Complément sur la Leçon 241

Préparation Agrégation de Mathématiques
Université de Rennes 1
Isabelle Gruais

20 octobre 2020

Exercice

Montrer que $\forall x \in]0, 2\pi[$,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} = \int_0^1 \frac{\sin x}{(1 - 2t\cos x + t^2)} dt. \tag{1}$$

Démonstration. Soit $\eta \in]0, \pi[$ et soit $x \in]\eta, frm{-}e\pi - \eta[$. On pose :

$$\forall n \geq 1, \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx).$$

Alors :

$$\forall n \geq 1, \quad S_n(x) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right) = \sin\left(\frac{n-1}{2}x\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

donc

$$|S_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin\left(\frac{x}{2}\right)|} \underset{\eta\leq x\leq 2\pi-\eta}{\leq} \frac{1}{|\sin\left(\frac{\eta}{2}\right)|} =: M_\eta$$

Du Théorème d'Abel, on déduit que la série (1) converge uniformément sur $]\eta, 2\pi - \eta[$, $\forall \eta \in]0, \pi[$.

Soit $x \in]0, 2\pi[$. On a :

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{(1 - 2t\cos x + t^2)} dt = \frac{1}{2i} \int_0^1 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{(e^{-ix} - t)(e^{ix} - t)} dt =$$

$$= \frac{e^{ix}}{2i} \int_0^1 \frac{dt}{1 - te^{ix}} - \frac{e^{-ix}}{2i} \int_0^1 \frac{dt}{1 - te^{-ix}}$$

avec

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \frac{1}{1 - te^{ix}} = \sum_{n \geq 0} t^n e^{inx}$$

la convergence étant uniforme sur $[0, a]$, $\forall a \in]0, 1[$. On en déduit :

$$\forall a \in]0, 1[, \quad \int_0^a \frac{\sin x}{(1 - 2t \cos x + t^2)} dt = \sum_{n \geq 1} \sin(nx) \frac{a^n}{n}.$$

Soit $a \in]0, 1[$ et soit $N \geq 1$. On a

$$\left| \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} - \int_0^1 \frac{\sin x}{(1 - 2t \cos x + t^2)} dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} (1 - a^n) \right| + \left| \sum_{n \geq N} \frac{\sin(nx)}{n} (1 - a^n) \right| +$$

$$+ \left| \int_a^1 \frac{\sin x}{(1 - 2t \cos x + t^2)} dt \right|.$$

On a

$$\forall t \in [a, 1], \quad 1 - 2t \cos x + t^2 \geq 1 + 2t + t^2 = (1 + t)^2 \geq (1 + a)^2 \Rightarrow$$

$$\left| \int_a^1 \frac{\sin x}{(1 - 2t \cos x + t^2)} dt \right| \leq \int_a^1 \frac{dt}{(1 + a)^2} \leq \frac{(1 - a)}{4}.$$

On pose :

$$\forall n \geq 1, \quad R_n(x) = \sum_{k \geq n} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Il existe $N_0 = N_0(x) > 0$ t.q. :

$$\forall n \geq N_0, \quad |R_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Soit $N \geq N_0$. Alors :

$$\left| \sum_{n \geq N} \frac{\sin(nx)}{n} (1 - a^n) \right| = \left| \sum_{n \geq N+1} R_n(x) a^{n-1} (1 - a) + R_N(x)(1 - a^N) \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{n \geq N+1} a^{n-1} (1 - a) + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Finalement : $\forall N \geq N_0$, $\forall a \in]0,1[$,

$$\left| \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} - \int_0^1 \frac{\sin x}{(1-2t\cos x+t^2)} dt \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n}(1-a^n) \right| + 2\varepsilon$$

donc :

$$\limsup_{a\to 1^-} \left| \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n} - \int_0^1 \frac{\sin x}{(1-2t\cos x+t^2)} dt \right| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai $\forall \varepsilon > 0$, on en déduit le résultat. $\square$