Sur l'équation fonctionnelle de Cauchy

On s'intéresse ici à l'équation fonctionnelle de Cauchy, qui consiste à déterminer quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient la relation

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

On vérifie facilement qu'une telle application est nécessairement $\mathbb{Q}-$linéaire. Cependant, elle n'est pas forcément $\mathbb{R}-$linéaire. Il existe en effet des fonctions solutions de (1) qui ne sont pas de la forme $f(x) = \alpha x$.

Base de Hamel

La droite réelle $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Comme tel, il admet une base $(e_i)_{i\geq 1}$, autrement dit tout réel x peut s'écrire $x = \sum_{i\geq 1} q_i e_i$ avec $q_i \in \mathbb{Q}$. On se donne alors une famille quelconque de réel (α_i) et on définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ via

$$f(x) = f\left(\sum_{i\geq 1} q_i e_i\right) := \sum_{i\geq 1} q_i \alpha_i.$$

La fonction f ainsi définie est bien $\mathbb{Q}-$linéaire et elle vérifie (1), mais elle n'est pas $\mathbb{R}-$linéaire en général, elle l'est si $\exists r$ tel que $\alpha_i/e_i = r$ pour $i \geq 1$.

Zoologie

Les fonctions $\mathbb{Q}-$linéaires mais non $\mathbb{R}-$linéaires obtenues via les bases de Hamel comme ci-dessus sont très irrégulières : leur graphe est nécessairement dense dans $\mathbb{R}^2$. En fait, si f est solution de (1), alors f est continue ssi elle est Lebesgue mesurable, auquel cas elle est effectivement $\mathbb{R}-$linéaire.

De ce fait, si f est solution de (1), on peut conclure à la $\mathbb{R}-$linéarité dès que l'on impose à f une contrainte de mesurabilité ou régularité : par exemple la monotonie, la continuité etc. Sans information de ce type, il faut garder à l'esprit que f n'est pas forcément $\mathbb{R}-$linéaire et alors elle a nécessairemet un comportement sauvage : f est discontinue en tout point, f est non bornée sur tout intervalle ouvert, f est non-mesurable, $|f|$ n'est dominée par aucune fonction mesurable, si A est un borélien sur lequel f est bornée, alors A est de mesure zéro, etc.

Exercice 1 (Morphismes et automorphismes de la droite réelle)

1. *Décrire l'ensemble des automorphismes de* $(\mathbb{R}, +)$.
2. *Décrire l'ensemble des morphismes de* $(\mathbb{R}, +)$ *vers* $(\mathbb{R}, \times)$.
3. *Décrire l'ensemble des automorphismes du corps* $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Exercice 2 (Une variante de l'équation de Cauchy)
On se donne un entier $n \geq 2$, on veut décrire l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, solutions de l'équation fonctionnelle

$$f(x + y^n) = f(x) + f(y)^n, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

1. *Montrer que si f vérifie (2), alors f vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour $x, y \in \mathbb{Q}$.*
2. *Discuter la monotonie de f.*
3. *En déduire l'ensemble des solutions de (2).*

Exercice 3 (Stabilité ou presque additivité)
On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie l'inéquation suivante

$$\exists\, \varepsilon > 0, \quad |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Il s'agit de montrer qu'il existe alors une fonction additive $g(x)$ tel que

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

1. *Montrer que si f vérifie (3), alors la limite $g(x) := \lim_{n \to +\infty} 2^{-n} f(2^n x)$ existe.*
2. *Montrer que g ainsi définie est additive et qu'elle est l'unique solution additive de (4).*
3. *Si f est continue en un point, montrer que g est linéaire.*

Exercice 4 (Additivité en dimension supérieure)
Soient $(V, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation

$$||f(x+y) - f(x)|| = ||f(y)||, \quad \forall\, x, y \in V. \tag{5}$$

Il s'agit de voir si f est nécessairement additive ou non.

1. *Soit $V = \mathbb{R}^2$ muni de la norme infinie $||v|| := \max(|v_1|, |v_2|)$ pour $v = (v_1, v_2) \in V$. On considère la fonction $f : V \to \mathbb{R}$ définie par*

$$v = (v_1, v_2) \longmapsto f(v) := (|v_1|, v_1).$$

   Montrer que f vérifie la relation (5).
2. *Montrer que f n'est pas additive.*

Exercice 5 (Variations sur le théorème de Mazur–Ulam)
Le Théorème de Mazur–Ulam assure que si $(X, ||\cdot||)$ un espace de Banach réel et si $f : X \mapsto X$ une isométrie bijective telle que $f(0) = 0$, alors f est linéaire. On pourra par exemple consulter ce document de B. Bekka pour une preuve détaillée et un peu d'historique.

1. *Montrer que l'hypothèse de surjectivité est nécessaire (pensez à l'exercice 4).*
2. *Sans utiliser le théorème de Mazur–Ulam, montrer de façon élémentaire que si $(H, \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert réel et que f est une f est une isométrie de H telle que $f(0) = 0$, alors f est linéaire.*
3. *Peut-on généraliser le point précédent à un espace de Hilbert complexe ?*
4. *Soit $g : X \mapsto X$ une application continue bijective qui vérifie $||g(x) + g(y)|| = ||x + y||$, pour tout $x, y \in X$, montrer que g est linéaire.*

Exercice 6 (Une preuve concise du théorème de Mazur–Ulam)
Soit f une isométrie bijective d'un espace de Banach $(X, ||\cdot||)$ telle que $f(0) = 0$. On fixe $x \neq y \in X$ et on définit

$$\Delta_{(x,y)}(f) := \left|\left| f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(x) + f(y)}{2} \right|\right|.$$

1. *Montrer que $\Delta_{(x,y)}(f) \leq ||x - y||/2$.*
2. *Montrer que si s est la réflexion par rapport à $\frac{f(x)+f(y)}{2}$, i.e. $s(z) = f(x) + f(y) - z$, alors l'isométrie conjuguée $g = f^{-1} \circ s \circ f$ vérifie $\Delta_{(x,y)}(g) = 2\Delta_{(x,y)}(f)$.*
3. *En déduire que $\Delta_{(x,y)}(f) = 0$ puis que f est linéaire.*