Formule de changement de variables

On se propose de montrer et d'illustrer le

<u>Théorème</u> : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f un C^1-difféomorphisme de $U \to f(U)$, ie f est C^1 et sa réciproque f^{-1} également. Alors g est intégrable sur $f(U)$ ssi la fonction $x \mapsto g(f(x))\,|\det D_x f|$ est intégrable sur U et l'on a

$$\int_{f(U)} g(y)\,dy = \int_U g(f(x))\,|\det D_x f|\,dx.$$

<u>Exemple</u> : Changement de coordonnées polaires

$U =]0,+\infty[\times]0,2\pi[$, $f(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ où

$f : (r,\theta) \longrightarrow (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$$D_{(r,\theta)} f = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad |D_{(r,\theta)} f| = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = \underline{r}$$

Soit g intégrable sur $\mathbb{R}^2$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} g(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta, r\sin(\theta))\,\underline{r}\,dr\,d\theta$$

<u>Application</u> : intégrale gaussienne.

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$$

changement de coordonnées polaires $\rightarrow$ $= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr = 2\pi.$

Ainsi $\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy} = \sqrt{2\pi}.$

<u>Preuve du théorème</u> : on commence par remarquer que les deux membres de l'égalité

$$(*) \quad \int_{f(U)} g(y)\,dy = \int_U g(f(x))\,|\det D_x f|\,dx$$

sont linéaires en g, aussi par les théorèmes classiques il suffit d'établir $(*)$ pour les fonctions étagées et par suite pour les indicatrices de compacts, autrement dit il suffit d'établir que pour $K \subset U$ compact

$$\mathrm{Leb}(f(K)) = \int_{f(K)} \mathbb{1}\,dy = \int_K \mathbb{1}\,|\det D_x f|\,dx$$

ie $\quad (**) \quad \mathrm{Leb}(f(K)) = \int_K |\det D_x f|\,\mathrm{Leb}(dx).$

- On commence par le cas où f est linéaire ie $f(x) = Ax$ avec A inversible.

Alors $D_x f \equiv A$ de sorte que $|\det D_x f| \equiv |\det(A)|$.

La décomposition polaire de A s'écrit

$$A = VS \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} S = ({}^tAA)^{\frac{1}{2}} \text{ symétrique positive} \\ V = AS^{-1} \in O_n \end{array} \right.$$

car ${}^tVV = {}^tS^{-1}\,{}^tAAS^{-1} = {}^tS^{-1}SSS^{-1} = Id$

On diagonalise $S = QD\,{}^tQ$ avec $Q \in O_n$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ de sorte que $A = \underbrace{VQ}_{\in O_n} D \underbrace{{}^tQ}_{\in O_n}$.

Comme la mesure de Lebesgue est invariante par O_n, il vient

$$\mathrm{Leb}(AK) = \mathrm{Leb}(VQD\,{}^tQK) = \mathrm{Leb}(D\,{}^tQK)$$

changement de variable de dimension un selon chaque coordonnées $= \det(D)\,\mathrm{Leb}({}^tQK)$

invariance sous O_n à nouveau $= \det(D)\,\mathrm{Leb}(K)$

car $\det(D) \geq 0$ et $(\det D)^2 = (\det A)^2$ $= |\det(A)|\,\mathrm{Leb}(K)$.

Autrement dit, la relation (**) est bien vérifiée dans le cas où f est linéaire.

- On passe au cas général. On se donne $\varepsilon, \delta > 0$ et on recouvre le compact K par une union finie de cubes (disjoints) de centre c_i et de coté de longueur ε. On pose $K_\varepsilon = \bigcup_i B_i$ le ε-grossissement de K obtenu. On a bien sur $\mathrm{Leb}(f(K)) \leq \sum_i \mathrm{Leb}(f(B_i))$.

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la formule de Taylor dans B_i donne pour $c_i + h \in B_i$

$$f(c_i + h) = f(c_i) + D_{c_i} f(h) + o(\|h\|).$$

La différentielle $x \mapsto D_x f$ étant uniformément continue sur K, pour ε assez petit, uniformément en i

$$f(B_i) \subset f(c_i) + (1+\delta) D_{c_i} f(\underbrace{B_i - c_i}_{\text{cube centré en zéro de côté } \varepsilon})$$

Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, puis par homogénéité, il vient alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Leb}(f(B_i)) &\leq \mathrm{Leb}\left(f(c_i) + (1+\delta) D_{c_i} f(B_i - c_i)\right) \\
\text{invariance par translation} \quad &= \mathrm{Leb}\left((1+\delta) D_{c_i} f(B_i - c_i)\right) \\
\text{homogénéité} \quad &= (1+\delta)^n \,\mathrm{Leb}\left(D_{c_i} f(B_i - c_i)\right) \\
\text{cas linéaire !} \quad &= (1+\delta)^n \,|\det D_{c_i} f| \,\mathrm{Leb}(B_i - c_i) \\
\text{invariance par translation} \quad &= (1+\delta)^n \,|\det D_{c_i} f| \,\mathrm{Leb}(B_i)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, toujours par uniforme continuité de $x \mapsto D_x f$ on a également, uniformément pour $x \in B_i$

$$|\det D_{c_i} f| \leq (1+\delta) |\det D_x f|$$

et donc

$$|\det D_{c_i} f| \,\mathrm{Leb}(B_i) \leq (1+\delta) \int_{B_i} |\det D_x f| \,\mathrm{Leb}(dx).$$

