Chapitre 3

Equation de la Chaleur

3.1 Modélisation

L'équation de conservation de la tempéature d'un volume V constitué par un matériau soumis à des forces de déformation réparties de densité f :

$$\frac{d}{dt}\int_V T(x,t)d\Omega_x = -\int_{\partial V} \vec{\nabla} T \cdot \overrightarrow{dS} + \int_V f d\Omega_x$$

avec, d'après la formule de Stokes :

$$\int_{\partial V} \underbrace{\vec{\nabla} T \cdot \overrightarrow{dS}}_{:=\omega} = \int_V d\omega = \int_V \mathrm{div}(\vec{\nabla} V) d\Omega_x.$$

On suppose de plus que l'application $(x,t) \mapsto T(x,t)$ est suffisamment régulière pour écrire :

$$\frac{d}{dt}\int_V T(x,t)d\Omega_x = \int_V \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) d\Omega_x.$$

On en déduit, le volume V étant arbitraire :

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = -\underbrace{\mathrm{div}(\vec{\nabla} T)}_{=\Delta T} + f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n$$

i.e., par définition de l'opérateur Δ :

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = -\Delta T + f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n$$

3.2 Existence et unicité

Dans la suite, on considère le problème lorsque $n = 1$ car c'est la discrétisation en temps qui nous intéresse ici. Plus précisément, soit $T > 0$. On considère le problème avec conditions aux limites :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans} \quad]0, L[\times]0, +\infty[=: Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans} \quad]0, L[\\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{dans} \quad]0, +\infty[\end{cases} \tag{3.1}$$

Théorème 3.2.1 (Existence et unicité)**.** *Soit $u_0 \in \mathcal{C}(]0, L[, \mathbb{R})$. Alors, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2(]0, L[\times]0, +\infty[, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([0, L] \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$ solution de (3.1).*

Remarque 11. Si u est solution de (3.1) et si $u_0 \in \mathcal{C}(]0, L[, \mathbb{R})$, on a même $u \in \mathcal{C}^\infty(]0, L[\times]0, T[)$. C'est l'effet régularisant de l'équation de la chaleur.

Proposition 3.2.2 (Principe du maximum)**.** *Sous les hypothèses du Théorème 3.2.1, la solution u du problème (3.1) vérifie*

1. *Si $u_0(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, L]$, alors $u(x,t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$, $\forall x \in]0, L[$.*
2. *$\|u\|_{L^\infty(]0,L[\times]0,+\infty[} \leq \|u_0\|_{L^\infty(]0,L[)}$.*

Résolution analytique par les séries de Fourier

Proposition 3.2.3. *On suppose que $u_0 \in \mathcal{C}^1([0, L], \mathbb{R})$ et que $u_0(0) = u_0(L) = 0$. Alors la solution du problème (3.1) se développe en série de Fourier sous la forme :*

$$u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u_0) e^{-(n\pi)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.2}$$

où $(c_n(u_0))_{n \in \mathbb{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier de u_0.

Démonstration. On commence par chercher u sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$ où X et T sont de classe $\mathcal{C}^2$, en accord avec le Thérème 3.2.1. Après report dans (3.1), on obtient :

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si $\lambda = \omega^2 > 0$ avec $\omega > 0$, alors

$$X(x) = ae^{\omega x} + be^{\omega x}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

avec : $X(0) = X(L) = 0$, ce qui entraîne. que (a, b) est slution du système :

$$\begin{cases} a + b & = \quad 0, \\ ae^{\omega L} + be^{-\omega L} = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $a = b = 0$, en contradiction avec $u \not\equiv 0$. Donc $\lambda = -\omega^2 < 0$ et on a :

$$X(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$$

avec : $X(0) = 0 \Rightarrow a = 0$. Il reste : $X(L) = b\sin(\omega L) = 0$ et donc $\omega \in \frac{\pi}{L}\mathbb{Z}$. On obtient dons la suite de solutions $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définies par :

$$u_n(x,t) = e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \forall (x,t) \in Q.$$

Il reste à vérifier la condition au bord en $t = 0$, ce qu'on cherche a priori pour $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n u_n$. Formellement, on trouve que :

$$u(x,0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(x;0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = u_0(x).$$

