Complément sur la Leçon 265

Préparation Agrégation de Mathématiques
Université de Rennes 1
Isabelle Gruais

20 octobre 2020

Fonction ζ :

Equation fonctionnelle

Soit
$$\Omega = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 1\}$$
On a :
$$\forall z \in \Omega, \quad \zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

Démonstration. Les deux membres de l'égalité sont bien définis sur Ω.

Soit $z \in \Omega$ et soit $x = \mathrm{Re}(z)$. On a :
$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \right| dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt.$$
On a : $\forall n \geq 1$,
$$\frac{1}{n^x}\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{n^x} e^{-t} dt \underset{t=ns}{=} \int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-ns} ds$$

Soit $N > 0$ On a : $\forall z \in \Omega$,
$$\sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-ns} ds = \int_0^{+\infty} s^{z-1} \frac{(1 - e^{-Ns})}{e^s - 1} ds$$

avec : $\forall s > 0$

$$\lim_{N \to +\infty} s^{z-1} \frac{1 - e^{-Ns}}{e^s - 1} = \frac{s^{z-1}}{e^s - 1}$$

et

$$\left| s^{z-1} \frac{1 - e^{-Ns}}{e^s - 1} \right| \leq \frac{s^{x-1}}{e^s - 1}$$

et $s \mapsto \frac{s^{x-1}}{e^s - 1} \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Du Théorème de convergence dominée on déduit que

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} s^{z-1} \frac{(1 - e^{-Ns})}{e^s - 1} ds = \int_0^{+\infty} \frac{s^{z-1}}{e^s - 1} ds$$

Il en résulte :

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-ns} ds = \int_0^{+\infty} \frac{s^{z-1}}{e^s - 1} ds.$$

□

Remarque 1. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $R > \varepsilon$. On a :

$$\forall s \in [\varepsilon, R], \quad \forall n \geq 0, \quad e^{-nR} \leq e^{-ns} \leq e^{-n\varepsilon}$$

avec $\forall a > 0$,

$$\sum_{n \geq 1} e^{-na} = \frac{1}{e^a - 1} < +\infty$$

donc la série de fonctions $s \mapsto \sum_{n \geq 1} e^{-ns}$ converge uniformément sur le compact $[\varepsilon, R]$. On en déduit : $\forall z \in \Omega$,

$$\sum_{n \geq 1} \int_\varepsilon^R s^{z-1} e^{-ns} ds = \int_\varepsilon^R \sum_{n \geq 1} s^{z-1} e^{-ns} ds = \int_\varepsilon^R \frac{s^{z-1}}{e^s - 1} ds$$

Alors :

$$\left| \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} s^{z-1} e^{-ns} ds - \int_0^{+\infty} \frac{s^{z-1}}{e^s - 1} ds \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n \geq 1} \int_0^\varepsilon s^{x-1} e^{-ns} ds + \sum_{n \geq 1} \int_R^{+\infty} s^{x-1} e^{-ns} ds + \int_0^\varepsilon \frac{s^{x-1}}{e^s - 1} ds + \int_R^{+\infty} s^{x-1} e^{-ns} ds =$$

$$= 2 \int_0^\varepsilon \frac{s^{x-1}}{e^s - 1} ds + 2 \int_R^{+\infty} s^{x-1} e^{-ns} ds < +\infty$$

avec

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\varepsilon \frac{s^{x-1}}{e^s - 1} ds = \lim_{R \to +\infty} \int_R^{+\infty} s^{x-1} e^{-ns} ds = 0$$