

# Chapitre 3

## Equation de la Chaleur

### 3.1 Modélisation

Pour modéliser la diffusion de la chaleur par un dispositif quelconque enfermé dans un volume  $V$ , le critère choisi est celui de l'évolution de la température  $T(x, t)$  répartie dans le volume à l'instant  $t > 0$ . En admettant qu'en l'absence de forces extérieures, le seul phénomène à prendre en compte est le flux de chaleur au travers de la surface  $\partial V$  du volume généré par le gradient de température, on obtient l'équation de conservation :

$$\frac{d}{dt} \int_V T(x, t) d\Omega_x = \int_{\partial V} \vec{\nabla} T \cdot \vec{dS}$$

où le vecteur  $\vec{dS}$  est orienté dans le sens de la normale extérieure au volume  $V$ , en accord avec l'observation que la température du volume  $V$  augmente à mesure qu'il diffuse de la chaleur autour de lui, i.e. la température cumulée  $\int_V T(x, t) d\Omega_x$  augmente dès que  $\vec{\nabla} T \cdot \vec{dS} > 0$  dans  $V$ . D'après la formule de Stokes :

$$\int_{\partial V} \underbrace{\vec{\nabla} T \cdot \vec{dS}}_{:=\omega} = \int_V d\omega = \int_V \operatorname{div}(\vec{\nabla} T) d\Omega_x.$$

On suppose de plus que l'application  $(x, t) \mapsto T(x, t)$  est suffisamment régulière pour écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_V T(x, t) d\Omega_x = \int_V \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) d\Omega_x.$$

On en déduit, le volume  $V$  étant arbitraire :

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \underbrace{\operatorname{div}(\vec{\nabla} T)}_{=\Delta T} \quad \text{dans } \mathbb{R}^n$$

i.e., par définition de l'opérateur  $\Delta$  :

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x, t) = \Delta T \quad \text{dans } \mathbb{R}^n$$

### 3.2 Existence et unicité

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert de frontière  $\partial\Omega$  assez régulière, par exemple  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. Soit  $f : \Omega \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . On considère le problème : trouver  $u : \Omega \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times ]0, +\infty[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times ]0, +\infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

**Proposition 3.2.1.** *Si  $u_0 \in L^2(\Omega)$  et si  $f \in L^2(\Omega \times ]0, +\infty[)$ , le problème (3.1) admet une unique solution  $u \in L^2(]0, +\infty[, H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[, L^2(\Omega))$  telle que, de façon équivalente à (3.1) :*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)v dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f(t)v dx.$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$ . Par intégration par parties sur  $\Omega$ , on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)\varphi dx + \int_{\Omega} \nabla u(t) \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f(t)\varphi dx. \quad (3.2)$$

Par densité de  $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  et dans  $H_0^1(\Omega)$ , la formulation variationnelle (3.2) se généralise à  $\varphi = v \in H_0^1(\Omega)$ . On retrouve (3.1) à partir de (3.2) immédiatement par intégration par parties de (3.2). Le choix  $v = u(t)$  dans (3.2) conduit à, pour tout  $t > 0$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(s)|^2 dx ds &= \int_0^t \int_{\Omega} f(s)u(s) dx ds + \int_{\Omega} |u_0|^2 dx \\ \Rightarrow \sup_{t \in [0, +\infty[} \int_{\Omega} |u(t)|^2 dx + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dt &\leq \|f\|_2 \|u\|_2 + \int_{\Omega} |u_0|^2 dx \end{aligned}$$

i.e. :

$$\sup_{t \in [0, +\infty[} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega \times ]0, +\infty[)} < +\infty.$$

□

**Proposition 3.2.2.** *Si  $u_0 \in L^2(\Omega)$  et si  $f = 0$ , alors la solution  $u$  de (3.1) vérifie :*

$$u \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, L^2(\Omega))$$

et

$$u \in \mathcal{C}^\infty([\varepsilon, +\infty[ \times \bar{\Omega}), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

