2.3 Formules de l'aire et de la co-aire

Les formules de l'aire et de la co-aire généralisent la formule de changement de variables classique. De nombreuses formules intégrales comme les relations de Fubini, intégrales sphériques, formule de Kac pour les domaines nodaux etc., sont en fait des applications immédiates de celles-ci. Les deux formules font appels à la notion de jacobien $k-$dimensionnel ce qui en fait d'excellentes illustrations pour l'agreg, que l'on peut recaser aussi bien en analyse qu'en algèbre, par exemple dans les leçons sur les matrices, le déterminant, le rang, la dimension, l'orthogonalité, les intégrales multiples, le calcul différentiel etc. Le contenu de cette section se trouve par exemple dans l'excellent chapitre 5, p.121 et suivantes de [KP08], ou encore dans la section 3.2 de [Fed69].

Rappelons tout d'abord la formule de changement de variables classique.

Proposition 2. *Si Φ est un C^1-difféomorphisme d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dans $\Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ et si f est une fonction mesurable positive ou telle que $f|J_\Phi| \in \mathbb{L}^1(\Omega)$, alors*

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \circ \Phi^{-1}(y)\mathcal{H}^n(dy) = \int_\Omega f(x)|J_\Phi(x)|\mathcal{H}^n(dx),$$

où $J_\Phi(x) = \det(D_x\Phi)$ est le jacobien de Φ.

Les formules de l'aire et de la co-aire sont des analogues de la formule ci-dessus dans les cas où la fonction Φ est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ avec $m \neq n$. Pour les énoncer, on a besoin d'étendre la notion de jacobien, qui comme on l'a vu plus haut dans le cas classique, correspond à un rapport de volumes.

Définition 5. *Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en un point $a \in \mathbb{R}^n$ et soit $k \leq n$, alors on définit le jacobien $k-$dimensionnel de Φ en a par*

$$J_\Phi^k(a) = \sup\left\{\frac{\mathcal{H}^k(D_af(P))}{\mathcal{H}^k(P)},\ P \text{ pavé } k-\text{dimensionnel de } \mathbb{R}^n\right\}.$$

Le calcul explicite de jacobien se déduit alors du lemme suivant (bon exercice pour l'agreg) :

Lemme 1. *Si $P = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ est un pavé engendré par des vecteurs $(v_i)_{1\leq i\leq k}$ de $\mathbb{R}^n$, alors le volume $k-$dimensionnel de P est donné par $\sqrt{\det(V^tV)}$ où V est la matrice de taille $n \times k$ dont les colonnes sont les v_i.*

Précisément, selon les dimensions respectives des espaces de départ et d'arrivée, le jacobien de la définition 5 ci-dessus s'exprime comme suit.

Lemme 2. *Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en a.*

1. *Si $m = n$, alors*
$$J_\Phi^m(a) = J_\Phi^n(a) = |\det(D_a\Phi)|.$$
2. *Si $n \leq m$, alors*
$$J_\Phi^n(a) = \sqrt{\det\left[(D_a\Phi)^t(D_a\Phi)\right]}.$$
3. *Si $n \geq m$, alors*
$$J_\Phi^n(a) = \sqrt{\det\left[(D_a\Phi)(D_a\Phi)^t\right]}.$$

Proposition 3 (Formule de l'aire)**.** *Soient Φ est une application différentiable d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et f est une fonction mesurable positive ou telle que $f|J_\Phi| \in \mathbb{L}^1(\Omega)$. Si $n \leq m$,*

$$\int_\Omega f(x)|J^n_\Phi(x)|\mathcal{H}^n(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\Phi^{-1}(y)} f(x)\mathcal{H}^0(dx) \right) \mathcal{H}^m(dy).$$

Remarque 1. *La mesure $\mathcal{H}^0$ n'est autre que la mesure de comptage de sorte que la formule de l'aire s'écrit encore*

$$\int_\Omega f(x)|J^m_\Phi(x)|\mathcal{H}^n(dx) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{x \in \Phi^{-1}(y)} f(x) \right) \mathcal{H}^m(dy).$$

Proposition 4 (Formule de la co-aire)**.** *Soient Φ est une application différentiable d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dans $\Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^m$ et f est une fonction mesurable positive ou telle que $f|J_\Phi| \in \mathbb{L}^1(\Omega)$. Si $n \geq m$,*

$$\int_\Omega f(x)|J^n_\Phi(x)|\mathcal{H}^n(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\Phi^{-1}(y)} f(x)\mathcal{H}^{n-m}(dx) \right) \mathcal{H}^m(dy)$$

Exemples : Voici quelques exemples d'application de la formule de la co-aire.

