UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Coniques

Feuille d'exercices 0

Exercice 1

On considère la parabole d'équation $y = x^2$.

1. Déterminer sa directrice et son foyer F. (Une parabole a une unique directrice et un unique foyer. Utiliser son axe de symétrie pour montrer que la directrice est horizontale et que le foyer est sur l'axe des ordonnées. L'excentricité d'une parabole est 1 : c'est l'ensemble des point équidistants du foyer et de la directrice. En déduire que le foyer a pour coordonnées $(0, \lambda)$ et la directrice pour équation $y = -\lambda$, pour un certain réel λ. Utiliser le point $(1, 1)$ sur la parabole pour déterminer λ.)
2. Montrer qu'un rayon lumineux arrivant verticalement est réféchi par la parabole vers son foyer. (Autrement dit, montrer que si Δ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées, si P est le point d'intersection de Δ et de la parabole, alors la normale à la parabole en P est une bissectrice de l'angle formé par les droites Δ et (PF).)

Exercice 2 : Théorème belge

Dans l'espace (de dimension 3), on considère un cône de révolution $\mathcal{C}$, un plan $\mathcal{P}$ qui coupe $\mathcal{C}$ (on prendra l'intersection connexe et compacte), et on note S_0 et S_1 les sphères inscrites dans $\mathcal{C}$ et tangentes à $\mathcal{P}$. Soient F_0 et F_1 les points de tangence respectifs de S_0 et S_1 avec le plan $\mathcal{P}$. Montrer que si P est un point de l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$, alors $PF_0 + PF_1$ ne dépend pas de P (et donc que l'intersection est une ellipse).

(On peut aussi obtenir les directrices : si $\mathcal{C}_0$ est le cercle intersection de S_0 et $\mathcal{C}$, alors le plan contenant $\mathcal{C}_0$ intersecte le plan $\mathcal{P}$ selon une droite (sauf quand l'excentricité est nulle). On peut montrer que cette droite est une directrice de l'ellipse. L'autre sphère donne l'autre directrice.)

Exercice 3

Soient deux coniques propres $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dans le plan euclidien. Montrer qu'elles sont semblables si et seulement si elles ont la même excentricité.

Exercice 4

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse, de foyers F et F'. Soit $P \in \mathcal{E}$. Montrer que la bissectrice de l'angle $\widehat{FPF'}$ est perpendiculaire à la tangente à $\mathcal{E}$ en P. (Indication : calculer le gradient de $M \mapsto FM + F'M$.)

Exercice 5 : Paramétrisation rationnelle des coniques

Soit $\mathcal{C}$ une conique, définie sur un corps $BbbK$. On suppose qu'il existe un point M de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{K}$.

1. Soit Δ_t la droite de pente t passant par M. Montrer que les (abscisses des) points d'intersections de $\mathcal{C}$ et Δ_t sont données par une équation de degré 2 dont une solution est déjà connue. En déduire que l'autre solution est donnée par une équation de degré 1.
2. En déduire que les corrdonnées de l'« autre » point d'intersections de $\mathcal{C}$ et Δ_t sont données par des fractions rationnelles en t à coefficients dans $\mathbb{K}$. On notera ce point P_t.
3. En déduire que si $t \in \mathbb{K}$, alors P_t est un point de $\mathcal{C}$ défini sur $\mathbb{K}$.

4. Réfléchir au cas où Δ_t est tangente à $\mathcal{C}$ et sur le sens d'« autre point » dans ce cas.
5. Montrer que si Q est un point de $\mathcal{C}$ défini sur $\mathbb{K}$, alors il existe un $t \in \mathbb{K}$ tel que $P_t = Q$, sauf dans le cas d'un point. (Indication : trouver la bonne droite Δ_t, et prendre sa pente.)
6. Que pensez-vous du point manquant ? (Indication : en fait, il faudrait prendre $t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.)
7. En déduire une description paramétrique des point de $\mathcal{C}$ définis sur $\mathbb{K}$, sauf un.
8. Réfléchir aux applications possibles à la résolution d'équations diophantiennes de degré 2.
9. On considère maintenant le cas particulier où $\mathcal{C}$ est le cercle de rayon 1 centré en l'origine. On choisit pour M le point de coordonnées $(-1, 0)$. Écrire explicitement la paramétrisation du cercle par des fractions rationnelles obtenue par cette méthode. Quel est le point manquant ?
10. En déduire une description paramétrique des points à coordonnées rationnelles sur le cercle.
11. Montrer que si $t \in \mathbb{Q}$ est écrit sous forme de fraction irréductible $\frac{u}{v}$, alors les formules précédentes donnent une fraction presque irréductible (PGCD égal à 1 ou 2) pour les coordonnées de P_t.
12. En déduire que les solutions entières de $X^2+Y^2 = Z^2$ sont de la forme $((u^2-v^2)k, 2uvk, (u^2+v^2)k)$, avec u et v entiers premiers entre eux et $k \in \mathbb{Z}$, ou les mêmes formules en permutant X et Y.
13. On note A le point de coordonnées $(1, 0)$, et O l'origine. Soit $\theta := \widehat{AOP_t}$. Montrer que $\widehat{AMP_t} = \frac{\theta}{2}$.
14. Montrer que $t = \tan\frac{\theta}{2}$. En déduire les formules donnant $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $\tan\frac{\theta}{2}$.