*Démonstration.* Brézis Théorème X.1. □

**Proposition 3.2.3** (Principe du maximum). *Si  $u_0 \in L^2(\Omega)$  et si  $f = 0$ , alors la solution  $u$  de (3.1) vérifie :*

$$\min(0, \inf_{\Omega} u_0) \leq u \leq \max(0, \sup_{\Omega} u_0).$$

1. *Si  $u_0 \geq 0$  p.p. dans  $\Omega$ , alors  $u \geq 0$  dans  $\Omega \times ]0, +\infty[$ .*
2. *Si  $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ , alors  $u \in L^\infty(\Omega \times ]0, +\infty[)$  et*

$$\|u\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty.$$

*Démonstration.* Dans le cas où  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , c'est une conséquence directe de l'expression de  $u$  obtenue explicitement. En supposant que  $u$  admet une transformée de Fourier à tout instant  $t > 0$ , soit

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} u(x, t) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0$$

ainsi que ses dérivées, on obtient l'équation avec condition initiale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0, \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

de solution :

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

On en déduit, par transformation de Fourier inverse :

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (3.3)$$

□

**Définition 3.2.1.** Pour tout  $t > 0$ , on appelle noyau de la chaleur l'application :

$$K_t : x \mapsto \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Dans la suite, on considère le problème lorsque  $n = 1$  car c'est la discrétisation en temps qui nous intéresse ici. Plus précisément, soit  $T > 0$ . On considère le problème avec conditions aux limites :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } ]0, L[ \times ]0, +\infty[ =: Q, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } ]0, L[ \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{dans } ]0, +\infty[ \end{cases} \quad (3.4)$$

**Théorème 3.2.4** (Existence et unicité). *Soit  $u_0 \in \mathcal{C}([0, L], \mathbb{R})$ . Alors, il existe une unique fonction  $u \in \mathcal{C}^2(]0, L[ \times ]0, +\infty[, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([0, L] \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$  solution de (3.4).*

*Remarque 12* (Effet régularisant de l'équation de la chaleur). Si  $u$  est solution de (3.4) et si  $u_0 \in \mathcal{C}([0, L], \mathbb{R})$ , alors  $u \in \mathcal{C}^\infty(]0, L[ \times ]0, T[)$ .

**Proposition 3.2.5** (Principe du maximum). *Sous les hypothèses du Théorème 3.2.4, la solution  $u$  du problème (3.4) vérifie*

1. Si  $u_0(x) \geq 0, \forall x \in [0, L]$ , alors  $u(x, t) \geq 0, \forall t \geq 0, \forall x \in ]0, L[$ .
2.  $\|u\|_{L^\infty(]0, L[ \times ]0, +\infty[} \leq \|u_0\|_{L^\infty([0, L])}$ .

## Résolution analytique par les séries de Fourier

**Proposition 3.2.6.** *On suppose que  $u_0 \in \mathcal{C}^1([0, L], \mathbb{R})$  et que  $u_0(0) = u_0(L) = 0$ . Alors la solution du problème (3.4) se développe en série de Fourier sous la forme :*

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n(u_0) e^{-(n\pi)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.5)$$

où  $(c_n(u_0))_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite des coefficients de Fourier de  $u_0$  définis par :

$$c_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \forall n \geq 0.$$

*Démonstration.* On commence par chercher  $u$  sous la forme  $u(x, t) = X(x)T(t)$  où  $X$  et  $T$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$ , en accord avec le Théorème 3.2.4. Après report dans (3.4), on obtient :

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si  $\lambda = \omega^2 > 0$  avec  $\omega > 0$ , alors

$$X(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

avec :  $X(0) = X(L) = 0$ , ce qui entraîne que  $(a, b)$  est solution du système :

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ ae^{\omega L} + be^{-\omega L} = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est  $a = b = 0$ , en contradiction avec  $u \neq 0$ . Donc  $\lambda = -\omega^2 < 0$  et on a :

$$X(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$$

avec :  $X(0) = 0 \Rightarrow a = 0$ . Il reste :  $X(L) = b \sin(\omega L) = 0$  et donc  $\omega \in \frac{\pi}{L}\mathbb{N}$ . On obtient donc la suite de solutions  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$u_n(x, t) = e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \forall (x, t) \in Q.$$