Le problème admet une solution ssi u_0 coïncide avec sa série de Fourier et si cette dernière est impaire. Comme $u_0(0) = 0$, on prolonge u_0 en une fonction impaire de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-L, L]$. La condition $u_0(L) = 0$ permet de prolonger u_0 par périodicité à $\mathbb{R}$ en une fonction périodique de période $2L > 0$, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On en déduit que la série de Fourier de u_0 est absolument convergente sur $\mathbb{R}$ vers u_0 et que la série des coefficients est dans ℓ^1. Il reste à vérifier qu'on peut dériver sous le signe somme dans $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n u_n$ lorsque $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1$. Soit $T > 0$. On a :

$$|b_n u_n(x,t)| \leq e^{-(\frac{n\pi}{L^2})^2 t} \leq |b_n| e^{-(\frac{n\pi}{L^2})^2 T} \leq Ce^{-(\frac{n\pi}{L^2})^2 T}, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$$

et la série majorante est convergente. On e déduit que la série de fonctions continues $\sum b_n u_n$ est uniformément convergente sur tout compact de $[0, L] \times \mathbb{R}^+$ donc de somme continue sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+$. On a aussi : $\forall k, \ell > 0$,

$$\left|\frac{\partial^{k+\ell}}{\partial t^k \partial x^\ell} u_n(x,t)\right| \leq C\left(\frac{n\pi}{L}\right)^{2k+\ell} e^{-(\frac{n\pi}{L^2})^2 T}, \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$$

où la série majorante est convergente. On en déduit que la série des dérivées partielles $\sum \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial t^k \partial x^\ell} u_n$ est uniformément convergente sur tout compact de $[0, L] \times \mathbb{R}^+$, donc que la somme de la série $\sum b_n u_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, L] \times \mathbb{R}^+$. On conclut par unicité de la série de Fourier de u_0. $\square$

Proposition 3.2.4. *Si $u_0 \in \mathcal{C}^1([0, L], \mathbb{R})$, alors (3.2) est l'unique solution de (3.1).*

Démonstration. C'est une conséquene du principe du maximum. $\square$

3.3 Approximation numérique

Le Schéma d'Euler explicite

Soit $L, T > 0$. On considère les subdivisions :

$$x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_I < x_{I+1} = L, \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1} = T.$$

Pour simplifier les notations, on suppose que les subdivisions sont régulières de pas $\Delta x > 0$, $\Delta > 0$. Soit $(u_i^n)_{0\leq i\leq I+1, 0\leq n\leq N+1}$ la suite solution du schéma :

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{1}{\Delta x^2}(-u_{i-1}^n + 2u_i^n - u_{i-1}^n) = f(x_i), & i = 1, \cdots, I, \\ & n = 1, \cdots N, \\ \\ u_i^0 = u_0(x_i) & i = 1, \cdots I, \\ u_0^n = u_{I+1}^n = 0 & n = 1, \cdots, N \end{cases} \tag{3.3}$$

Définition 3.3.1 (Consistance)**.** On définit l'erruer de consistance au point (x_i, t_n), par :

$$\varepsilon_i^n = \frac{1}{\Delta t}(u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n) + \frac{1}{\Delta x^2}(-u(x_{i-1}, t_n) + 2u(x_i, t_n) - u(x_{i+1}, t_n)) - f(x_i).$$

Le schéma est dit consistant si

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x)\to(0,0)} \max_{1\leq i\leq I, 1\leq n\leq N} |\varepsilon_i^n| = 0.$$

Proposition 3.3.1. *On pose :*

$$\|\varepsilon^n\|_\infty = \max_{1\leq i\leq I} |\varepsilon n_i|, \quad \forall n \geq 0.$$

Si $u \in \mathcal{C}^4(]0, L[\times]0, T[)$, *alors*

$$\sup_{1\leq n\geq N} \|\varepsilon^n\|_\infty \leq C\|u^{(4)}\|_\infty(\Delta t + \Delta x^2)$$

Démonstration. On pose :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\Delta t}(u(x, t+\Delta t) - u(x, t) + \frac{1}{\Delta x^2}(-u(x-\Delta x, t) + 2u(x, t) - u(x+\Delta x, t)) - f(x).$$

La formule de Taylor donne :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}u(x, t) - \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}u(x, t) + o(\Delta t) + o((\Delta x)^2)$$

$\square$

Définition 3.3.2 (Convergence)**.** On définit l'erreur de convergence par :

$$e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n, \quad i = 1, \cdots, I, \quad n = 1, \cdots, N.$$

et on pose :

$$\|e^n\|_\infty = \max_{i=1,\cdots,I} \|e_i^n|, \quad n = 1, \cdots, N.$$

Le schéma est dit convergent si

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \to (0,0)} \|e^n\|_\infty = 0.$$

Proposition 3.3.2. *On suppose que* $u \in \mathcal{C}^4([0, L] \times [0, T])$ *et que*

$$0 < \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}. \tag{3.4}$$

Alors :

$$\max_{1 \le n \le N} \|e^n\|_\infty \le CT\|u^{(4)}\|_\infty (\Delta t + (\Delta x)^2).$$

