H, \quad \forall y \in K, \quad \langle Ax, y \rangle_K = \langle x, A^*y \rangle_H.$$

De plus $\|A^*\| = \|A\|$ et $A^{**} = A$.

Démonstration. Soit $y \in K$. L'application $\phi_y \circ A : H \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \langle Ax, y \rangle$ est linéaire continue comme composée d'applications linéaires continues, et on a $\phi_y \circ A \in H'$ avec

$$\|\phi_y \circ A\| \leq \|\phi_y\| \|A\| = \|y\|_K \|A\|.$$

On en déduit qu'il existe $A^*y \in H$ unique t.q. $\phi_{A^*y} = \phi_y \circ A$. On remarque que, par antilinéarité de $y \mapsto \phi_y : \forall y \in K, \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\phi_{A^*(\lambda y)} = \phi_{\lambda y} \circ A = \bar{\lambda} \phi_y \circ A = \bar{\lambda} \phi_{A^*y} = \phi_{\lambda A^*y}$$

i.e., par définition de $A^* : A^*(\lambda y) = \lambda A^*y$. Donc A^* est linéaire. De plus : $\forall y \in K$,

$$\|\phi_{A^*y}\| = \|A^*y\| = \|\phi_y \circ A\| \leq \|y\|_K \|A\|$$

donc A^* est continue de norme $\|A^*\| \leq \|A\|$. On remarque que : $\forall x \in H, \forall y \in K$,

$$\phi_{A^*y}(x) = \overline{\phi_{Ax}(y)} \Rightarrow |\phi_{Ax}(y)| \leq \|\phi_{A^*y}\| \|x\| \leq \|A^*\| \|y\| \|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A^*\| \|x\|$$

i.e. $\|A\| \leq \|A^*\|$. Finalement : $\|A\| = \|A^*\|$. □

1.6 Applications

1.6.1 Séries de Fourier

Soit $T > 0$. Une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite périodique de période T si : $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On se ramène à $\tilde{f} : \mathbb{T} = \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ au moyen de la relation d'équivalence $x \sim y \iff x - y \in T\mathbb{Z}$. Soit $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ la projection canonique. $\tilde{f}$ est l'unique application $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ t.q. $f = \tilde{f} \circ \pi$. D'après les propriétés de la topologie quotient sur $\mathbb{T}$, f est continue ssi $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. On établit ainsi une bijection $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}_{T,\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soit $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité. L'application $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{i\omega t}$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ continue et surjective. L'application induite $\tilde{\phi} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}^1, \bar{t} \mapsto e^{i\omega t}$ est continue et bijective donc induit un homéomorphisme de $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}^1$ car, $\mathbb{T}$ étant compact, tout fermé de $\mathbb{T}$ est un compact donc est transformé en un compact de $\mathbb{S}^1$ par $\tilde{\phi}$ continue, i.e. en un fermé de $\mathbb{S}^1$ car $\mathbb{S}^1$ est séparé.

Il en résulte que pour toute application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et T -périodique l'application $f^\# := \tilde{f} \circ \tilde{\phi}^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ est l'unique application continue $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = f^\#(e^{i\omega t})$.

Polynômes trigonométriques

Soit $T > 0$ et soit $n \in \mathbb{Z}$. On considère l'application T -périodique $e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{i\omega n t}$ où $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

On appelle polynôme trigonométrique toute application de la forme $t \mapsto P(e^{i\omega t})$ où $P(X) \in \mathbb{C}[X]$. Pour tout $n \geq 0$, on note $\mathcal{P}_n = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_k, k \in [-n, n]\}$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré $\leq n$ et $\mathcal{P} = \cup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$ l'ev des polynômes trigonométriques.

Définition 1.6.1 (Coefficients de Fourier). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. On définit les coefficients de Fourier de f en posant :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt.$$

La suite $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est appelée la suite des coefficients de Fourier de f . On appelle série de Fourier de f la série de terme général $\hat{f}(n)e_n, n \in \mathbb{Z}$, de somme $Sf = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n$, dont la suite des sommes partielles $(S_N f)_{N \geq 0}$ est définie par : $S_N f = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n)e_n$. La série de Fourier de f est dite convergente si la suite des sommes partielles $(S_N f)_{N \geq 0}$ converge.