Il reste à vérifier la condition au bord en  $t = 0$ , ce qu'on cherche a priori pour  $u = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n u_n$ . Formellement, on trouve que :

$$u(x, 0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n u_n(x, 0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = u_0(x).$$

Le problème admet une solution ssi  $u_0$  coïncide avec sa série de Fourier et si cette dernière est impaire. Comme  $u_0(0) = 0$ , on prolonge  $u_0$  en une fonction impaire de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[-L, L]$ . La condition  $u_0(L) = 0$  permet de prolonger  $u_0$  par périodicité à  $\mathbb{R}$  en une fonction périodique de période  $2L > 0$ , continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. On en déduit que la série de Fourier de  $u_0$  est absolument convergente sur  $\mathbb{R}$  vers  $u_0$  et que la série des coefficients est dans  $\ell^1$ . Il reste à vérifier qu'on peut dériver sous le signe somme dans  $u = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n u_n$  lorsque  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ . Soit  $T > 0$ . On a :

$$|b_n u_n(x, t)| \leq |b_n| e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \leq |b_n| e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T} \leq C e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$$

et la série majorante est convergente. On en déduit que la série de fonctions continues  $\sum b_n u_n$  est uniformément convergente sur tout compact de  $[0, L] \times \mathbb{R}^+$  donc de somme continue sur  $[0, L] \times \mathbb{R}^+$ . On a aussi :  $\forall k, \ell > 0$ ,

$$\left| \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial t^k \partial x^\ell} u_n(x, t) \right| \leq C \left(\frac{n\pi}{L}\right)^{2k+\ell} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$$

où la série majorante est convergente. On en déduit que la série des dérivées partielles  $\sum \frac{\partial^{k+\ell}}{\partial t^k \partial x^\ell} u_n$  est uniformément convergente sur tout compact de  $[0, L] \times \mathbb{R}^+$ , donc que la somme de la série  $\sum b_n u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, L] \times \mathbb{R}^+$ . On conclut par unicité de la série de Fourier de  $u_0$ .  $\square$

**Proposition 3.2.7.** *Si  $u_0 \in \mathcal{C}^1([0, L], \mathbb{R})$ , alors (3.5) est l'unique solution de (3.4).*

*Démonstration.* C'est une conséquence du principe du maximum.  $\square$

### 3.3 Approximation numérique

#### Le Schéma d'Euler explicite

Soit  $L, T > 0$ . On considère les subdivisions :

$$x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_I < x_{I+1} = L, \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1} = T.$$

Pour simplifier les notations, on suppose que les subdivisions sont régulières de pas  $\Delta x > 0, \Delta t > 0$ . Soit  $(u_i^n)_{0 \leq i \leq I+1, 0 \leq n \leq N+1}$  la suite solution du schéma :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\Delta t}(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{1}{\Delta x^2}(-u_{i-1}^n + 2u_i^n - u_{i+1}^n) = f(x_i), & i = 1, \dots, I, \\ & n = 1, \dots, N, \\ u_i^0 = u_0(x_i) & i = 1, \dots, I, \\ u_0^n = u_{I+1}^n = 0 & n = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.6)$$

**Définition 3.3.1** (Consistance). On définit l'erreur de consistance au point  $(x_i, t_n)$ , par :

$$\varepsilon_i^n = \frac{1}{\Delta t}(u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)) + \frac{1}{\Delta x^2}(-u(x_{i-1}, t_n) + 2u(x_i, t_n) - u(x_{i+1}, t_n)) - f(x_i).$$

Le schéma est dit consistant si

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} \max_{1 \leq i \leq I, 1 \leq n \leq N} |\varepsilon_i^n| = 0.$$

**Proposition 3.3.1.** *On pose :*

$$\|\varepsilon^n\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq I} |\varepsilon_i^n|, \quad \forall n \geq 0.$$

*Si  $u \in \mathcal{C}^4(]0, L[ \times ]0, T[)$ , alors*

$$\sup_{1 \leq n \leq N} \|\varepsilon^n\|_\infty \leq C \|u^{(4)}\|_\infty (\Delta t + \Delta x^2)$$

*Démonstration.* On pose :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\Delta t}(u(x, t+\Delta t) - u(x, t)) + \frac{1}{\Delta x^2}(-u(x-\Delta x, t) + 2u(x, t) - u(x+\Delta x, t)) - f(x).$$