Démonstration. Soit (μ_i^n) une suite de réels et soit (z_i^n) la suite définie par le schéma :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}(z_i^{n+1} - z_i^n) + \dfrac{1}{\Delta x^2}(-z_{i-1}^n + 2z_i^n - z_{i-1}^n) = \mu_i^n, & i = 1, \cdots, I, \quad n = 1, \cdots N, \\ \\ z_i^0 \in \mathbb{R} & i = 1, \cdots I, \\ z_0^n = z_{I+1}^n = 0 & n = 1, \cdots, N \end{cases} \tag{3.5}$$

Alors :

$$z_i^{n+1} = \left(1 - 2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) z_i^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(z_{i-1}^n + z_{i+1}^n\right) + \Delta t \mu_i^n, \quad n = 1, \cdots, N, \quad i = 1, \cdots, I.$$

On en déduit, compte tenu de (3.4) :

$$\|z^{n+1}\|_\infty \le \|z^n\|_\infty + \Delta t\|\mu^n\|_\infty \le \|z^0\|_\infty + \Delta t \sum_{k=0}^{n} \|\mu^k\|_\infty$$

Si $\mu_i^n = f(x_i)$, $\forall n \in [[1, N]]$ et si $z_i^0 = u_0(x_i)$, $i = 1, \cdots, I$, alors $z_i^n = u_i^n$ et on en déduit :

$$\|u^{n+1}\|_\infty \le \|u^n\|_\infty + \Delta t\|f\|_\infty$$

i.e., le schéma est stable, donc convergent puisque consistant. Si $z_i^n = e_i^n$, alors $\mu_i^n = \varepsilon_i^n$ est l'erreur de consistance et $z_i^0 = 0 \Rightarrow$

$$\|e^n\|_\infty \le C\|u^{(4)}\|_\infty N\Delta t(\Delta t + (\Delta x)^2) \le C\|u^{(4)}\|_\infty T(\Delta t + (\Delta x)^2).$$

□

Définition 3.3.3 (Erreur d'arrondis)**.** On appelle erreur sur les arrondis au point (x_i, t_n) le terme z_i^n dans la suite définie par le schéma (3.5) lorsque $\mu_i^n = 0$.

Proposition 3.3.3. *Le schéma (3.3) est stable au sens des erreurs d'arrondi.*

Démonstration. Soit (z_i^n) la suite résultant du schéma (3.5) lorsque $\mu_i^n = 0$. On pose :

$$Z^{(n)} = \begin{pmatrix} z_1^n \\ \vdots \\ z_N^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

Le schéma (3.5) se réécrit sous forme matricielle :

$$Z^{n+1} = \underbrace{\left(I + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} A_N\right)}_{=:B_N} Z^n, \quad n \geq 0,$$

où $A_N \in \mathbb{R}^{N\times N}$ est la matrice (2.13). On en déduit :

$$Z^{(n)} = B_N^n Z^{(0)}, \quad \forall n \geq 0.$$

La matrice B_N étant symétrique réelle, on a :

$$\|B^{(n)}\|_2 = \rho(B_N^n) = \rho(B_N)^n.$$

D'après (2.17), les valeurs propres $\lambda_i^{(N)}$, $i = 1, \cdots, N$ de A_N vérifient :

$$0 < \lambda_1^{(N)} = 4\sin\left(\frac{\pi}{(N+1)}\right)^2 < \cdots < \lambda_N^{(N)} = 4\cos\left(\frac{\pi}{(N+1)}\right)^2 < 4$$

On en déduit :

$$-1 \underset{(3.4)}{<} 1 - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\lambda_N^{(N)} < \cdots < 1 - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\lambda_<^{(N)} 1$$

i.e. $\rho(B_N) < 1$ et donc le schéma est stable. □

Proposition 3.3.4 (Stabilité au sens de Von Neumann)**.** *Le schéma (3.3) est stable au sens de Von Neumann.*

Démonstration. Pour simplifier les notations, on pose $L = 1$. On suppose que la donnée initiale u_0 dans (3.1) co ïncifde avec son développement en série de Fourier, soit :

$$u_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad \forall x \in [0,1].$$

Alors, le schéma (3.3) est défini avec :

$$u_j^0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ijk\Delta x}, \quad j = 0, \cdots, N+1.$$

On en déduit : $\forall j \in [[1, N]]$,

$$u_j^1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \underbrace{\left(1 - 2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(\sin\left(\frac{k}{2}\Delta x\right)\right)^2\right)}_{=:\gamma_k} e^{ijk\Delta x}$$

puis, par récurrence sur $n \geq 0$,

$$u_j^n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \gamma_k^n e^{ijk\Delta x}, \quad n \geq 0,$$

avec :

$$1 > \gamma_k \underset{(3.4)}{>} 1 - \left(\sin\left(\frac{k}{2}\Delta x\right)\right)^2 > 0.$$

$\square$