Préparation Agrégation de Mathématiques
Année 2020–2021

Leçon 266

Exercice 1

Soit X une va t.q. $\mathbb{E}(X_+) = +\infty$ et $\mathbb{E}(X_-) < +\infty$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va iid de même loi que X. On pose

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

1. *Montrer que*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k)_- \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \mathbb{E}(X_-)$$

Par définition $X = X_+ - X_-$, donc $X_- \geq 0$ p.s. De plus $\mathbb{E}(X_-) < +\infty$, donc d'après la Loi forte des grands nombres appliquée à la suite de va iid $((X_n)_-)_{n\geq 1}$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k)_- \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \mathbb{E}(X_-)$$

2. *On suppose que $X_n \geq 0$ p.s., $\forall n \geq 1$.*

(a) *Montrer que*

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(\min(X,n)) = \mathbb{E}(X) = +\infty.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \geq 0$. Si $\min(x, n+1) = x$ alors $\min(x,n) \leq x = \min(x, n+1)$. Si $\min(x, n+1) = n+1$ alors $n+1 \leq x \Rightarrow n < n+1 \leq x$, i.e. $\min(x,n) \leq n < \min(x, n+1)$. Dans tous les cas: $\min(x,n) \leq \min(x,n+1)$, $\forall n \geq 0$. On en déduit que $\min(X,n) \leq \min(X,n+1) \leq X$ p.s. Comme de plus $\min(X,n) \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\to}} X$, on déduit du théorème de convergence monotone que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(\min(X,n)) = \mathbb{E}(X) = +\infty.$$

(b) *Montrer que:*

$$\forall p \in N, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \min(X_k, p) \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \mathbb{E}(\min(X,p)).$$

On applique la Loi forte des grands nombres à la suite de va iid $(\min(X_n, p))_{n\geq 1})$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \min(X_k, p) \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \mathbb{E}(\min(X,p)).$$

(c) *Soit $A > 0$. Montrer que*

$$\liminf_{n\to+\infty} S_n \geq A \quad p.s. \quad .$$

Soit $p \geq 0$. De ce qui précède on déduit que p.s.:

$$\liminf_{n\to+\infty} S_n \geq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \min(X_k, p) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \min(X_k, p) = \mathbb{E}(\min(X,p))$$

De (a), on déduit qu'il existe $n_0 > 0$ t.q. :$\forall n \geq n_0$, $\mathbb{E}(X) > A$.
Soit $p \geq n_0$. Alors: p.s.,

$$\liminf_{n\to+\infty} S_n \geq \mathbb{E}(\min(X,p)) > A.$$

(d) *En déduire que p.s.:*

$$\forall A \in \mathbb{N}, \quad \liminf_{n\to+\infty} S_n \geq A$$

Soit $B = \cap_{A\in\mathbb{N}}(\liminf_{n\to+\infty} S_n \geq A)$: On a:

$$\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(\cup_{A\in\mathbb{N}}(\liminf_{n\to+\infty} S_n \geq A)^c) \leq \sum_{A\in\mathbb{N}} \mathbb{P}((\liminf_{n\to+\infty} S_n \geq A)^c) \underset{(c)}{=} 0$$

donc $\mathbb{P}(B) = 1$, i.e. p.s.:

$$\forall A \in \mathbb{N}, \quad \liminf_{n\to+\infty} S_n \geq A$$

3. *Montrer que*

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\to}} +\infty.$$

De 2.(d), on déduit que p.s.

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k)_+ = +\infty$$

i.e.

$$S_n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k)_- = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k)_+ \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\to}} +\infty.$$

De 1., on déduit que

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\to}} +\infty.$$

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de va iid suivant la loi de Poisson de paramètre* 1.

1. *Montrer que*
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \frac{1}{2}.$$

   On a $\mathbb{E}(X_1) = 1$ et $\mathbb{V}(X_1) = 1$. D'après le TCL:
$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \mathcal{N}(0,1)$$

   Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ On en déduit:
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \mathbb{P}(Z \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

2. *Appliquer le TCL pour trouver la limite de la suite de terme général:*
$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

   D'après la théorie, $Y_n := \sum_{k=1}^n X_k \sim \mathcal{P}(n)$. On en déduit: $\forall n \geq 1$,
$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \mathbb{P}(Y_n \leq n) = \mathbb{P}(Y_n \in \{0, 1, \cdots, n\})$$
$$= \mathbb{P}(\cup_{k=0}^n (Y_n = k)) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y_n = k) = e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$

   Il en résulte:
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

1. *Montrer que*
$$\frac{1}{\ln n}\max_{1\leq k\leq n} X_k \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} \frac{1}{\lambda}$$

On pose:
$$\forall n\geq 1,\quad Y_n = \frac{1}{\ln n}\max_{1\leq k\leq n} X_k.$$
Soit $\varepsilon > 0$. On a:
$$\mathbb{P}\left(\left|Y_n - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(Y_n > \frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(Y_n < \frac{1}{\lambda}-\varepsilon\right)$$
avec
$$\mathbb{P}\left(Y_n > \frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\cup_{k=1}^n\left(X_k > \left(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right)\ln\right)\right)$$
$$\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\left(X_k > \left(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right)\ln\right)\sum_{k=1}^n\int_{\left(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right)\ln}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx = \sum_{k=1}^n\frac{1}{n^{1+\lambda\varepsilon}}$$
$$= \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(Y_n > \frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right) = 0.$$
De plus:
$$\mathbb{P}\left(Y_n < \frac{1}{\lambda}-\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\cap_{k=1}^n\left(X_k < \left(\frac{1}{\lambda}-\varepsilon\right)\ln n\right)\right)$$
$$= \Pi_{k=1}^n\mathbb{P}\left(\left(X_k < \left(\frac{1}{\lambda}-\varepsilon\right)\ln n\right)\right)$$
$$= \left(\int_0^{\left(\frac{1}{\lambda}-\varepsilon\right)\ln n}\lambda e^{-\lambda x}dx\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^{1-\lambda\varepsilon}}\right)^n = e^{-n^{\lambda\varepsilon}+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(Y_n < \frac{1}{\lambda}-\varepsilon\right) = 0.$$

Finalement:
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|Y_n - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

2. *Montrer que la suite de terme général*

$$\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda}$$

converge en loi vers une limite à déterminer.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a:

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \leq \frac{\ln n}{\lambda} + t\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\cap_{1\leq k\leq n}\left(X_k \leq \frac{\ln n}{\lambda} + t\right)\right)$$

$$= \Pi_{1\leq k\leq n}\mathbb{P}\left(X_k \leq \frac{\ln n}{\lambda} + t\right)$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\ln n}{\lambda}+t} \lambda e^{-\lambda x} x dx\right)^n = \left(1 - \frac{e^{-\lambda t}}{n}\right)^n$$

donc
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda} \leq t\right) = e^{-e^{-\lambda t}}.$$

i.e.
$$\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} Z$$

avec $\mathbb{P}(Z \leq t) = e^{-e^{-\lambda t}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.