La formule de Taylor donne :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) + o(\Delta t) + o((\Delta x)^2) \quad (3.7)$$

□

**Définition 3.3.2** (Convergence). On définit l'erreur de convergence par :

$$e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n, \quad i = 1, \dots, I, \quad n = 1, \dots, N.$$

et on pose :

$$\|e^n\|_\infty = \max_{i=1, \dots, I} |e_i^n|, \quad n = 1, \dots, N.$$

Le schéma est dit convergent si

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} \|e^n\|_\infty = 0.$$

**Proposition 3.3.2.** On suppose que  $u \in \mathcal{C}^4([0, L] \times [0, T])$  et que

$$0 < \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}. \quad (3.8)$$

Alors :

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|e^n\|_\infty \leq CT \|u^{(4)}\|_\infty (\Delta t + (\Delta x)^2).$$

*Démonstration.* Soit  $(\mu_i^n)$  une suite de réels et soit  $(z_i^n)$  la suite définie par le schéma :

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(z_i^{n+1} - z_i^n) + \frac{1}{\Delta x^2}(-z_{i-1}^n + 2z_i^n - z_{i+1}^n) = \mu_i^n, & i = 1, \dots, I, \quad n = 1, \dots, N, \\ z_i^0 \in \mathbb{R} & i = 1, \dots, I, \\ z_0^n = z_{I+1}^n = 0 & n = 1, \dots, N \end{cases} \quad (3.9)$$

Alors :

$$z_i^{n+1} = \left(1 - 2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) z_i^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (z_{i-1}^n + z_{i+1}^n) + \Delta t \mu_i^n, \quad n = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, I.$$

On en déduit, compte tenu de (3.8) :

$$\|z^{n+1}\|_\infty \leq \|z^n\|_\infty + \Delta t \|\mu^n\|_\infty \leq \|z^0\|_\infty + \Delta t \sum_{k=0}^n \|\mu^k\|_\infty$$

Si  $\mu_i^n = f(x_i)$ ,  $\forall n \in [[1, N]]$  et si  $z_i^0 = u_0(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, I$ , alors  $z_i^n = u_i^n$  et on en déduit :

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty + \Delta t \|f\|_\infty$$

i.e., le schéma est stable, donc convergent puisque consistant. Si  $z_i^n = e_i^n$ , alors  $\mu_i^n = \varepsilon_i^n$  est l'erreur de consistance et  $z_i^0 = 0 \Rightarrow$

$$\|e^n\|_\infty \leq C \|u^{(4)}\|_\infty N \Delta t (\Delta t + (\Delta x)^2) \leq C \|u^{(4)}\|_\infty T (\Delta t + (\Delta x)^2).$$

□

**Définition 3.3.3** (Erreur d'arrondis). On appelle erreur sur les arrondis au point  $(x_i, t_n)$  le terme  $z_i^n$  dans la suite définie par le schéma (3.9) lorsque  $\mu_i^n = 0$ .

**Proposition 3.3.3.** *Le schéma (3.6) est stable au sens des erreurs d'arrondi.*

*Démonstration.* Soit  $(z_i^n)$  la suite résultant du schéma (3.9). On pose :

$$Z^{(n)} = \begin{pmatrix} z_1^n \\ \vdots \\ z_N^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

Le schéma (3.9) se réécrit sous forme matricielle :

$$Z^{n+1} = \underbrace{\left( I - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} A_N \right)}_{=: B_N} Z^n + \Delta t \mu_i^n, \quad n \geq 0,$$

où  $A_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est la matrice (2.13). On en déduit :

$$Z^{(n)} = B_N^n Z^{(0)} + \sum_{k=0}^{n-1} B_N^k \mu^{n-k}, \quad \forall n \geq 1.$$

La matrice  $B_N$  étant symétrique réelle, on a :

$$\|B^n\|_2 = \rho(B_N^n) = \rho(B_N)^n.$$

D'après (2.17), les valeurs propres  $\lambda_i^{(N)}$ ,  $i = 1, \dots, N$  de  $A_N$  vérifient :

$$0 < \lambda_1^{(N)} = 4 \sin \left( \frac{\pi}{(N+1)} \right)^2 < \dots < \lambda_N^{(N)} = 4 \cos \left( \frac{\pi}{(N+1)} \right)^2 < 4$$