1. Remarquons que, si $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, alors $|J^n_\Phi(x)| = |\nabla_x \Phi|$. Si de plus $\Phi(x) = ||x||$, on a $|J^n_\Phi(x)| = 1$ partout sauf en l'origine. Comme l'image de Φ est $\mathbb{R}^+$, la formule de la co-aire donne
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{H}^n(dx) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial B(0,r)} f(x)\mathcal{H}^{n-1}(dx) \right) dr,$$
qui n'est autre que la formule d'intégration en coordonnées sphériques.
2. Soit maintenant $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la projection $\phi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$. Alors $|J^n_\Phi(x)| = 1$ et l'on a alors
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{H}^n(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} f(x_1, \ldots, x_n)\mathcal{H}^{n-m}(dx_{m+1}, \ldots, dx_n) \right) \mathcal{H}^m(dx_1, \ldots, dx_m),$$
qui n'est autre que le théorème de Fubini.
3. Soit Φ une fonction lisse de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par Z_Φ son domaine nodal, i.e. le lieu des ses zéros $Z_\Phi := \{x \in \mathbb{R}^n, \ \Phi(x) = 0\}$. On suppose que Φ est non dégénérée au sens où $\nabla_x \Phi \neq 0$ si $x \in Z_\Phi$. Si f est intégrable, la formule de la co-aire donne alors
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)|\nabla_x \Phi|\mathcal{H}^n(dx) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Phi^{-1}(y)} f(x)\mathcal{H}^{n-m}(dx) \right) dy.$$
En prenant pour f la fonction $f(x) = (2\varepsilon)^{-1}\chi(\Phi(x)/\varepsilon)$ où χ est l'indicatrice de $[-1, 1]$, qui est constante sur les lignes de niveaux de Φ, il vient
$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \chi\left(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}\right) |\nabla_x \Phi|\mathcal{H}^n(dx) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathcal{H}^{n-1}(\Phi^{-1}(y))dy.$$
Comme Φ est non-dégénérée, en faisant tendre ε vers zéro, on obtient
$$\mathcal{H}^{n-1}(Z_\Phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \chi\left(\frac{\Phi(x)}{\varepsilon}\right) |\nabla_x \Phi|\mathcal{H}^n(dx) =: \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x \Phi|\delta_{\Phi(x)=0}\mathcal{H}^n(dx).$$

Références

[Aud06] Michèle Audin. Géométrie. EDP Sciences, 2006.

[Ave97] André Avez. Calcul différentiel. Masson, 1997.

[BFH12] Alain Bretto, Alain Faisant, and François Hennecart. Éléments de théorie des graphes. Springer, 2012.

[BG87] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. Géométrie différentielle : variétés, courbes, surfaces. PUF, 1987.

[CGL16] É. Charpentier, É Ghys, and A. Lesne. L'héritage scientifique de Poincaré. Belin, 2016.

[EK95] Alan Edelman and Eric Kostlan. How many zeros of a random polynomial are real ? Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 32(1) :1–37, 1995.

[Fed69] Herbert Federer. Geometric measure theory. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[FGN12] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. Exercices oraux X-ENS, Analyse 4. Cassini, 2012.

[KP08] Steven G. Krantz and Harold R. Parks. Geometric integration theory. Cornerstones. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008.

[Laf96] Jacques Lafontaine. Introduction aux variétés différentiables. EDP Sciences, 1996.

[MT86] Rached Mneimé and Frédéric Testard. Introduction à théorie des groupes de Lie classiques. Hermann, 1986.

[Pos90] Mikhail Postnikov. Leçons de géométrie, Variétés différentiables. Mir, 1990.

[Pre10] Andrew Pressley. Elementary differential geometry. Springer, 2010.

[QZ13] Hervé Queffélec and Claude Zuily. Éléments d'analyse : agrégation de mathématiques. Dunod, 2013.

[Rou03] François Rouvière. Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, 2ème édition. Cassini, 2003.

[Sch67] Laurent Schwartz. Cours d'analyse, volume 2. Hermann, 1967.