En sommant, il vient alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Leb}(f(K)) &\leq \sum_i \mathrm{Leb}(f(B_i)) \\
&\leq (1+\delta)^{m+1} \sum_i \int_{B_i} |\det D_x f| \, \mathrm{Leb}(dx) \\
&\leq (1+\delta)^{m+1} \int_{K_\varepsilon} |\det D_x f| \, \mathrm{Leb}(dx) .
\end{aligned}$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, par convergence dominée, on obtient alors
$$\mathrm{Leb}(f(K)) \leq (1+\delta)^{m+1} \int_K |\det D_x f| \, \mathrm{Leb}(dx) .$$

On conclut en faisant tendre $\delta \to 0$ que
$$\mathrm{Leb}(f(K)) \leq \int_K |\det D_x f| \, \mathrm{Leb}(dx).$$

Pour obtenir l'inégalité inverse, on peut par exemple appliquer le même raisonnement à f^{-1}. $\square$

<u>Ref</u> : voir par ex G. Folland, Advanced Calculus, Appendix B.5

Quelques exemples

Exemple 1 (exo 5 feuille 5)

Soit (X,Y) de densité $f(x,y) = \frac{1}{2} e^{-x} \mathbb{1}_{0<|y|<x}$

Déterminons la loi de $\left(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}\right)$.

Soit h une fonction test $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left[h\left(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^2} h\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \frac{1}{2} e^{-x} \mathbb{1}_{0<|y|<x} \, dx\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} \int_{-x}^{x} h\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \frac{1}{2} e^{-x} \, dx\, dy$$

On pose $u = \frac{x-y}{2}$, $v = \frac{x+y}{2}$ ie $\begin{cases} x = u+v \\ y = v-u \end{cases}$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad |\det J| = 2$$

$$\mathbb{E}\left[h\left(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}\right)\right] = \int_{u\geq 0} \int_{v \geq 0} h(u,v)\, e^{-u+v} \, du\, dv$$

$$\text{ie } \left(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}\right) \sim \mathcal{E}(1) \otimes \mathcal{E}(1)$$

Exemple 2

Si $(X,Y) \sim \mathcal{N}(0,1) \otimes \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{E}\left[h\left(X^2+Y^2, \frac{Y}{X}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^2} h\left(x^2+y^2, \frac{y}{x}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \frac{dx\, dy}{2\pi}$$

$$= \int_{r=0}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} h(r^2, \tan(\theta))\, e^{-r^2} r \, dr \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \int_{u \in \mathbb{R}^+}^{\infty} \int_{v \in \mathbb{R}} h(u,v)\, e^{-u} \frac{du\,dv}{1+v^2}$$

$v = \tan\theta$

ie $\left| \begin{array}{l} X^2+Y^2 \sim \mathcal{E}(1) \\ \dfrac{Y}{X} \sim \text{Cauchy}(1). \end{array} \right.$

__Exemple 3__ Soit $(X,Y) \sim \Gamma(a,\lambda) \otimes \Gamma(b,\lambda)$

Loi de $\left(X+Y, \dfrac{X}{X+Y}\right)$?

$$\mathbb{E}\left[h\left(X+Y, \frac{X}{X+Y}\right)\right] = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int h\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) e^{-\lambda(x+y)} x^{a-1} y^{b-1}\, dx\, dy$$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{\mathbb{R}^+ \times]0,1[} h(u,v)\, e^{-\lambda u} (uv)^{a-1} (u-uv)^{b-1}\, u\, du\, dv$$

$\left| \begin{array}{l} u = x+y \\ v = \dfrac{x}{x+y} \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} x = uv \\ y = u-uv \end{array} \right.$

$$= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{\mathbb{R}^+ \times]0,1[} h(u,v)\, e^{-\lambda u} u^{a+b-1} v^{a-1} (1-v)^{b-1}\, du\, dv$$

$J = \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix}$

$|\det J| = u$

$$= \int_{\mathbb{R}^+ \times]0,1[} h(u,v)\, \underbrace{\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} e^{-\lambda u} u^{a+b-1}}_{\sim \Gamma(a+b,\lambda)} \times \underbrace{\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} v^{a-1} (1-v)^{b-1}}_{\sim \beta(a,b)}\, du\, dv$$

loi Gamma — loi Beta

indépendantes