On en déduit :

$$-1 \underset{(3.8)}{<} 1 - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \lambda_N^{(N)} < \dots < 1 - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \lambda_1^{(N)} < 1$$

i.e.  $\rho(B_N) < 1$  et donc le schéma est stable.  $\square$

**Proposition 3.3.4** (Stabilité au sens de Von Neumann). *On suppose que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < +\infty$  et que (3.8) est vérifié. Alors, le schéma (3.6) converge au sens de Von Neumann, i.e. :*

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} \|e^{N+1}\|_\infty = 0.$$

*Démonstration.* Pour simplifier les notations, on pose  $L = \pi$ . On suppose que la donnée initiale  $u_0$  dans (3.4) coïncide avec son développement en série de Fourier, soit :

$$u_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

Alors, le schéma (3.6) est défini avec :

$$u_j^0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ijk\Delta x}, \quad j = 0, \dots, N+1.$$

On en déduit :  $\forall j \in [[1, N]]$ ,

$$u_j^1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \underbrace{\left( 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \left( \sin \left( \frac{k}{2} \Delta x \right) \right)^2 \right)}_{=:\gamma_k} e^{ijk\Delta x}$$

puis, par récurrence sur  $n \geq 0$ ,

$$u_j^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \gamma_k^n e^{ijk\Delta x}, \quad n \geq 0,$$

avec :

$$1 \geq \gamma_k \underset{(3.8)}{>} 1 - 2 \left( \sin \left( \frac{k}{2} \Delta x \right) \right)^2 \geq -1$$

Soit  $j \in [[0, I]]$ . On pose  $L = \pi$  dans (3.5). D'après (3.5), on a alors :

$$u(x_j, T) - u_j^{N+1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (e^{-k^2 T} - \gamma_k^{N+1}) e^{ikx_j}$$

avec :

$$|c_k (e^{-k^2 T} - \gamma_k^{N+1}) e^{ikx_j}| = |c_k| |e^{-k^2 T} - \gamma_k^{N+1}| \leq 2|c_k|$$

et la série majorante est convergente par hypothèse. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . On a :

$$\begin{aligned} \gamma_k - 1 &= -\frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \left( \sin \left( \frac{k}{2} \Delta x \right) \right)^2 \underset{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)}{\sim} -\frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \left( \frac{k}{2} \Delta x \right)^2 = -k^2 \Delta t \\ \gamma_k - 1 &= -\frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \left( \sin \left( \frac{k}{2} \Delta x \right) \right)^2 = -\frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \left( \frac{k}{2} \Delta x + o(k \Delta x)^2 \right)^2 \\ &= -k^2 \Delta t (1 + o(k \Delta x)) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \ln(\gamma_k^{N+1}) &= (N+1) \ln \gamma_k = (N+1) \ln(1 - k^2 \Delta t (1 + o(k \Delta x))) \\ &\underset{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)}{\sim} -(N+1) k^2 \Delta t = -k^2 T \end{aligned}$$

i.e. :

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} \ln(\gamma_k^{N+1}) = -k^2 T.$$

On en déduit, par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} \gamma_k^{N+1} = e^{-k^2 T}$$

i.e :

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} (\gamma_k^{N+1} - e^{-k^2 T}) = 0.$$

Du Théorème de convergence dominée il résulte que

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| |\gamma_k^{N+1} - e^{-k^2 T}| = 0.$$

On remarque que :

$$|e_j^{(N+1)}| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| |\gamma_k^{N+1} - e^{-k^2 T}|, \quad j = 0, \dots, I+1.$$

et donc :

$$\|e^{(N+1)}\|_\infty \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| |\gamma_k^{N+1} - e^{-k^2 T}| \underset{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)}{\rightarrow} 0.$$

