Université de Rennes 1
Année 2020/2021

Préparation à l'agrégation
Séries de Fourier-Feuille d'exercices 2

Exercice 1 (Exemple d'une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. On suppose qu'il existe $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ localement intégrable et 2π-périodique telle que

$$c_0(f) = 0, \quad c_n(f) = \frac{a_n}{2i} \qquad \text{et} \quad c_{-n}(f) = \frac{-a_n}{2i}, \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

Soit $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

(i) Montrer que F est continue et 2π-périodique

(ii) Montrer que $c_{|n|}(F) = \frac{-a_{|n|}}{2|n|}$ pour $|n| \geq 1$. En déduire que la série converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

(iii) Montrer que la série trigonométrique définie S par $S(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nt}{\log n}$ est partout convergente sur $\mathbf{R}$.

(iv) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ localement intégrable et 2π-périodique telle que la série de Fourier $S(f)$ de f coincide avec S sur $\mathbf{R}$.

Exercice 2 (Régularité de fonctions et décroissance des coefficients de Fourier) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue et 2π-périodique fonction. Soit $S_N(f)$ la N-ième somme partielle de la série de Fourier de f.

(i) On suppose que f est de classe C^k pour $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $c_n(f) = o(|n|^{-k})$ quand $|n| \to +\infty$ et que

$$\|S_N(f) - f\|_\infty = o(|N|^{-k+1}) \quad \text{quand} \quad N \to +\infty.$$

(ii) Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On suppose que les séries $\sum_{n\geq 0} n^k |c_n(f)|$ et $\sum_{n\geq 0} n^k |c_{-n}(f)|$ sont convergentes. Montrer que f est de classe C^k.

(iii) Montrer que f est de classe C^∞ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $c_n(f) = o(|n|^{-k})$ quand $|n| \to +\infty$.

Exercice 3 (Coefficients de Fourier tendant vers 0 de manière arbitrairement lente) Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls avec le propriétés suivantes :

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et
2. $a_n \leq \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.

On définit $b_n := a_n - a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(i) Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et tend vers 0.

(ii) Montrer que la série de terme général b_n est convergente.

(iii) Montrer que $b_n = o(1/n)$ quand $n \to +\infty$.

(iv) Montrer que la série de terme général $n(a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1})$ est convergente.

(v) Pour $n \in \mathbf{N}$, soit F_n le n-ième noyau de Féjer. Montrer que la série $\sum_{=1}^{\infty}(n(a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1}))F_n$ est convergente dans $L^1(\mathbf{S}^1)$ et définit une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ dans $L^1(\mathbf{S}^1)$.

(vi) Montrer que $c_{|n|(f)} = a_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(vii) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels positifs ou nuls avec les propriétés 1. et 2. plus haut et telle que $a_n \geq \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(viii) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ dans $L^1(\mathbf{S}^1)$ telle que

$$c_{|n|}(f) \geq \alpha_n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{N}.$$