Autour des théorèmes ergodiques

1. Quelques définitions et rappels

On considère un espace de probabilité $(X, \mathcal{F}, \mu)$ et une application mesurable $T : X \to X$ qui préserve la mesure, autrement dit pour tout $A \in \mathcal{F}$ on a $\mu(T^{-1}A) = \mu(\{x \in X : Tx \in A\}) = \mu(A)$. On désigne par T^n la $n^{\text{ième}}$ itérée de la transformation T, i.e. $T^0 = \mathrm{id}_X$ et $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ pour $n \geq 0$.

On définit la *tribu invariante* associée à l'application T comme la sous-tribu de la tribu ambiante $\mathcal{F}$ définie par $\mathcal{I}_T := \{A \in \mathcal{F},\ T^{-1}A = A\}$. On rappelle qu'une fonction $\mathcal{F}-$mesurable $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{I}_T-$mesurable si et seulement elle est $T-$invariante.

On dit que la transformation T est *ergodique* lorsque la tribu $\mathcal{I}_T$ est triviale, autrement dit lorsque tout $A \in \mathcal{I}_T$ vérifie l'alternative $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$, ce qui revient à dire que les seules fonctions $f \in L^1(X, \mu)$ telles que $f \circ T = f$ sont les fonctions constantes.

2. Exemples de transformations préservant la mesure

Exercice 1. *On identifie le cercle $\mathbb{S}^1$ à $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Montrer que si d est un entier non nul, alors la transformation $T : x \mapsto dx \mod 1$ préserve la mesure de Lebesgue. Faire le lien avec la décomposition en base d.*

Exercice 2. *Sur $\mathbb{R}$, montrer que $T : x \neq 0 \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)$ et $T(0) = 0$ préserve la mesure de Cauchy $m(dx) = \frac{1}{\pi}\frac{dx}{1+x^2}$. Via l'application $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$, faire le lien l'exercice précédent lorsque $d = 2$.*

Exercice 3. *Sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on considère cette fois la transformation $T : x \mapsto \beta x \mod 1$ où $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or, $\beta^2 = \beta + 1$. Montrer que T ne préserve pas la mesure de Lebesgue mais qu'elle préserve la mesure $\mu(dx)$ de densité*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5+3\sqrt{5}}{10} & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{\beta} \\ \frac{5+\sqrt{5}}{10} & si \quad \frac{1}{\beta} \leq x < 1. \end{cases}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue dx. On peut ainsi écrire une décomposition en base β de tout nombre de $[0,1[$ de la forme $x = \sum_{i\geq 1} \frac{b_i}{\beta^i}$ avec $b_i \in \{0,1\}$ et $b_i b_{i+1} = 0$ pour tout $i \geq 1$.

Exercice 4. *Soit $I = [0,1[= \bigsqcup_{i=1}^n I_i$ une partition de l'intervalle $[0,1[$ en n intervalles. Soit T la transformation induite sur I par une permutation donnée de ces intervalles. Montrer que T préserve la mesure de Lebesgue.*

Exercice 5. *Soit $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ le tore de dimension d. Montrer que si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{T}^d$ alors la transformation $T : x \mapsto x + \alpha$ préserve la mesure de Lebesgue.*

Exercice 6. *Soit $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ le tore de dimension d. Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{Z}^d)$ alors la transformation $T : x \mapsto Ax$ préserve la mesure de Lebesgue.*

Exercice 7. *Sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, montrer que la transformation $T : x \mapsto \left\{\frac{1}{x}\right\}$ préserve la mesure $m(dx)$ de densite $f(x) = \frac{1}{\log(2)}\frac{1}{1+x}$ par rapport la measure de Lebesgue dx.*

Exercice 8. *Sur le carré $[0,1[\times[0,1[$ on considère la transformation du boulanger T*

$$T(x,y) := \begin{cases} \left(2x, \frac{y}{2}\right) & si \quad 0 \leq x < 1/2 \\ \left(2x-1, \frac{y+1}{2}\right), & si \quad 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

Montrer que T préserve la measure de Lebesgue.

3. Exemples et contre-exemples de transformations ergodiques

Exercice 9. *Sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ alors la transformation $T : x \mapsto x + \alpha \mod 1$ est ergodique pour la mesure de Lebesgue. On pourra faire un raisonnement direct ou utiliser l'analyse de Fourier.*

Exercice 10. *Sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, montrer que la transformation $T : x \mapsto x + 1/4 \mod 1$ n'est pas ergodique. On pourra considérer $A = [0, 1/8[\cup[1/4, 3/8[\cup[1/2, 5/8[\cup[3/4, 7/8)$.*

Exercice 11. *Sur $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ on considère la transformation $T : (x, y) \mapsto (x + \alpha \mod 1, y + \alpha \mod 1)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que T n'est pas ergodique.*

Exercice 12. *Soit $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ le tore de dimension d. Montrer que si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{T}^d$ alors la transformation $T : x \mapsto x + \alpha$ est ergodique si et seulement si la famille $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ est linéairement indépendante sur $\mathbb{Q}$.*

Exercice 13. *On identifie le cercle $\mathbb{S}^1$ à $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Montrer que si d est un entier non nul, alors la transformation $T : x \mapsto dx \mod 1$ est ergodique pour la mesure de Lebesgue. Faire le lien avec la loi du zéro-un de Kolmogorov.*

Exercice 14. *Soit $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ le tore de dimension d. Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{Z}^d)$ alors la transformation $T : x \mapsto Ax$ si et seulement si aucune valeur propre de A n'est racine de l'unité. Particulariser au cas où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

Exercice 15. *Montrer qu'une transformation T préservant la mesure sur $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est ergodique si et seulement si pour tous $A, B \in \mathcal{F}$ tels que $\mu(A), \mu(B) > 0$, il existe $n \geq 1$ tel que $\mu(T^{-n}A \cap B) > 0$.*

Exercice 16. *Montrer qu'une transformation T préservant la mesure sur $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est ergodique si et seulement si pour tous $A, B \in \mathcal{F}$, on a*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(T^{-k}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Exercice 17. *Une transformation T préservant la mesure sur $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est dite faiblement mélangeante si pour tous $A, B \in \mathcal{F}$, on a*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\mu(T^{-k}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Elle est dite fortement mélangeante si pour tous $A, B \in \mathcal{F}$ $\lim_{n\to+\infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$. Montrer que la transformation $T(x) = dx \mod 1$ sur $\mathbb{T}$ est fortement mélangeante. Montrer qu'en revanche les translations $T(x) = x + \alpha \mod 1$ ne sont pas mélangeantes.

Références

[EW11] Einsiedler, M. and Ward, T., Ergodic Theory with a view towards Number Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2011.

[HK95] Hasselblatt, B., Katok, A., Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge University Press, 1995.

[Kre85] Krengel, U., Ergodic Theoems, de Gruyter, 1985.