□

### Schéma implicite et schéma de Crank-Nickolson

Soit  $\theta \in [0, 1]$ . On considère le schéma :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta x} + \theta \frac{(-u_{i-1}^{n+1} + 2u_i^{n+1} - u_{i+1}^{n+1})}{(\Delta x)^2} + (1 - \theta) \frac{(-u_{i-1}^n + 2u_i^n - u_{i+1}^n)}{(\Delta x)^2} = 0, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad u_0^n = u_{N+1}^n = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

**Proposition 3.3.5.** *Le schéma (3.10) est consistant d'ordre 2 en espace. Il est consistant d'ordre 2 en temps si  $\theta = \frac{1}{2}$ , d'ordre 1 en temps sinon.*

*Démonstration.* Soit  $(x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+$ . On a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x, t) &:= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + \frac{-u(x - \Delta x, t + \Delta t) + 2u(x, t + \Delta t) - u(x + \Delta x, t + \Delta t)}{\Delta x^2} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t + \Delta t)}_{= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t + \Delta t)} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t + \Delta t) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \\ &= \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \\ &= -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \\ \varepsilon_2(x, t) &:= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + \frac{-u(x - \Delta x, t) + 2u(x, t) - u(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2} = \\ &\stackrel{(3.7)}{=} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \theta \varepsilon_1(x, t) + (1 - \theta) \varepsilon_2(x, t) &= \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \\ &= \begin{cases} O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) & \text{si } \theta = \frac{1}{2}, \\ O(\Delta t) + O(\Delta x^2) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.3.6** (Convergence du  $\theta$ -Schéma). *Sous les hypothèses de la Proposition 3.2.6, le schéma (3.10) est convergent.*

*Démonstration.* Soit  $\theta \in [0, 1]$  et soit  $(\mu_i^n)_{0 \leq i \leq N, n \geq 0}$  une suite de réels. On considère le schéma :

$$\begin{cases} \frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\Delta x} + \theta \frac{(-z_{i-1}^{n+1} + 2z_i^{n+1} - z_{i+1}^{n+1})}{(\Delta x)^2} + (1 - \theta) \frac{(-z_{i-1}^n + 2z_i^n - z_{i+1}^n)}{(\Delta x)^2} = \mu_i^n, \\ \mu_i^0 \in \mathbb{R}, \quad \mu_0^n = \mu_{N+1}^n = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

On note  $(Z^n)_{n \geq 0}$  la suite des vecteurs de composantes  $z_i^n$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Alors :

$$\left(1 + \theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} A_N\right) Z^{n+1} = \left(1 - (1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} A_N\right) Z^{n+1} + \Delta t \mu^n$$

d'où on déduit que :

$$\begin{aligned} \|Z^{n+1}\|_2 &\leq \left\| \left(1 + \theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} A_N\right)^{-1} \right\|_2 \left( \left\| 1 - (1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} A_N \right\|_2 \|Z^n\|_2 + \Delta t \|\mu^n\|_2 \right) \\ &\leq \frac{\left(1 - (1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \lambda_1(A_N)\right)}{\left(1 + \theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \lambda_N(A_N)\right)} \|Z^n\|_2 + \frac{\Delta t \|\mu^n\|_2}{\left(1 + \theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \lambda_N(A_N)\right)} \\ &\leq \underbrace{\left(1 - \frac{\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}}{1 + \theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \lambda_N(A_N)}\right)}_{=: \tau_N} \|Z^n\|_2 + \Delta t \|\mu^n\|_2. \\ &\leq \tau_N^n \|Z^0\|_2 + \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \tau_N^k \|\mu^{n-k}\|_2. \end{aligned}$$

Si  $\mu_i^n = \varepsilon_i^n$ , alors  $z_i^n = e_i^n$ ,  $\forall i \in [[1, N]]$ . Par construction :  $Z^0 = 0$ , donc

$$\begin{aligned} \|e^n\|_2 &\leq C \Delta t (\Delta t + (\Delta x)^2) \frac{\tau_N^n - 1}{\tau_N - 1} \stackrel{0 < \tau_N < 1}{=} C \Delta t (\Delta t + (\Delta x)^2) \frac{1 - \tau_N^n}{1 - \tau_N} \\ &\leq C (\Delta t + (\Delta x)^2) \frac{\Delta t}{1 - \tau_N} \leq \\ &\leq C \left(1 + \theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \lambda_N(A_N)\right) (\Delta x)^2 (\Delta t + (\Delta x)^2) \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.3.7** (Principe du maximum). *On suppose (3.8) réalisé. Alors, la solution du schéma (3.10) vérifie :*

$$\min_{0 \leq i \leq N+1} u_i^0 \leq \min_{0 \leq i \leq N+1} u_i^n \leq \max_{0 \leq i \leq N+1} u_i^n \leq \max_{0 \leq i \leq N+1} u_i^0$$