Remarque 4. Si f est paire, alors $\hat{f}(-n) = \hat{f}(n), \forall n \in \mathbb{Z}$ et la somme de la série de Fourier de f est, au moins formellement, de la forme :

$$x \mapsto Sf(x) = \hat{f}(0) + 2 \sum_{n \geq 1} \hat{f}(n) \cos(n\omega x),$$

Si f est impaire, alors $\hat{f}(-n) = -\hat{f}(n), \forall n \in \mathbb{Z}$ et la somme de la série de Fourier de f est, au moins formellement, de la forme :

$$x \mapsto Sf(x) = 2i \sum_{n \geq 1} \hat{f}(n) \sin(n\omega x),$$

Proposition 1.6.1. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{T})$, les coefficients de Fourier de f sont bien définis et on a :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_p.$$

Démonstration. Soit q le coefficient conjugué de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. L'inégalité de Hölder entraîne :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |\hat{f}(n)| \leq \|e_{-n}\|_q \|f\|_p = \|f\|_p$$

□

1.6.2 Série de Fourier d'une fonction de $L^2([a, b], \mathbb{C})$

Soit $a < b$. On pose $T = b - a$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On munit $L^2([a, b], \mathbb{C})$ du produit scalaire :

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{in\omega t}$.

Proposition 1.6.2. *La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([a, b], \mathbb{C})$.*

Démonstration. La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée. En effet : $\forall n, p \in \mathbb{Z}$,

$$\langle e_n, e_p \rangle = \frac{1}{T} \int_a^b e^{i(n-p)\omega t} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p, \\ \frac{e^{i(n-p)\omega b} - e^{i(n-p)\omega a}}{i(n-p)T\omega} & \text{si } n \neq p, \end{cases} = 0$$

Il reste à montrer qu'elle est totale. Soit $f \in L^2([a, b], \mathbb{C})$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de densité, il existe $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ t.q. $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$. On peut supposer qu'à modifier g au voisinage de a et b , on peut supposer que $g(a) = g(b) = 0$ et prolonger g par périodicité à $\mathbb{R}$ en une fonction continue T -périodique sur $\mathbb{R}$, soit $g \in \mathcal{C}_{T, \text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. D'après le Théorème de Stone-Weierstrass, $\text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathcal{C}_{T, \text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit P un polynôme trigonométrique t.q. $\|g - P\|_\infty \leq \varepsilon$. On a

$$\|f - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

Donc $\text{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $L^2([a, b], \mathbb{C})$. □

Théorème 1.6.3. *L'application $\Phi : L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est un isomorphisme isométrique. En particulier, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et T -périodique t.q. $\int_0^T |f(t)|^2 dt < +\infty$, alors :*

(i)

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e_n - f \right\|_2 = 0$$

(ii)

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \quad (\text{égalité de Parseval})$$

(iii)

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C}), \quad \langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$$

Remarque 5. Ce résultat ne permet pas de conclure sur la convergence simple de la série de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. On a le Théorème suivant.

Théorème 1.6.4 (Carleson (1965)). *Si $f \in L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C})$, la série de Fourier de f converge p.p. dans $\mathbb{R}$ vers f .*

Autres conséquences de l'existence d'une base de Hilbert

Proposition 1.6.5. *Tout espace de Hilbert de dimension infinie admet un sev isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$.*

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne. Cette base étant infinie par hypothèse, on peut en extraire une suite ortonormée $(e_{i_n})_{n \geq 0}$. Alors $E = \text{Vect}\{e_{i_n}, n \geq 0\}$ est un sev isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$. $\square$

Corollaire 1.6.6. *Si un espace de Hilbert H admet une base de Hamel au plus dénombrable, alors il est de dimension finie.*

Démonstration. Si H est de dimension infinie, d'après la Proposition 1.6.5, il contient un sev isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$. Il suffit de montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ n'admet pas de base de Hamel dénombrable.

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On pose $x_\alpha = (1, \alpha, \dots, \alpha^n, \dots)$. On a

$$\|x_\alpha\|^2 = \sum_{n \geq 0} \alpha^{2n} = \frac{1}{1 - \alpha^2} < +\infty$$

donc $x_\alpha \in \ell^2(\mathbb{N})$. De plus : soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ et soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in]0, 1[$ des réels distincts t.q. $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_{\alpha_i} = 0$. Alors :

$$\forall n \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i^n = 0.$$

Le système linéaire formé des k premières équations s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-1} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_{k-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_{k-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = 0.$$

la matrice est de type Van der Monde, inversible car les α_i sont tous distincts par hypothèse, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ est l'unique solution. Par récurrence sur $k \geq 1$, on déduit que $\lambda_k = 0, \forall k \geq 1$, i.e. que la famille $(x_\alpha)_{\alpha \in]0, 1[}$ est libre. Comme toute base de Hamel de $\ell^2(\mathbb{N})$ contient la famille $(x_\alpha)_{\alpha \in]0, 1[}$, on en déduit que si H est de dimension infinie, alors les bases de Hamel de $\ell^2(\mathbb{N})$ ne sont pas dénombrables. $\square$

Bibliographie

- [1] Brezis, H. Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Masson, Paris, 1983.
- [2] Dixmier, J., Topologie Générale, P.U.F., Paris, 1981.
- [3] Aubin, J.P., Analyse Fonctionnelle Appliquée, tomes 1 et 2, P.U.F., Paris, 1987.