*Démonstration.* Soit  $\theta \in [0, 1]$  et soit  $u_{i_0}^{n+1} = \min u_i^{n+1}$ . On a :

$$\begin{aligned} & \left(1 + 2\theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_{i_0}^{n+1} - \theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i_0-1}^{n+1} + u_{i_0+1}^{n+1}) = \\ & = \left(1 - 2(1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_{i_0}^n + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i_0-1}^n + u_{i_0+1}^n) \end{aligned}$$

On en déduit, par définition de  $i_0$  :

$$\begin{aligned} & \left(1 + 2\theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_{i_0}^{n+1} \geq 2\theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{i_0}^{n+1} + \\ & + \left(1 - 2(1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_{i_0}^n + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i_0-1}^n + u_{i_0+1}^n) \end{aligned}$$

i.e. :

$$\begin{aligned} u_{i_0}^{n+1} & \geq \left(1 - 2(1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_{i_0}^n + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i_0-1}^n + u_{i_0+1}^n) \\ & \stackrel{(3.8)}{\geq} \left(1 - 2(1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) \min_i u_i^n + 2(1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \min_i u_i^n = \min_i u_i^n \end{aligned}$$

i.e. :  $\min_i u_i^{n+1} \geq \min_i u_i^n \geq \min_i u_i^0$ .

De même, si  $u_{i_0}^{n+1} = \max u_i^{n+1}$ . On a, par définition de  $i_0$  :

$$\begin{aligned} & \left(1 + 2\theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_{i_0}^{n+1} \leq 2\theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} u_{i_0}^{n+1} + \\ & + \left(1 - 2(1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_{i_0}^n + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i_0-1}^n + u_{i_0+1}^n) \end{aligned}$$

i.e. :

$$\begin{aligned} u_{i_0}^{n+1} & \leq \left(1 - 2(1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_{i_0}^n + (1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i_0-1}^n + u_{i_0+1}^n) \\ & \stackrel{(3.8)}{\leq} \left(1 - 2(1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) \max_i u_i^n + 2(1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \max_i u_i^n = \max_i u_i^n \end{aligned}$$

i.e. :  $\max_i u_i^{n+1} \leq \max_i u_i^n \leq \max_i u_i^0$ .

□

**Proposition 3.3.8** (Convergence au sens de Von Neumann). *On suppose que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < +\infty$ . Alors, le schéma (3.10) converge au sens de Von Neumann, i.e. :*

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} \|e^{N+1}\|_{\infty} = 0.$$

*Démonstration.* Par hypothèse :

$$u_j^0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikj\Delta x}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Au temps  $n = 0$ , le schéma (3.10) se réécrit sous forme matricielle :

$$\left( I + \theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} A_N \right) u^1 = \left( I - (1 - \theta) \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} A_N \right) u^0.$$

On cherche  $u^1$  sous la forme :

$$u_j^1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^1 e^{ikj\Delta x}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Le calcul donne directement

$$c_k^1 = \underbrace{\left( 1 - \frac{4 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \left( \sin \left( \frac{k}{2} \Delta x \right) \right)^2}{1 + 4\theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \left( \sin \left( \frac{k}{2} \Delta x \right) \right)^2} \right)}_{=: \tau_k} c_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.11)$$

Par récurrence sur  $n \geq 0$ , on trouve que :

$$u_j^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_k^n c_k e^{ikj\Delta x}, \quad j = 1, \dots, N.$$

avec

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4}{(\Delta x)^2} \left( \sin \left( \frac{k}{2} \Delta x \right) \right)^2 = k^2, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

donc

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tau_k = 1.$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \ln(\tau_k) &\underset{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)}{\sim} - \frac{4 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \left( \sin \left( \frac{k}{2} \Delta x \right) \right)^2}{1 + 4\theta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \left( \sin \left( \frac{k}{2} \Delta x \right) \right)^2} \underset{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)}{\sim} -k^2 \Delta t \\ &\Rightarrow n \ln(\tau_k) \underset{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)}{\sim} -k^2 t_n, \end{aligned}$$

i.e. :

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow (0,0)} \tau_k^n = e^{-k^2 t_n}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 0.$$

On conclut comme pour la Proposition 3.3.4. □

**Définition 3.3.4.** Le schéma (3.10) est dit stable au sens de Von Neumann si dans (3.11) :

$$|\tau_k| < 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

**Proposition 3.3.9** (Stabilité au sens de Von Neumann). 1. Si  $\theta \geq \frac{1}{2}$ , le schéma (3.10) est inconditionnellement stable.

2. Si  $\theta < \frac{1}{2}$ , le schéma (3.10) est stable si en outre :

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2(1-\theta)}$$

*Démonstration.* Soit  $k \in \mathbb{Z}$  et soit  $\theta \in [0, 1]$ . On pose :

$$s_k = \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \left( \sin \left( \frac{k}{2} \Delta x \right) \right)^2.$$

On a :

$$|\tau_k| < 1 \iff 0 < \underbrace{\frac{s_k}{1 + \theta s_k}}_{=: f_\theta(s_k)} < 2 \quad (3.12)$$

1. Si  $\theta \geq \frac{1}{2}$ , l'étude des variations de  $f_\theta$  montre que  $f_\theta(\mathbb{R}^{++}) \subset ]0, 2[$ , i.e. que (3.12) est réalisé pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .
2. Si  $\theta < \frac{1}{2}$ , l'étude des variations de  $f_\theta$  montre que  $]0, 2[ = f_\theta \left( ]0, \frac{2}{1-2\theta}[ \right)$ . On conclut en remarquant que :

$$0 \leq s_k \leq \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

avec :

$$\frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{2}{1-2\theta} \iff \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2(1-2\theta)}$$

□

**Corollaire 3.3.10.** 1. Les schémas d'Euler implicite ( $\theta = 1$  dans (3.10)) et de Crank-Nicolson ( $\theta = \frac{1}{2}$  dans (3.10)) sont inconditionnellement stables.

2. Le schéma d'Euler explicite ( $\theta = 0$  dans (3.10)) n'est stable que si

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

### Convection-diffusion

Dans l'approximation de l'équation de transport (1.10) par le schéma convectif (1.16), l'erreur de consistance est donnée par

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t) + O((\Delta x)^2),$$

de sorte qu'un schéma convergent d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace est donné par :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2\Delta x} (-u_{i-1}^n + 2u_i^n - u_{i+1}^n) = 0, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

**Proposition 3.3.11.** *Sous la condition :*

$$0 < \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{2}$$

le schéma (3.13) est convergent d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

*Remarque 13.* Le schéma (3.13) approche aussi l'équation de convection-diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

lorsque  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre.

# Bibliographie

- [1] Haïm Brezis. Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, Paris, 1983. *Chapitres X.1 et X.2.*
- [2] Thierry Gallouët, Raphaèle Herbin. Analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Master. Marseille, France. 2011. ([https ://cel.hal.science/cel-00637008v2](https://cel.hal.science/cel-00637008v2)) *Chapitre 2.*
- [3] P.A. Raviart et J.M. Thomas Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivés partielles, Masson, Paris 1996. *Chapitre 7.*
- [4] Lionel Sainsaulieu. Calcul Scientifique. Cours et exercices corrigés pour le second cycle et les écoles d'ingénieurs, Masson, Paris 1996. *Chapitre 2.4.*
- [5] Brigitte Lucquin, Olivier Pironneau. Introduction au calcul scientifique. Masson, Paris, 1996. *Chapitres VII.3 et VII.5*
- [6] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri Numerical Mathematics. Springer, Berlin, 2007. *Chapitres 13.1, 13.2, 13.8*
- [7] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Paola Gervasio Calcul scientifique. Springer, Milan, 2010. *Chapitre 8.2.6*